Algebra I

Näited lineaarteisendustega seotud ülesannetest.

Ülesanne 1. Olgu tasandil fikseeritud parema käe ristreeper $\{O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$. Teha kindlaks, kas tasandi pööre nurga α võrra ümber koordinaatide alguspunkti O on tasandi vabavektorite vektorruumi lineaarteisendus. Kui on, siis leida selle teisenduse maatriks baasi $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$ suhtes.

Lahendus: Olgu $\varphi(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{x}$ ja $\varphi(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{y}$. Siit

$$\langle \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{x} \rangle = |\overrightarrow{e}_1| \cdot |\overrightarrow{x}| \cdot \cos \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{x}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{x} \rangle &= |\overrightarrow{e}_2| \cdot |\overrightarrow{x}| \cdot \cos \angle(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{x}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \angle(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_1) + \angle(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{x})) \\ &= \cos -\frac{\pi}{2} \cdot \cos \alpha - \sin -\frac{\pi}{2} \cdot \sin \alpha = 0 + \sin \alpha,\end{aligned}$$

$$\langle \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{y} \rangle = |\overrightarrow{e}_2| \cdot |\overrightarrow{y}| \cdot \cos \angle(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{y}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha$$

ja

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{y} \rangle &= |\overrightarrow{e}_1| \cdot |\overrightarrow{y}| \cdot \cos \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{y}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \angle(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) + \angle(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{y})) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \alpha = 0 - \sin \alpha.\end{aligned}$$

Seega

$$\varphi(\overrightarrow{x}) = \varphi(x_1 \cdot \overrightarrow{e}_1 + x_2 \cdot \overrightarrow{e}_2) = (x_1 \cdot \cos \alpha - x_2 \sin \alpha) \overrightarrow{e}_1 + (x_1 \cdot \sin \alpha + x_2 \cos \alpha) \overrightarrow{e}_1.$$

Seetõttu

$$\begin{aligned}\varphi(\overrightarrow{x}) + \varphi(\overrightarrow{y}) &= (x_1 \cdot \cos \alpha - x_2 \sin \alpha) \overrightarrow{e}_1 + (x_1 \cdot \sin \alpha + x_2 \cos \alpha) \overrightarrow{e}_1 \\ &+ (y_1 \cdot \cos \alpha - y_2 \sin \alpha) \overrightarrow{e}_1 + (y_1 \cdot \sin \alpha + y_2 \cos \alpha) \overrightarrow{e}_1 \\ &= ((x_1 + y_1) \cdot \cos \alpha - (x_2 + y_2) \sin \alpha) \overrightarrow{e}_1 \\ &+ ((x_1 + y_1) \cdot \sin \alpha + (x_2 + y_2) \cos \alpha) \overrightarrow{e}_1 \\ &= \varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(k \cdot \overrightarrow{x}) &= (kx_1 \cdot \cos \alpha - kx_2 \sin \alpha) \overrightarrow{e}_1 + (kx_1 \cdot \sin \alpha + kx_2 \cos \alpha) \overrightarrow{e}_1 \\ &= k((x_1 \cdot \cos \alpha - x_2 \sin \alpha) \overrightarrow{e}_1 + (x_1 \cdot \sin \alpha + x_2 \cos \alpha) \overrightarrow{e}_1) = k\varphi(\overrightarrow{x}).\end{aligned}$$

Seega on φ lineaarteisendus, ja eelneva põhjal on selle maatriksiks

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

kus i. veeru moodustavad i. baasivektori $\overrightarrow{e}_i$ kujutise $\varphi(\overrightarrow{e}_i)$ koordinaadid baasil $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$.

Ülesanne 2. Leida vektorruumi $\{k \sin x + l \cos x | k, l \in \mathbb{R}\}$ diferentseerimisteisenduse maatriks baasi $\sin x, \cos x$ suhtes.

