Algebra I

Näited eukleidilise ruumi kohta käivatest ülesannetest.

Ülesanne 3. Leida kolmnurga abc külgede pikkused ja sisenurgad eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^5$, kui

a) $a = (2, 4, 2, 4, 2)$, $b = (6, 4, 4, 4, 6)$, $c = (5, 7, 5, 7, 2)$.

Lahendus: Leiame külgede ab, bc ja ac koordinaadid: $ab = (4, 0, 2, 0, 4)$, $bc = (-1, 3, 1, 3, -4)$ $ac = (3, 3, 3, 3, 0)$. Nende abil on lihtne leida külgede pikkusi:

$$|ab| = \sqrt{< ab, ab >} = \sqrt{4^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6,$$

$$|bc| = \sqrt{< bc, bc >} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6,$$

$$|ac| = \sqrt{< ac, ac >} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Kuigi siit on ilmne, et kõik nurgad on $\frac{\pi}{3}$, kontrollime siiski skalaarkorrutamise abil järgi:

$$\cos\angle a = \cos\angle(ab, ac) = \frac{< ab, ac >}{|ab| \cdot |ac|} = \frac{12 + 0 + 6 + 0 + 0}{6 \cdot 6} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\angle b = \cos\angle(ba, bc) = \frac{< ba, bc >}{|ba| \cdot |bc|} = \frac{4 + 0 - 2 + 0 + 16}{6 \cdot 6} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\angle c = \cos\angle(cb, ca) = \frac{< cb, ca >}{|cb| \cdot |ca|} = \frac{-3 + 9 + 3 + 9 + 0}{6 \cdot 6} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Vastus: Kolmnurha abc küljed on kõik pikkusega 6 ja sisenurgad on kõik $\frac{\pi}{3}$ radiaani.

Ülesanne 5. Olgu $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ vektorruumi $\mathbb{R}^2$ suvalised vektorid. Näidata, et sellel vektorruumil võib skalaarkorrutamise defineerida võrdusega

a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$.

Lahendus: Meil on vaja kontrollida aksioome

$$1. < x, y >=< y, x >,$$

$$2. < x + y, z >=< x, z > + < y, z >,$$

$$3. < kx, y >= k < x, y >,$$

$$4. < x, x > \quad > 0, \text{ kui } x \neq 0$$

iga $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$ jaoks. Olgu $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $<= (z_1, z_2)$ ja $k \in \mathbb{R}$. Arvutame:

$$1. : < x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 =< y, x >,$$

$$\begin{aligned} 2. : < x + y, z > &= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 = x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 \\ &= x_1z_1 + x_2z_2 + y_1z_1 + y_2z_2 =< x, z > + < y, z >, \end{aligned}$$

$$3. : < kx, y >= (kx_1)y_1 + (kx_2)y_2 = k(x_1y_1 + x_2y_2) = k < x, y >,$$

$$4. : < x, x >= x_1^2 + x_2^2 > 0, \text{ kui } x \neq 0 = (0, 0).$$

Ülesanne 9. Tõestada, et kui eukleidilise ruumi vektor on ortogonaalne vektoritega $a_1, \ldots, a_m$, siis on ta ortogonaalne ka kõigi lineaarkombinatsioonidega $k_1a_1 + \ldots + k_ma_m$.

Lahendus: Ortogonaalsus tähendab, et vektorite skalaarkorrutis on null. Seega eeldame, et vektori b jaoks $< b, a_i >= 0$ iga $i = 1, \ldots, m$ korral. Olgu $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$. Leiame

$$\begin{aligned} < b, k_1a_1 + \ldots + k_ma_m > &= < b, k_1a_1 > + < b, k_2a_2 + \ldots + k_ma_m > \\ &= k < b, a_1 > + < b, k_2a_2 + \ldots + k_ma_m > \\ &= \ldots \\ &= k_1 < b, a_1 > +k_2 < b, a_2 > + \ldots + k_m < b, a_m > \\ &= k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + \ldots + k_m \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

See aga tähendabki, et vektor b ja vektor $k_1a_1 + \ldots + k_ma_m$ on ortogonaalsed.

Vastus:

Ülesanne 13. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, konstrueerida vektorite $a_1, \ldots, a_m$ lineaarkatte ortogonaalne baas:

a) $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (1, 1, -5, 3)$, $a_3 = (3, 2, 8, -7)$.

