Algebra I
13. praktikumi näidislahendused

Ülesanne 1. Leida skalaarkorrutis $\langle a, b\rangle$, kui a ja b on antud koordinaatidega ortonormeeritud baasi suhtes:

a) $a = (1, 2, 1, -1), b = (-2, 1, 1, 1)$; b) $a = (1, 1, 1, 1), b = (1, 1, 3, -5)$.

Lahendus: Olgu $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormeeritud baas, $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$ ja $b = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i e_i$. Siis

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, b_j e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle b_j e_j, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle b_j e_j, a_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\langle b_j e_j, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\langle e_i, b_j e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_j a_i\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.
\end{aligned}$$

Seega

$$\langle (1, 2, 1, -1), (-2, 1, 1, 1)\rangle = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$$

ja

$$\langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, 3, -5)\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 0.$$

Vastus: Mõlemal korral on skalaarkorrutis null, st vektorid a ja b on ortogonaalsed.

Ülesanne 9. Tõestada, et kui eukleidilise ruumi vektor on ortogonaalne vektoritega $a_1, \dots, a_m$, siis on ta ortogonaalne ka kõigi lineaarkombinatsioonidega $k_1 a_1 + \dots + k_m a_m$.

Lahendus: Ortogonaalsus tähendab, et vektorite skalaarkorrutis on null. Seega eeldame, et vektori b jaoks $< b, a_i >= 0$ iga $i = 1, \dots, m$ korral. Olgu $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$. Leiame

$$\begin{aligned}
< b, k_1 a_1 + \dots + k_m a_m > &= < b, k_1 a_1 > + < b, k_2 a_2 + \dots + k_m a_m > \\
&= k < b, a_1 > + < b, k_2 a_2 + \dots + k_m a_m > \\
&= \dots \\
&= k_1 < b, a_1 > + k_2 < b, a_2 > + \dots + k_m < b, a_m > \\
&= k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + \dots + k_m \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

See aga tähendabki, et vektor b ja vektor $k_1 a_1 + \dots + k_m a_m$ on ortogonaalsed.

Ülesanne 11. Veenduda, et vektorid $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ on ortogonaalsed ning täiendada süsteem a_1, a_2 ortogonaalseks baasiks:

b) $a_1 = (1, -2, 1, 3)$, $a_2 = (2, 1, -3, 1)$.

Lahendus: Kuna kanooniline baas on ortogonaalne, siis

$$\langle (1, -2, 1, 3), (2, 1, -3, 1) \rangle = 2 - 2 - 3 + 3 = 0.$$

Seega $a_1 \perp a_2$.

Esmalt täiendame süsteemi a_1, a_2 baasiks. Lihtsuse mõttes teisendame selleks neist vekoritest moodustatud maatriksit (st muudame nende lineaarkatte baasi lihtsamale kujule):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Siit näeme, et me võime võtta $a_3 = (0, 0, 1, 0)$ ja $a_4 = (0, 0, 0, 1)$, sest siis jääb vektoritest a_1, a_2, a_3, a_4 moodustatud determinant nullist erinevaks.

Nüüd rakendame Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi vektoritele a_1, a_2, a_3 ja a_4. Selleks võtame $b_1 = a_1 = (1, -2, 1, 3)$ ja kuna $a_1 \perp a_2$, siis võime võtta ka $b_2 = a_2 = (2, 1, -3, 1)$ (kui protsess läbi teha, tuleb sama välja). Nüüd otsime

$$b_3 = kb_1 + lb_2 + a_3$$

selliselt, et $< b_1, b_3 >=< b_2, b_3 >= 0$. Siit saame, et

$$k = -\frac{< b_1, a_3 >}{< b_1, b_1 >}$$

ja

$$l = -\frac{< b_2, a_3 >}{< b_2, b_2 >}.$$

Leiame

$$k = -\frac{< b_1, a_3 >}{< b_1, b_1 >} = -\frac{0 + 0 + 1 + 0}{1 + 4 + 1 + 9} = -\frac{1}{15}$$

ja

$$l = -\frac{< b_2, a_3 >}{< b_2, b_2 >} = -\frac{0 + 0 + (-3) + 0}{4 + 1 + 9 + 1} = \frac{1}{5}.$$

Seega

$$\begin{aligned} b_3 &= -\frac{1}{15}b_1 + \frac{1}{5}b_2 + a_3 = -\frac{1}{15}(1, -2, 1, 3) + \frac{1}{5}(2, 1, -3, 1) + (0, 0, 1, 0) \\ &= \frac{1}{15}(-1 + 6 + 0, 2 + 3 + 0, -1 - 9 + 15, -3 + 3 + 0) = \frac{1}{15}(5, 5, 5, 0). \end{aligned}$$

Kuna meil on vaja ortogonaalsust, siis saame vahetulemusi nullist erineva arvuga läbi korrutada ja antud juhul võtta $b_3' = (1, 1, 1, 0)$.

