
MILLISED MATEMAATIKAÜLESANDED KUTSUVAD AKTIIVSELT MÕTLEMA?

ehk millised on head matemaatikaülesanded

KRULIK, S., RUDNICK, J. (1987).

PROBLEM SOLVING. A HANDBOOK FOR TEACHERS, SECOND EDITION.

- Ülesande lahendus nõuab mingist matemaatilisest ideest **arusaamist**.
- Ülesannet saab **üldistada või laiendada**, mitmekesisitates situatsiooni.
- Ülesandel on **mitu lahendust**.

Paindlikud, üldistamist või muud edasiarendust võimaldavad ülesanded – AVATUD ÜLESANDED

- *Teeme ise matemaatikat.* Avita, 1995, lk 11-13:
 - Milline on avatud ülesanne? Suletud ülesanne?
 - Igal ülesandel 3 komponenti:
 - a) alganded
 - b) oodatav resultaat (küsimus)
 - c) meetod
 - Suletud ülesandel on **algtingimused** ja **oodatav resultaat** täpselt fikseeritud.
 - Avatud ülesandel on üks neist või mõlemad sõnastatud suhteliselt üldiselt, neid on võimalik varieerida, edasi arendada.
- Milline on alt avatud, ülalt avatud ülesanne?
 - Alt avatud ülesanne – varieeruvad ülesande algtingimused.
 - Ülalt avatud ülesanne – varieerub oodatav lõpptulem.

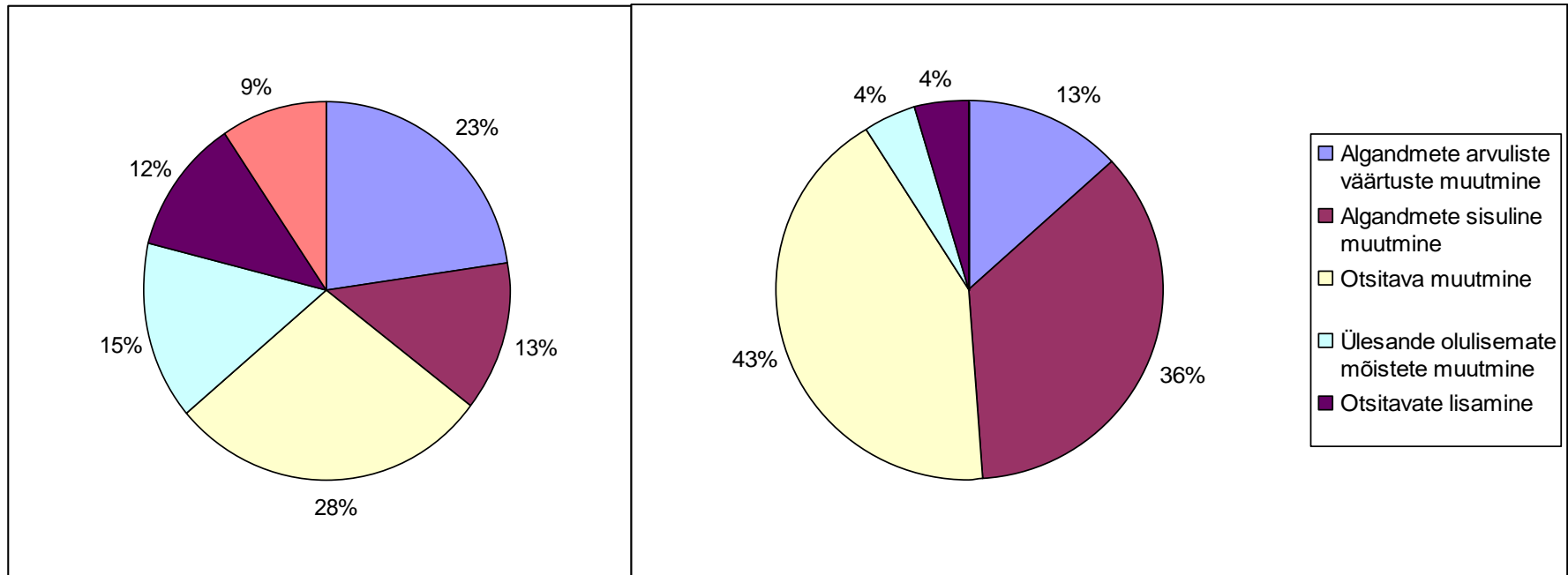
Paindlikud, üldistamist või muud edasiarendust võimaldavad ülesanded – AVATUD ÜLESANDED

