Algebra II, Praktikum III

Homomorfismid ja isomorfismid.

Kristo Väljako

23. veebruar 2021

Ülesanne 1. Tõestage, et kujutus $\psi\colon\ \theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ on homomorfism rühmast $(\mathbb{R};+)$ rühma $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\};\cdot)$. Leidke homomorfismi ψ tuum $\operatorname{Ker}\psi$.

Ülesanne 2. Leida kõik rühma $(\mathbb{Z},+)$ endomorfismid.

Ülesanne 3. Tõestada, et rühm $(\mathbb{Q},+)$ ei ole isomorfne rühmaga $(\mathbb{Q}^+,\cdot)$.

Ülesanne 4. Olgu $f\colon\ G \to G'$ rühmade homomorfism. Tõestada, et $\operatorname{Im} f$ on Abeli rühm parajasti siis, kui $xyx^{-1}y^{-1} \in \operatorname{Ker} f$ iga $x, y \in G$ korral.

Ülesanne 5. Olgu G ja G' rühmad, kusjuures $G \cong G'$. Tõestage, et kui G on Abeli rühm, siis ka G' on Abeli rühm.

Tooge näide rühmadest G ja G', kus G on Abeli rühm, aga G' ei ole, kuid leidub rühmade homomorfism $f\colon\ G \to G'$.

Ülesanne 6. Olgu V_1 ja V_2 vektorruumid üle korpuse K. Defineerida tehted hulgal

$$\operatorname{Hom}(V_1, V_2) := \{f\colon\ V_1 \to V_2 \mid f \text{ on lineaarkujutus}\}$$

nii, et tulemuseks oleks samuti vektorruum üle K.

Ülesanne 7. Olgu R ring ühikelemendiga ε. Tõestada, et kujutus $f\colon\ \mathbb{Z} \to R$, mis on defineeritud võrdusega $f(n) = n\varepsilon$, on ringide homomorfism. Leida ringi $\mathbb{Z}$ kujutus $f(\mathbb{Z}) := \operatorname{Im} f$.

Ülesanne 8. Olgu R_1 ja R_2 ringid ning $\varphi\colon\ R_1 \to R_2$ ringide isomorfism. Tõestada, et $\varphi(0) = 0$ ja $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.

Ülesanne 9. Tõestage, et ringid $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ja

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

on isomorfsed.

Ülesanne 10. Tõestada, et lõplikumõõtmelise vektorruumi iga sürjektiivne lineaarteisendus on selle vektorruumi automorfism. Kas sama väide kehtib ka lõpmatumõõtmelise ruumi korral?

Ülesanne* 11. Tõestada, et iga vähemalt kolmeelemendiline lõplik rühm omab automorfismi, mis ei ole samasusteisendus. Kas sama väide kehtib ka lõpmatute rühmade korral?