Meenutus:

$$b_1 = (1, -2, 1, 3), b_2 = (2, 1, -3, 1), b_3' = (1, 1, 1, 0) \text{ ja } a_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Järgmise sammuna otsime

$$b_4 = kb_1 + lb_2 + mb_3' + a_4$$

selliselt, et $< b_1, b_4 >=< b_2, b_4 >=< b_3', b_4 >= 0$. Analoogiliselt saame, et

$$k = -\frac{< b_1, a_4 >}{< b_1, b_1 >},$$

$$l = -\frac{< b_2, a_4 >}{< b_2, b_2 >}$$

ja

$$m = -\frac{< b_3', a_4 >}{< b_3', b_3' >}.$$

Leiame need arvud:

$$k = -\frac{< b_1, a_4 >}{< b_1, b_1 >} = -\frac{0+0+0+3}{1+4+1+9} = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5},$$

$$l = -\frac{< b_2, a_4 >}{< b_2, b_2 >} = -\frac{0+0+0+1}{4+1+9+1} = -\frac{1}{15} = -\frac{1}{15},$$

$$m = -\frac{< b_3', a_4 >}{< b_3', b_3' >} = -\frac{0}{1+1+1+0} = 0.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} b_4 &= kb_1 + lb_2 + mb_3' + a_4 = -\frac{1}{5}(1, -2, 1, 3) - \frac{1}{15}(2, 1, -3, 1) + 0 + (0, 0, 0, 1) \\ &= \frac{1}{15}(-3-2+0+0, 6-1+0+0, -3+3+0+0, -9-1+0+15) \\ &= \frac{1}{15}(-5, 5, 0, 5). \end{aligned}$$

Muudame jälle tulemust pööratava elemendi võrra ja võtame $b_4' = (1, -1, 0, -1)$.

Kontroll: $< b_1, b_2 >= 2-2-3+3 = 0$, $< b_1, b_3' >= 1-2+1+0 = 0$,
$< b_1, b_4' >= 1+2+0-3 = 0$, $< b_2, b_3' >= 2+1-3+0 = 0$,
$< b_2', b_4' >= 2-1+0-1 = 0$, $< b_3', b_4' >= 1-1+0+0 = 0$.

Vastus: Vektoreid a_1 ja a_2 sisaldav vektorruumi $\mathbb{R}^4$ ortogonaalne baas on $\{(1, -2, 1, 3), (2, 1, -3, 1), (1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, -1)\}$.

Ülesanne 13. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, konstrueerida vektorite $a_1, \dots, a_m$ lineaarkatte ortogonaalne baas:

b) $a_1 = (2, 1, 3, -1)$, $a_2 = (7, 4, 3, -3)$, $a_3 = (1, 1, -6, 0)$, $a_4 = (6, 7, 7, 8)$.

Lahendus: Uurime Gaussi meetodi abil, kas moodustajate süsteemis a_1, a_2, a_3, a_4 on lineaarselt sõltuvaid vektoreid:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 6 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 11 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 15 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & -1 \\ 0 & 0 & 58 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seega on üks lineaarselt sõltuv vektor ja me võime span $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ baasiks võtta näiteks $a_1' = (2, 1, 3, -1)$, $a_2' = (1, 1, -6, 0)$ ja $a_3' = (0, 0, 58, 7)$.

Nüüd peame rakendama Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi vektoritele a_1', a_2' ja a_3'. Selleks võtame $b_1 = a_1' = (2, 1, 3, -1)$ ja $b_2 = kb_1 + a_2'$ selliselt, et $< b_1, b_2 >= 0$. Jälle

$$k = -\frac{< b_1, a_2' >}{< b_1, b_1 >} = -\frac{2 + 1 - 18 + 0}{4 + 1 + 9 + 1} = -\frac{-15}{15} = 1.$$

Seega $b_2 = b_1 + a_2' = (3, 2, -3, -1)$. Järgmise sammuna võtame $b_3 = kb_1 + lb_2 + a_3'$ selliselt, et $< b_1, b_2 >=< b_2, b_3 >= 0$. Leiame kordajad:

$$k = -\frac{< b_1, a_3' >}{< b_1, b_1 >} = -\frac{0 + 0 + 174 - 7}{15} = -\frac{167}{15},$$

$$l = -\frac{< b_2, a_3' >}{< b_2, b_2 >} = -\frac{-174 - 7}{9 + 4 + 9 + 1} = \frac{181}{23}.$$