- Uurimus ülesande avamise (varieerimise) oskustest (P. Pärn, 2009)
- **Ülesanne:** *Võrdhaarse trapetsi alused on 30 cm ja 50 cm. Leida trapetsi pindala, kui haara kaldenurk aluse suhtes on 60° .*

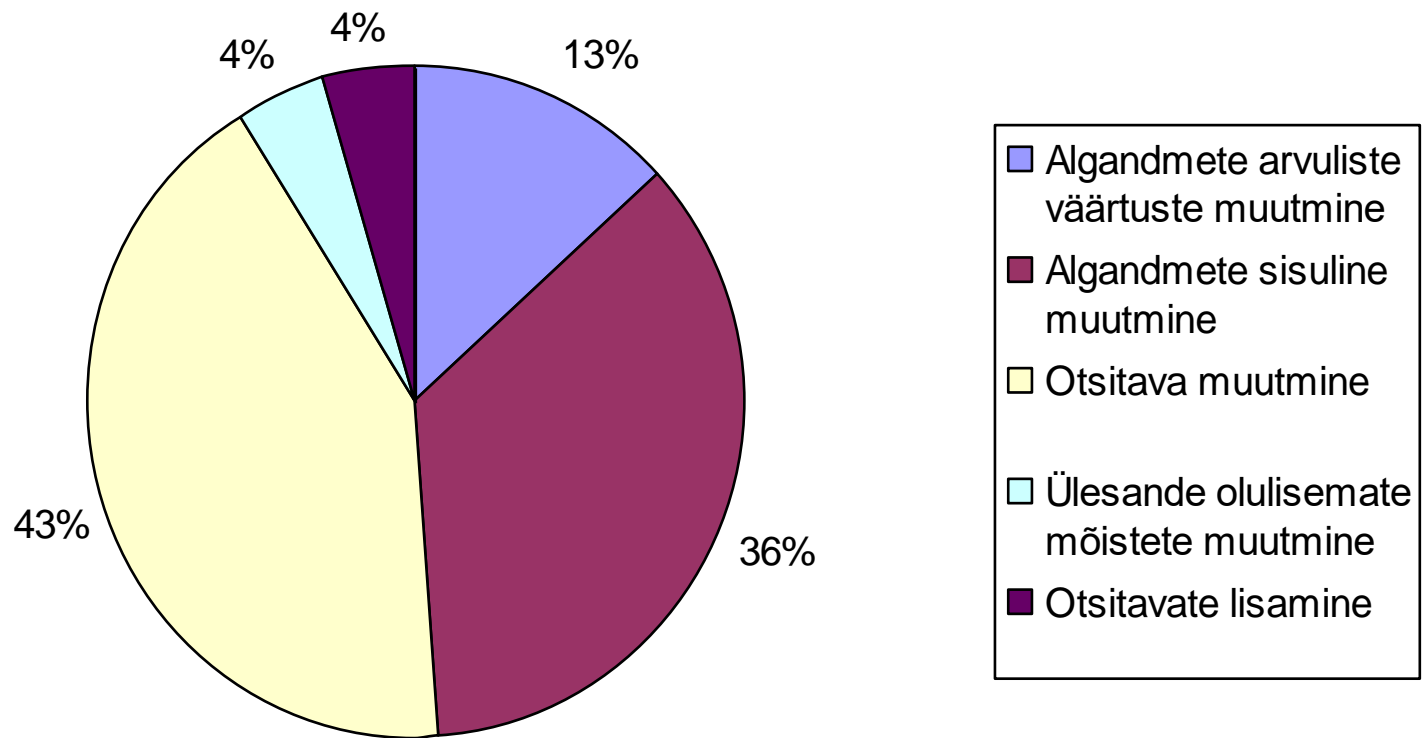
ÜLESANDE AVAMISE SUUNAD

Õpilaste rühmatöona koostati 4...15 uut ülesannet (vasakpoolne joonis)

Õpetajate rühmatöona koostati 4...10 uut ülesannet (parempoolne joonis)



ÜLESANDE AVAMISE SUUNAD ÕPETAJATE POOLT



AVATUD ÜLESANNE KUI VÄIKESE UURIMISTÖÖ ALGUS

- Kõigepealt uuritakse, üldistatakse kogu **klassiga** koos õpetaja suunavate küsimuste abil, seejärel **rühmas**, lõpuks **üksi**.
- Uurimine algab tavaliselt ühest **konkreetses küsimusest**, sellele vastamise käigus **tekivad uued küsimused**, mis võivad viia **erinevatesse suundadesse**.

