***Kompaktsus ja filtrid. Tihhonovi teoreem.**

Def 4.3. Olgu $\mathfrak{F}$ filter hulgal X. Öeldakse, et filter $\mathfrak{F}$ on *ultrafilter*, kui mis tahes $E \subset X$ korral $E \in \mathfrak{F}$ või $X \setminus E \in \mathfrak{F}$.

Piltlikult öeldes jaotab ultrafilter kõik alamhulgad kaheks — suurteks ja väikesteks.

Lemma 4.10. Olgu $\mathfrak{F}$ hulga X filter. Samaväärsed on:

(1) $\mathfrak{F}$ on ultrafilter;
(2) $\mathfrak{F}$ on maksimaalne filter ehk kui $\mathfrak{G}$ on hulga X filter ja $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, siis $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Olgu $\mathfrak{F}$ ja $\mathfrak{G}$ filtrid, kusjuures $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$. Oletame, et $A \in \mathfrak{G}$ ja $A \notin \mathfrak{F}$. Seega $X \setminus A \in \mathfrak{F}$. Järelikult $\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathfrak{G}$, mis on vastuolu.

(2) $\Rightarrow$ (1). Olgu $A \subset X$ selline, et $A \notin \mathfrak{F}$ ja $X \setminus A \notin \mathfrak{F}$. Siis on vahetult kontrollitav, et $\mathfrak{G} = \{B \cap C \colon B \in \mathfrak{F},\ A \subset C \subset X\}$ on filter, kusjuures $A \in \mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$. Eelduse kohaselt $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, seega $A \in \mathfrak{F}$, mis on vastuolu. $\square$

Teoreem 4.11 (Ultrafiltrite teoreem)**.** Iga filter sisaldub ultrafiltris.

Tõestus. Anname tõestuse Zorni lemma abil. (Märgime, et ultrafiltrite teoreem on rangelt nõrgem tulemus kui valikuaksioom ehk Zorni lemma. On teada, et ultrafiltrite teoreem on rangelt tugevam kui Hahn-Banachi teoreem.)

Olgu $\mathfrak{F}$ filter hulgas X. Hulga X filtrite hulk $\mathcal{A} = \{\mathfrak{G} \colon \mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}\}$ on osaliselt järjestatud hulk tavalise sisalduvuse suhtes. Vahetult on kontrollitav, et $\mathcal{A}$ suvalise ahela $\mathcal{B}$ korral on $\bigcup_{\mathfrak{G} \in \mathcal{B}} \mathfrak{G}$ filter hulgas X. Zorni lemma põhjal leidub hulgas $\mathcal{A}$ maksimaalne element $\mathfrak{H}$. Lemma 4.10 põhjal on $\mathfrak{H}$ ultrafilter. $\square$

Lause 4.12. Topoloogiline ruum on kompaktne parajasti siis, kui tema iga ultrafilter koondub.

Tõestus. $\Rightarrow$. Eeldame, et topoloogiline ruum (X, τ) on kompaktne. Olgu $\mathfrak{F}$ ultrafilter hulgas X, mis ei koondu. Järelikult iga $x \in X$ korral leidub punkti x lahtine ümbrus U_x, mis ei kuulu filtrisse $\mathfrak{F}$, järelikult $X \setminus U_x \in \mathfrak{F}$. Hulga X lahtisest kattest $\{U_x \colon x \in X\}$ saame ruumi kompaktsuse tõttu eraldada lõpliku alamkatte $\{U_{x_i} \colon i = 1, \dots, n\}$. Nüüd saame $\varnothing = X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = \bigcap_{i=1}^n X \setminus U_{x_i} \in \mathfrak{F}$, mis on vastuolu.

$\Leftarrow$. Eeldame, et topoloogilise ruumis (X, τ) iga ultrafilter koondub. Oletame, et (X, τ) ei ole kompaktne. Seega leidub hulga X lahtine kate $\{U_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$, millel ei leidu lõplikku alamkatet. Vahetult on kontrollitav, et $\mathfrak{B} = \{X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha \colon \mathcal{I} \subset \mathcal{A} \text{ lõplik}\}$ on filtri baas. Olgu

$\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ vastav filter. Ultrafiltrite teoreemi põhjal sisaldub see filter mingis ultrafiltris $\mathfrak{F}$, mis eelduse kohaselt koondub mingiks punktiks $x \in X$. Mingi $\alpha \in \mathcal{A}$ korral $x \in U_\alpha$, järelikult $U_\alpha \in \mathfrak{F}$. Kuid konstruktsiooni põhjal ka $X \setminus U_\alpha \in \mathfrak{F}$. Saime vastuolu. □

Lemma 4.13. Olgu X ja Y hulgad ning $f\colon X \to Y$. Kui $\mathfrak{U}$ on ultrafilter hulgas X, siis filtri baasi $f(\mathfrak{U}) = \{f(A)\colon A \in \mathfrak{F}\}$ tekitatud filter $\mathfrak{F}_{f(\mathfrak{U})}$ on ultrafilter hulgas Y.

Tõestus. Vahetu kontroll. □

Lemma 4.14. Olgu $\mathfrak{F}$ filter korrutisruumis $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ ja $x \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$. Samaväärsed on:

(1) $\mathfrak{F} \to x$;
(2) $\forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \pi_\alpha(\mathfrak{F}) \to \pi_\alpha(x) \quad (X_\alpha)$.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Ilmne, sest loomulik projektor π_α on pidev.

(2) $\Rightarrow$ (1). ISE! □

Teoreem 4.15 (Tihhonovi teoreem)**.** Topoloogilised ruumid (X_α, τ_α), $\alpha \in \mathcal{A}$, on kompaktsed parajasti siis, kui vastav korrutisruum $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ on kompaktne.

Tõestus. $\Leftarrow$. Ilmne, sest iga loomulik projektor on pidev.

$\Rightarrow$. Olgu $\mathfrak{F}$ ultrafilter korrutisruumis $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$. Näitame, et filter $\mathfrak{F}$ koondub. Fikseerime vabalt $\alpha \in \mathcal{A}$. Lause 4.12 ja lemma 4.13 põhjal $\pi_\alpha(\mathfrak{F})$ koondub mingiks punktiks x_α. Lemma 4.14 põhjal $\mathfrak{F} \to (x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$. □