Lahendus: Kuna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 23 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} = -30 \neq 0,$$

on antud vektorid lineaarselt sõltumatud ja nad on oma lineaarkatte baasiks.

Seega peame vaid rakendama Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi vektoritele a_1, a_2 ja a_3. Selleks võtame $b_1 = a_1 = (1, 2, 2, -1)$ ja $b_2 = kb_1 + a_2$ selliselt, et $< b_1, b_2 >= 0$. Viimasest saame, et

$$k = -\frac{< a_1, a_2 >}{< a_1, a_1 >}.$$

Leiame

$$k = -\frac{< a_1, a_2 >}{< a_1, a_1 >} = -\frac{1 + 2 - 10 - 3}{1 + 4 + 4 + 1} = 1.$$

Seega $b_2 = a_1 + a_2 = (2, 3, -3, 2)$. Järgmise sammuna võtame $b_3 = k_1 b_1 + k_2 b_2 + a_3$ selliselt, et $< b_1, b_2 >=< b_2, b_3 >= 0$. Siit saame analoogiliselt, et

$$k_1 = -\frac{< a_1, a_3 >}{< a_1, a_1 >}$$

ja

$$k_2 = -\frac{< b_2, a_3 >}{< b_2, b_2 >}.$$

Leiame need arvud:

$$k_1 = -\frac{< a_1, a_3 >}{< a_1, a_1 >} = -\frac{3 + 4 + 16 + 7}{10} = -\frac{30}{10} = -3,$$

$$k_2 = -\frac{< b_2, a_3 >}{< b_2, b_2 >} = -\frac{6 + 6 - 24 - 14}{4 + 9 + 9 + 4} = -\frac{-26}{26} = 1.$$

Järelikult $b_3 = -3a_1 + b_2 + a_3 = (2, -1, -1, -2)$.

Kontroll: $< b_1, b_2 >= 2 + 6 - 6 - 2 = 0$, $< b_1, b_3 >= 2 - 2 - 2 + 2 = 0$, $< b_2, b_3 >= 4 - 3 + 3 - 4 = 0$.

Vastus: Vektorite a_1, a_2 ja a_3 lineaarkatte ortogonaalne baas on $b_1 = (1, 2, 2, -1)$, $b_2 = (2, 3, -3, 2)$ ja $b_3 = (2, -1, -1, -2)$-

Ülesanne 16. Leida ortogonaalse täiendi $L^\perp$ ortogonaalne baas, kui $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ja

a) $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $a_3 = (0, 1, -2, 1)$.

Lahendus: Ei ole raske näha, et $a_3 = a_2 - 2a_1$, aga a_1 ja a_2 on lineaarselt sõltumatud (nt $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$). L ortogonaalse täiendi mõõde on seega $4 - 2 = 2$ ja meil on sisuliselt vaja leida kaks lineaarselt sõltumatut vektorit, mis on ortogonaalsed nt vektoritega a_1 ja a_3. Selleks lahendame lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z + 1 \cdot u = 0 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 \cdot z + 1 \cdot u = 0. \end{cases}$$

Lahendiks on siin $x = -2c_1 - c_2$, $y = 2c_1 - c_2$, $z = c_1$, $u = c_2$. Meil on tegelikult vaja lahendite fundamentaalsüsteemi, milleks võib võtta nt $(0, 4, 1, -2)$ ja $(1, 1, 0, -1)$.

Kontroll: $< (0, 4, 1, -2), (1, 0, 2, 1) >= 2-2 = 0$, $< (0, 4, 1, -2), (2, 1, 2, 3) >= 4-2-6 = 0$, $< (0, 4, 1, -2), (0, 1, -2, 1) >= 4-2-2 = 0$, $< (1, 1, 0, -1), (1, 0, 2, 1) >= 1-1 = 0$, $< (1, 1, 0, -1), (2, 1, 2, 3) >= 2+1-3 = 0$ ja $< (1, 1, 0, -1), (0, 1, -2, 1) >= 1 - 1 = 0$.

Vastus: Ortogonaalse täiendi $L^\perp$ ortogonaalne baas on näiteks $\{(0, 4, 1, -2), (1, 1, 0, -1)\}$.