ÜLESANDEID

- ✘ **ÜI 1:** Mõelge üks kolmekohaline arv. Moodustage sellest kaks uut arvu, milles numbrid alates sajalistest oleksid a) kahanevas, b) kasvavas järjekorras. **Lahutage** suuremast arvust väiksem. Saadud vahele **liitke** arv, mis saadakse selles vahes sajaliste ja üheliste vahetamise teel. Milline on vastus?

$$\begin{array}{r} \text{ARV on minul } 273, \text{ siis} \\ 732 \\ - \underline{237} \\ 495 \\ + \underline{594} \\ 1089 \end{array}$$

- Kuidas on see seotud mõeldud arvuga?

ÜLESANDEID

✘ **ÜI 1:** Mõelge üks kolmekohaline arv. Moodustage sellest kaks uut arvu, milles numbrid alates sajalistest oleksid a) kahanevas, b) kasvavas järjekorras. **Lahutage** suuremast arvust väiksem. Saadud vahele **liitke** arv, mis saadakse selles vahes sajaliste ja ühelite vahetamise teel.

- Mis juhtub, kui mõeldud arvus on ühesuguseid numbreid?

$$\begin{array}{r} \text{ARV on 737:} \quad 773 \\ - \quad 377 \\ \hline 396 \\ + \quad 693 \\ \hline 1089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Arv on: } 555 \\ - \quad 555 \\ \hline 0 \end{array}$$

ÜLESANDEID

ÜI 1: Mõelge üks kolmekohaline arv. Moodustage sellest kaks uut arvu, milles numbrid alates sajalistest oleksid a) kahanevas, b) kasvavas järjekorras. **Lahutage** suuremast arvust väiksem. Saadud vahele **liitke** arv, mis saadakse selles vahes sajaliste ja üheliste vahetamise teel.

- Mis juhtub, kui mõeldud arvus on nulle?

ARV on näiteks 500, siis

$$\begin{array}{r} 500 \\ - \underline{005} \\ 495 \\ + \underline{594} \\ 1089 \end{array}$$

ÜLESANDEID

✘ ÜI 1: Mõelge üks kolmekohaline arv. Moodustage sellest kaks uut arvu, milles numbrid alates sajalistest oleksid a) kahanevas, b) kasvavas järjekorras. Lahutage suuremast arvust väiksem. Saadud vahele liitke arv, mis saadakse selles vahes sajaliste ja üheliste vahetamise teel.

- Milline on vastus? Kuidas on see seotud mõeldud arvuga?

1089

- Mis juhtub, kui mõeldud arvus on ühesuguseid numbreid, nulle?

Nullid ei muuda olukorda

Kõik numbrid on ühesugused (555) - siis ei saa

ÜL 1 lahendus. Otsime ideed konkreetsete arvude korral

$$\begin{array}{r} \text{ARV} \quad 756 \\ 765 \\ - 567 \\ \hline 198 \end{array} = \begin{array}{r} 7*100 + 6*10 + 5 \\ - 5*100 + 6*10 + 7 \\ \hline (6*100 - 5*100) + (100 + 5*10 - 6*10) + (10 + 5 - 7) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 198 \\ + 891 \\ \hline 1089 \end{array} = \begin{array}{r} 1*100 + 90 + 8 \\ + 8*100 + 90 + 1 \\ \hline 900 + 180 + 9 \end{array}$$

ÜL 1 lahendus. Otsime ideed konkreetsete arvude korral

ARV 584

$$854 = 8*100 + 5*10 + 4$$

$$\underline{-458} = \underline{-4*100 + 5*10 + 8}$$

$$396 = ((\underline{8-1-4}) * 100) + (100 + \underline{5-1-5}) * 10 + (10+4-8)$$

