Algebra II, Praktikum IX

Lineaarsed funktsionaalid. Kaasruum

Kristo Väljako

13. aprill 2021

Ülesanne 1. Teha kindlaks, kes φ on lineaarne funktsionaal vektorruumil V üle korpuse K, kui

1. $\varphi((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, kus $V = K^n$ ja $c_1,\dots,c_n \in K$ on fikseeritud;
2. $\varphi((x_1,\dots,x_n)) = 7x_2^3$, kus $K = \mathbb{Z}_3$ ja $V = \mathbb{Z}_3^n$;
3. $\varphi((x_1,\dots,x_n)) = a$, kus $V = K^n$ ja $a \in K\backslash\{0\}$ on fikseeritud;
4. $\varphi(f) = \int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x$, kus $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{C}[a,b]$ (lõigul $[a,b]$ pidevad funktsioonid) ja $g \in \mathcal{C}[a,b]$ on fikseeritud.

Leida ruumil K^n lineaarseteks funktsionaalideks osutunud kujutuste maatriksid baasi $\{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$ suhtes.

Ülesanne 2. Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$. Näidata, et kujutus $\varphi\colon V\times V \to \mathbb{R}$ on bilineaarne funktsionaal ja leida tema maatriks, kui

1. $\varphi(x,y) = 0$;
2. $\varphi(\vec{x},\vec{y}) = \langle \vec{x},\vec{y}\rangle$, kus $V = \mathbb{E}_3$, ja baas on 1) $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, 2) $\{\vec{i}+\vec{j},\vec{j}+\vec{k},2\vec{k}\}$;
3. $\varphi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$, kus $V = \mathbb{R}_2[X]$, ja baas on 1) $\{1,X,X^2\}$, 2) $\{1,X-1,(X-1)^2\}$;
4. $\varphi(z_1,z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)$, kus $V = \mathbb{C}$, ja baas on 1) $\{1,i\}$, 2) $\{1+i,1-i\}$;

Ülesanne 3. Olgu $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Tõestada, et

$$f(A,B) := n\,\mathrm{trace}(AB) - \mathrm{trace}(A)\,\mathrm{trace}(B)$$

on V bilineaarne funktsionaal. Kas f on sümmeetriline funktsionaal?

Ülesanne 4. Olgu V vektorruum üle korpuse K. Tõestada, et kui $\varphi\colon V\times V\to K$ on bilineaarne funktsionaal, siis iga $a\in V$ korral on $\psi\colon V\to K$, $\psi(v) = \varphi(v,a)$ lineaarne funktsionaal.

Ülesanne 5. Olgu f bilineaarne funktsionaal lõplikumõõtmelisel vektorruumil V, kusjuures mistahes $0\neq v\in V$ korral leidub $w\in V$ nii, et $f(v,w)\neq 0$. Tõestada, et iga $g\in V^* = \mathrm{Hom}(V,K)$ jaoks leidub $v\in V$ nii, et $g(w) = f(v,w)$ kõigi $w\in V$ korral.

Bilineaarset funktsionaali $\varphi\colon\ V\times V\to K$ nimetatakse *kaldsümmeetriliseks*, kui iga $x,y\in V$ korral kehtib

$$\varphi(x,y) = -\varphi(y,x).$$

Ülesanne 6. Olgu $V = K^2$, kus K on korpus. Näidata, et kujutus $\varphi\colon\ V\times V\to K$, mis on defineeritud võrdusega

$$\varphi((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

on kaldsümmeetriline bilineaarne funktsionaal. Leida selle funktsionaali maatriks baasi $\{(1,0),(0,1)\}$ suhtes.

Ülesanne 7. Tõestada, et vektorruumi V (üle K) sümmeetriliste ja kaldsümmeetriliste bilineaarsete funktsionaalide hulgad $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{K}$ on $\mathcal{B}$ alamruumid, kus $\mathcal{B}$ on kõigi bilineaarsete funktsionaalide $V\times V\to K$ vektorruum. Millal kehtib $\mathcal{B} = \mathcal{S}\dotplus\mathcal{K}$?

Ülesanne* 8. Tõestada, et kui $A,B\in\mathrm{Mat}_n(K)$ on diagonaliseeritavad ja $AB = BA$, siis leidub $C\in\mathrm{Mat}_n(K)$ nii, et CAC^{-1} ja CBC^{-1} on mõlemad diagonaalmaatriksid. Kas väide kehtib ka juhul, kui $AB\neq BA$?