$$\begin{aligned} b_3 &= kb_1 + lb_2 + a_3' = -\frac{167}{15}(2, 1, 3, -1) + \frac{181}{23}(3, 2, -3, -1) + (0, 0, 58, 7) \\ &= \frac{1}{23 \cdot 15}(-2 \cdot 167 \cdot 23 + 3 \cdot 181 \cdot 15 + 0, -1 \cdot 167 \cdot 23 + 2 \cdot 181 \cdot 15 + 0, \\ &\quad -3 \cdot 167 \cdot 23 - 3 \cdot 181 \cdot 15 + 58 \cdot 15 \cdot 23, 1 \cdot 167 \cdot 23 - 1 \cdot 181 \cdot 15 + 7 \cdot 15 \cdot 23) \\ &= \frac{1}{345}(463, 1589, 342, 3541). \end{aligned}$$

Võtame jälle $b_3' = (463, 1589, 342, 3541)$.

Kontroll: $< b_1, b_2 >= 6 + 2 - 9 + 1 = 0$, $< b_1, b_3' >= 2 \cdot 463 + 1589 + 3 \cdot 342 - 3541 = 0$, $< b_2, b_3' >= 3 \cdot 463 + 2 \cdot 1589 - 3 \cdot 342 - 3541 = 0$.

Vastus: Vektorite a_1, a_2, a_3 ja a_4 lineaarkatte ortogonaalne baas on $(2, 1, 3, -1)$, $(3, 2, -3, -1)$ ja $b_3 = (463, 1589, 342, 3541)$.

Ülesanne 14. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, leida ortonormeeritud baas vektorruumis $\mathbb{R}_2[x]$, võttes esialgseks baasiks $1, x, x^2$ ja kasutades skalaarkorrutamist, mis on defineeritud võrdusega

a) $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

Lahendus: Lihtsalt rakendame ortogonaliseerimisprotsessi baasile $1, x, x^2$. Esimene vektor b_1 on ikka 1. Võtame $b_2 = k \cdot 1 + x$. Jällegi,

$$k = -\frac{< 1, x >}{< 1, 1 >} = -\frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} = -\frac{\frac{x^2}{2}|_{-1}^{1}}{x|_{-1}^{1}} = -\frac{0}{2} = 0.$$

Järelikult teine vektor on x. Nüüd on meil vaja $b_3 = k \cdot 1 + l \cdot x + x^2$, kus

$$k = -\frac{< 1, x^2 >}{< 1, 1 >} = -\frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} = -\frac{\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1}}{x|_{-1}^{1}} = -\frac{\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$

ja

$$l = -\frac{< x, x^2 >}{< x, x >} = -\frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = -\frac{\frac{x^4}{4}|_{-1}^{1}}{\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1}} = -\frac{0}{\frac{2}{3}} = 0.$$

Seega $b_3 = x^2 - \frac{1}{3}$.

Kontroll: $< b_1, b_2 >= \int_{-1}^{1} x dx = 0$, $< b_1, b_3 >= \int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})dx = \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = 0$, $< b_2, b_3 >= \int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})x dx = 0$.

Me nägime, et $|1|^2 = 2$ ja $|x|^2 = \frac{2}{3}$. Kuna

$$|x^2 - \frac{1}{3}|^2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = \int_{-1}^{1} [x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}]dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x}{9}]|_{-1}^{1} = \frac{8}{45},$$

siis vektorite pikkustega ehk nende arvude ruutjuurtega vektoreid b_1, b_2, b_3 läbi jagades saamegi otsitava baasi.

Vastus: Ortogonaliseerimisprotsessi abil saame järgmise ortonormaalse baasi ruumis $\mathbb{R}_2[x]$: $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}$ ja $\frac{\sqrt{45}(x^2 - \frac{1}{3})}{\sqrt{8}}$

Ülesanne 17. Leida ortogonaalse täiendi $L^\perp$ ortogonaalne baas, kui $L = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ja

b) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (-1,1,-1,1)$, $a_3 = (2,0,2,0)$.

Lahendus: Ei ole raske näha, et $a_3 = a_1 - a_2$, aga a_1 ja a_2 on lineaarselt sõltumatud (nt $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$). L ortogonaalse täiendi mõõde on seega $4 - 2 = 2$ ja meil on vaja leida kaks lineaarselt sõltumatut vektorit, mis on ortogonaalsed nt vektoritega a_1 ja a_2. Selleks lahendame lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z + 1\cdot u = 0 \\ -1\cdot x + 1\cdot y - 1\cdot z + 1\cdot u = 0. \end{cases}$$

Lahendiks on siin $x = c$, $y = d$, $z = -c$, $u = -d$. Meil on tegelikult vaja lahendite fundamentaalsüsteemi, milleks võib võtta nt $(1,0,-1,0)$ ja $(0,1,0,-1)$.

