

Algebra II, Praktikum IV

Otsekorrutised ja otsesummad.

Kristo Väljako

2. märts 2021

Ülesanne 1. Tõestada, et kompleksarvude multiplikatiivne rühm $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ on positiivsete reaalarvude alamrühma (\mathbb{R}^+, \cdot) ja alamrühma $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ otsekorrutis.

Ülesanne 2. Olgu B Abeli rühma A alamrühm. Tõestada, et selline alamrühm $C \leq A$, et $A = B \dot{+} C$, leidub parajasti siis, kui saab leida niisuguse homomorfismi $f : A \rightarrow B$, et $f(x) = x$ iga $x \in B$ korral

Ülesanne 3. Olgu R kommutatiivne ring, I, I_1 ja I_2 selle ideaalid. Tõestada, et kui $I = I_1 \dot{+} I_2$, siis $I_1 I_2 = \{kh \mid k \in I_1, h \in I_2\} = \{0\}$.

Ülesanne 4. Esitada järgmised ringid pärisideaalide otsesummana (kui võimalik): a) \mathbb{Z}_{10} , b) \mathbb{Z}_{12} , c) \mathbb{Z} .

Ülesanne 5. Tõestada, et \mathbb{C} kui vektorruumi üle iseenda loenduv väline otsesumma $\bigoplus \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}$ ei ole isomorfne otsekorrutisega $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}$.

Ülesanne 6. Tõestada, et n -mõõtmelise vektorruumi V iga alamruumi L_1 jaoks leidub *täiend*, s.t. selline alamruum L_2 , et $V = L_1 \dot{+} L_2$. Kas selline alamruum L_2 on üheselt määratud.

Ülesanne 7. Olgu U ja W vektorruumi V alamruumid ja $U \cap W = \{0\}$. Tõestada, et $(U \dot{+} W)/W \cong U$.

Ülesanne 8. Tõestada, et vektorruum \mathbb{R}^n on alamruumide

$$L_1 := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0\},$$
$$L_2 := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 = a_2 = \dots = a_n\}$$

otsesumma. Leida (baasi)vektorite $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ projektsioonid alamruumile L_1 paralleelselt alamruumiga L_2 ja projektsioonid alamruumile L_2 paralleelselt alamruumiga L_1 .

Ülesanne 9. Tõestada, et n -mõõtmelise vektorruum on ühemõõtmeliste alamruumide $\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle$ otsesumma, kus $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ on selle vektorruumi mistahes baas.

Nimetame lineaarteisenduse $P : V \rightarrow V$ *projektoriks*, kui kehtib $P \circ P = P$.

Ülesanne* 10. Olgu $P_i : V \rightarrow V$ lõplikumõõtmelise vektorruumi V projektorid, kus $i = 1, \dots, n$. Tõestada, et kui $P_i \circ P_j = 0$ iga $i \neq j$ korral, siis $V = \text{Im}(P_1) \dot{+} \dots \dot{+} \text{Im}(P_n) \dot{+} \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(P_i)$. Näidata, et kehtib ka "vastupidine", st kui $\sum_{i=1}^n P_i = 1_V$, siis $P_i \circ P_j = 0$ iga $i \neq j$ korral ja $V = \text{Im}(P_1) \dot{+} \dots \dot{+} \text{Im}(P_n)$