Lahendus: Leiame

$$D(\sin x) = \cos x = 0 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x,$$

$$D(\cos x) = -\sin x = -1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x.$$

Vastus: Diferentseerimisteisenduse maatriks baasi $\sin x, \cos x$ suhtes on

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 3. Teha kindlaks, millised vektorruumi $\mathbb{R}^3$ teisendused φ on lineaarteisendused, kui $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ korral

1) $\varphi(x) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;

2) $\varphi(x) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$;

3) $\varphi(x) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$;

4) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$;

5) $\varphi(x) = (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;

6) $\varphi(x) = (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$;

7) $\varphi(x) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

Lahendus: Kuna $\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0)$, siis $\varphi(0) = 0$, kui φ on lineaarteisendus. Seega ilmselt variandid 2) ja 5), kus $\varphi(0, 0, 0) = (0, 1, 2)$ ja $\varphi(0, 0, 0) = (2, 5, 0)$, ei ole lineaarteisendused. Samas

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= ((x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), 2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), 3(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)) \\ &= (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) + (y_2 + y_3, 2y_1 + y_3, 3y_1 - y_2 + y_3) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

Samuti

$$k\varphi(x) = k(x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) = (kx_2 + kx_3, 2kx_1 + kx_3, 3kx_1 - kx_2 + kx_3) = \varphi(kx).$$

Järelikult on 1) variandi teisendus lineaarteisendus. Analoogiliselt on kontrollitav, et 4) ja 7) variant annavad lineaarteisenduse. Kuid

$$\begin{aligned} \varphi(0, 0, 2) + \varphi(0, 0, 2) &= (2 \cdot 0 + 0, 0 + 2, 2^2) + (2 \cdot 0 + 0, 0 + 2, 2^2) \\ &= (0, 2, 4) + (0, 2, 4) = (0, 4, 8) \\ &\neq (0, 4, 16) = (2 \cdot 0 + 0, 0 + 4, 4^2) \\ &= \varphi(0, 0, 4) = \varphi((0, 0, 2) + (0, 0, 2)) \end{aligned}$$

Seega 3) variant ei ole lineaarteisendus. Analoogiliselt võib veenduda, et ka 6) variant on mittelineaarne.

Vastus: Lineaarteisendused on 1), 4) ja 7) variandi teisendused.

Ülesanne 4. Lineaarteisenduse maatriks baasil $e_1 = (8, -6, 7)$, $e_2 = (-16, 7, -13)$, $e_3 = (9, -3, 7)$ on $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Leida selle teisenduse maatriks baasi $e'_1 = (1, -2, 1)$, $e'_2 = (3, -1, 2)$, $e'_3 = (2, 1, 2)$ suhtes.

Lahendus: Esiteks leiame üleminekumaatriksi baasilt e baasile e'. Selleks tuleb lahendada lineaarvõrrandisüsteemid

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 8x_1 & - & 16x_2 & + & 9x_3 & = & 1 \\ -6x_1 & + & 7x_2 & - & 3_3 & = & -2 \\ 7x_1 & + & -13x_2 & + & 7x_3 & = & 1; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 8x_1 & - & 16x_2 & + & 9x_3 & = & 3 \\ -6x_1 & + & 7x_2 & - & 3_3 & -1 & \\ 7x_1 & + & -13x_2 & + & 7x_3 & = & 2; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 8x_1 & - & 16x_2 & + & 9x_3 & = & 2 \\ -6x_1 & + & 7x_2 & - & 3_3 & = & 1 \\ 7x_1 & + & -13x_2 & + & 7x_3 & = & 2. \end{array} \right.$$

Tulemuseks saame maatriksi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. Leiame selle maatriksi pöördmaatriksi, milleks on $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Viimaks arvutame

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 47 & -88 \\ 18 & 44 & -92 \\ 12 & 27 & -59 \end{pmatrix}.$$

Vastus: Selle lineaarteisenduse maatriks baasil e' on $\begin{pmatrix} 16 & 47 & -88 \\ 18 & 44 & -92 \\ 12 & 27 & -59 \end{pmatrix}$.

Ülesanne 5. Tõestada, et kui maatriksid $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ on sarnased, siis on sarnased ka maatriksid 1) A^2 ja B^2; 2) A^k ja B^k, $k \in \mathbb{N}$; $f(A)$ ja $f(B)$, kus $f \in K[x]$.