Vahe	+4		-4
	<u>-1</u>		<u>10</u>
	3	→ 9 ←	6

$$396 = 3*100 + 90 + 6$$

$$\underline{+693} = \underline{+6*100 + 90 + 3}$$

$$1089 = 9*100 + 180 + 9$$

ÜL 1 lahendus

ARV \overline{abc} , $a > b > c$

1)

$$\begin{array}{r} a*100 + b*10 + c \\ - c*100 + b*10 + a \end{array}$$

$$(a-1-c)*100 + (100+(b-1)*10-b*10) + (10+c-a)$$

$$\text{ehk } (a-c-1)*100 + (100 - 10) + (10+c-a)$$

$$2) \quad (a-c-1)*100 + 90 + (10+c-a)$$

$$+ \underline{(10+c-a)*100 + 90 + (a-c-1)}$$

$$(a-c-1+10+c-a)*100 + 180 + (10+c-a+a-c-1)$$

$$\text{ehk } 9 * 100 + 180 + 9 = \mathbf{1089}$$

ÜLESANDEID

- ✘ ÜI 2: Valige üks kahekohaline arv. Kirjutage see vastupidises järjekorras numbritega ja liitke mõlemad arvud. Korrake... Kas jõuate *palindroomarvuni*?

Palindroom: KIRIK LUUL 727 12321

 59

+ 95

 154

+ 451

 605

+ 506

 1111

 Sooritasin tehet 3 korda

Valige nüüd kolmekohaline arv...

ÜLESANDEID

- ✗ ÜI 2: Valige üks kolmekohaline arv. Kirjutage see vastupidises järjekorras numbritega ja liitke mõlemad arvud. Korrake... Kas jõuate *palindroomarvuni*?

- $$\begin{array}{r} 568 \\ + 865 \\ \hline 1433 \\ + 3341 \\ \hline 4774 \end{array}$$

Sooritasin tehet 2 korda

Ketid erinevate pikkustega

- Kui valida 196?

196, 295, 394, 493 ... nn Lychreli arvu kandidaadid —

nende arvude korral pole palindroomi veel õnnestunud saada

ÜLESANDEID

ÜI 5: Aastate järel kohtuvad kaks koolivenda.

Esimene: *Ma mäletan, et Sul on kolm last. Kui vanad nad on?*

Teine: *Mõttele välja! Laste vanuste korrutis on 36 ja summa on võrdne selle maja numbriga, mille ees me seisame.*

Esimene: *Nendest andmetest küll ei piisa.*

Teine: *Lisan siis, et kõige vanem lastest on punapea. Kas nüüd piisab andmetest?*

ÜL 5 LAHENDUS (LASTE VANUSTE KORRUTIS ON 36 JA SUMMA ON VÕRDNE SELLE MAJA NUMBRIGA, MILLE EES ME SEISAME. LISAN, ET KÕIGE VANEM LASTEST ON PUNAPEA.):

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z = 36 \\ x + y + z = ? \end{cases}$$

Tundub avatud ülesandena.

Tegelikult üheselt lahenduv.

Vaatame läbi kõikvõimalikud võimalused

Millised saavad üldse laste vanused olla?

$$36 = 1 \cdot 1 \cdot 36$$

$$1 \cdot 2 \cdot 18$$

$$1 \cdot 3 \cdot 12$$

$$1 \cdot 4 \cdot 9$$

$$1 \cdot 6 \cdot 6$$

$$2 \cdot 2 \cdot 9$$

$$2 \cdot 3 \cdot 6$$

$$3 \cdot 3 \cdot 4$$

Vanuste summa:

$$1+1+36=38$$

$$21$$

$$16$$

$$14$$

$$13$$

$$13$$

$$11$$

$$10$$

Vastus: Lapsed olid 2-aastased kaksikud ja 9-aastane punapea.

NÄITEID AVATUD ÜLESANNETEST

- ✘ 1. Probleemide ring A8: Mitmel erineval viisil on antud naturaalarvu võimalik esitada nullist erinevate järjestikuste naturaalarvude summana?
- ✘ 2. Kaasik-Cibulskaite. Matemaatika V kl ül 913: Pealt kollaseks värvitud kuup saetakse väiksemateks kuupideks: kõigepealt $2 \times 2 \times 2$, siis $3 \times 3 \times 3$ kuubiks jne. Kui palju tekib värvitud tahuga, kui palju värvimata tahkudega kuupe?
- ✘ 3. Telgmaa-Nurk. Matemaatika VI kl ül 514: Paberile on märgitud 6 punkti nii, et ükski kolm punkti ei asetse ühel sirgel. Läbi iga kahe punkti on joonestatud sirge. Mitu sirget on joonisel?
- ✘ 4. Maagilised kujundid ja nende omadused.