Kontroll:
$$\begin{aligned}
&< (1,0,-1,0),(1,1,1,1) >= 1-1 = 0,\\
&< (1,0,-1,0),(-1,1,-1,1) >= -1+1 = 0,\\
&< (1,0,-1,0),(2,0,2,0) >= 2-2 = 0,\\
&< (0,1,0,-1),(1,1,1,1) >= 1-1 = 0,\\
&< (0,1,0,-1),(-1,1,-1,1) >= 1-1 = 0,\\
&< (0,1,0,-1),(2,0,2,0) >= 0.
\end{aligned}$$

Vastus: Ortogonaalse täiendi $L^\perp$ ortogonaalne baas on näiteks $\{$(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)$\}$.

Ülesanne 19. Leida vektori a ortogonaalne projektsioon ja ortogonaalne täiend, kui

a) $a = (4, -1, -3, 4)$ ja $L = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}$.

Lahendus: Vaatame, kas meil on lineaarkattes ülearuseid moodustajaid:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jätame ühe neist välja ja ortogonaliseerime saadava L baasi: Esmalt $b_1 = a_1 = (1, 0, 0, 3)$ ja

$$b_2 = -\frac{-6}{10}(1, 0, 0, 3) + (0, 1, 1, -2) = \frac{1}{5}(3+0, 0+5, 0+5, 9-10) = \frac{1}{5}(3, 5, 5, -1).$$

Olgu $b_2' = (3, 5, 5, -1)$.

Kontroll: $< b_1, b_2' >= 3 + 0 + 0 - 3 = 0$.

Nüüd vektori a projektsioon alamruumile L on

$$\begin{aligned} c &= \langle a, \frac{b_1}{|b_1|}\rangle \cdot \frac{b_1}{|b_1|} + \langle a, \frac{b_2'}{|b_2'|}\rangle \cdot \frac{b_2'}{|b_2'|} \\ &= \frac{\langle (4, -1, -3, 4), (1, 0, 0, 3)\rangle}{\langle (1, 0, 0, 3), (1, 0, 0, 3)\rangle}(1, 0, 0, 3) \\ &+ \frac{\langle (4, -1, -3, 4), (3, 5, 5, -1)\rangle}{\langle (3, 5, 5, -1), (3, 5, 5, -1)\rangle}\rangle(3, 5, 5, -1) \\ &= \frac{16}{10}(1, 0, 0, 3) + \frac{-12}{60}(3, 5, 5, -1) = \frac{1}{5}(8 - 3, 0 - 5, 0 - 5, 24 + 1) = (1, -1, -1, 5) \end{aligned}$$

ja ortogonaalne täiend on $a - c = (3, 0, -2, -1)$.

Kontroll: $\langle (3, 0, -2, -1), (1, 1, 1, 1)\rangle = 3-2-1 = 0$, $\langle (3, 0, -2, -1), (1, 2, 2, -1)\rangle = 3 - 4 + 1 = 0$, $\langle (3, 0, -2, -1), (1, 0, 0, 3)\rangle = 3 - 3 = 0$.

Vastus: Vektori $(4, -1, -3, 4)$ projektsioon alamruumile L on $(1, -1, -1, 5)$ ja ortogonaalne täiend on $(3, 0, -2, -1)$.

Ülesanne 20. Olgu L neljamõõtmelise vektorruumi (üle $\mathbb{R}$) alamruum, mis on mingi ortonormeeritud baasi suhtes antud lineaarvõrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Leida sama baasi suhtes lineaarvõrrandisüsteem, mis määrab $L^{\perp}$.

Lahendus: Kõigepealt uurime, kas selles lineaarvõrrandisüsteemis on ülearuseid võrrandeid:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antud võrrandisüsteem kirjeldab kõik vektoritega $(1,0,6,0)$ ja $(0,1,-9,-1)$ ortogonaalsed vektorid ehk $L = (\operatorname{span}\{(1,0,6,0),(0,1,-9,-1)\})^{\perp}$. Järelikult on meil vaja $L^{\perp} = \operatorname{span}\{(1,0,6,0),(0,1,-9,-1)\}$ jaoks lineaarvõrrandisüsteemi. Selle kordajateks sobivad algse võrrandisüsteemi lahendite fundamentaalsüsteemi vektorite koordinaadid, milleks on näiteks $(0,1,0,1)$ ja $(-6,9,1,0)$. Kontroll näitab, et $\{(1,0,6,0),(0,1,-9,-1)\} \perp \{(0,1,0,1),(-6,9,1,0)\}$.

Vastus: Otsitav lineaarvõrrandisüsteem on näiteks

$$\begin{cases} + x_2 + x_4 = 0 \\ -6x_1 + 9x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$