Lahendus: Eelduse kohaselt leidub maatriks C selliselt, et $B = C^{-1}AC$. Esiteks

$$B^k = C^{-1}ACC^{-1}AC \cdots C^{-1}AC = C^{-1}A^kC$$

ja järelikult on maatriksid A^k ja B^k, $k \in \mathbb{N}$ alati sarnased. Teisalt, kuna $B^k = C^{-1}A^kC$ ja $B^l = C^{-1}A^lC$, siis ka

$$C^{-1}(mA^k + nA^l)C = m(C^{-1}A^kC) + n(c^{-1}A^lC) = mB^k + nB^l.$$

Seega kandub sarnasus sama maatriksi C abil üle ka liitmisele, ja järelikult

$$\begin{aligned} C^{-1}f(A)C &= C^{-1}(a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_k)C \\ &= C^{-1}a_0A^kC + C^{-1}a_1A^{k-1}C + \ldots + C^{-1}a_{k-1}AC + C^{-1}a_kC \\ &= a_0B^k + a_1B^{k-1} + \ldots + a_{k-1}B + a_k = f(B). \end{aligned}$$

Ülesanne 5. Leida vektorruumi $\mathbb{R}_n[x]$ diferentseerimiskujutuse kujutis ja tuum.

Lahendus: Kuna

$$D(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_0x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

ja iga $a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ jaoks

$$D(\frac{1}{n}a_0x^n + \frac{1}{n-1}a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1},$$

siis on $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Jällegi, kuna

$$D(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_0x^{n-2} + \ldots + a_{n-1},$$

siis $D(f(x)) = 0$ parajasti siis, kui $f(x) = c$. Seega $\operatorname{Ker} D = \mathbb{R}_0[x]$.

Vastus: $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $\operatorname{Ker} D = \mathbb{R}_0[x]$.

Ülesanne 6. Leida lineaarteisenduse φ tuuma ja kujutise baas, kui φ maatriks mingi baasi suhtes on a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Lahendus: Olgu e_1, e_2 antud vektorruumi baas, mille suhtes φ maatriks antud on.

Juhul a) ilmselt $\varphi(e_1) = e_1 + e_2, \varphi(e_2) = e_1 + 2e_2 \in \operatorname{Im}\varphi$. Teisalt $0 = k(e_1+e_2)+l(e_1+2e_2) = (k+l)e_1+(k+2l)e_2$ annab meile, et $k = l = 0$. Seega on $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$ ja $\varphi(e_2) = e_1 + 2e_2$ kaks lineaarselt sõltumatut vektorit kahemõõtmelises vektorruumis, mistõttu on need ka sealseks baasiks.

Juhul b) aga $2\cdot\varphi(e_1) = 2\cdot(e_1+3e_2) = 2e_1+6e_2 = \varphi(e_2)$- Järelikult on $\varphi(e_1)$ ja $\varphi(e_2)$ lineaarselt sõltuvad. Teisalt $\varphi(e_1) \neq 0$, seega on temast moodustatud ühevektoriline süsteem lineaarselt sõltumatu ja kujutise baasiks võib võtta $\varphi(e_1) = e_1 + 3e_2$.

Juhul a) kui $\varphi(x) = 0$, siis $\varphi(x_1e_1+x_2e_2) = x_1(e_1+e_2)+x_2(e_1+2e_2) = 0$, kust analoogiliselt $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 0$ ja $x_1 = x_2 = 0$. Seega $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Selles triviaalses vektorruumis, nagu teada, aga baasi ei ole.

Juhul b) aga kui $\varphi(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1(e_1 + 3e_2) + x_2(2e_1 + 6e_2) = 0$, siis $x_1+2x_2 = 0 = 3x_1+6x_2$. Seega $x_1 = -2x_2$ ja tuuma kuuluvad vektorid kujul $k \cdot (e_2 - 2e_1)$, $k \in K$. Sellise alamruumi baasiks võib võtta vektori $e_2 - 2e_1$.

Vastus: a) Kujutise baasiks on $e_1 + e_2, e_1 + 2e_2$, tuumal baas puudub; b) kujutise baasiks on $e_1 + 3e_2$, tuuma baasiks on $e_2 - 2e_1$.