

Algebra II, Praktikum V

Mitme muutuja polünoomid.

Kristo Väljako

16. märts 2021

Mitme muutuja polünoomi f *pealiikmeks* nimetame tema liiget m_f , mille korral iga teise liikme m korral $\deg(m_f) \geq \deg(m)$ ja $m_f \geq_{\text{lex}} m$. Ilmselt on selline pealiige üheselt määratud.

Ülesanne 1. Jagada polünoom $f = X^7Y^2 + X^3Y^2 - Y + 1$ jäägiga polünoomide paariga $g_1 = XY^2 - X$, $g_2 = X - Y^3$. Jäägiga jagamine tähendab selliste polünoomide q_1, q_2 ja r leidmist, et

$$f = q_1g_1 + q_2g_2 + r,$$

kus kas $r = 0$ või r on üksliikmete “lineaarkombinatsioon” ja g_i pealiikmed ei jaga ühtegi neist üksliikmetest.

Ülesanne 2. Lahendada uuesti eelmine ülesanne:

1. vahetades ära g_1 ja g_2 järjekorra;
2. kasutades “pealiikme” definitsioonis leksikograafilise asemel “kõrgeima astme leksikograafilist” järjestust, nt $Y^2Z < X^3 < Y^2Z^2 < XY^3$.

Ülesanne 3. Tõestada, et kui R on kommutatiivne ühikuga ring, siis

$$R[X_1, \dots, X_k][X_{k+1}, \dots, X_n] \cong R[X_1, \dots, X_n].$$

Ülesanne 4. Olgu $n \in \mathbb{N}$, R ja S kommutatiivsed ühikuga ringid, $s_1, \dots, s_n \in S$ ning $f: R \rightarrow S$ ringide homomorfism. Tõestada, et eval: $R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow S$ on ringide homomorfism, kui $\text{eval}(p) = (f(p))(s_1, \dots, s_n)$. Siin $f(p) \in S[X_1, \dots, X_n]$ on polünoom, mille kordajateks on vastavate p kordajate f -kujutised.

Tähistame sümboliga $\sigma_k = \sigma_k(X_1, \dots, X_n)$ k -astme n -astme sümmeetrilise põhipolünoomi.

Ülesanne 5. Avaldada järgmised sümmeetrilised polünoomid sümmeetriliste põhipolünoomide kaudu:

1. $f(X_1, X_2, X_3) = X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^2$;
2. $f(X_1, X_2, X_3) = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$;
3. $f(X_1, X_2, X_3) = (X_1 - X_2)^2(X_1 - X_3)^2(X_2 - X_3)^2$.

Ülesanne 6. Avaldada avaldis

$$\frac{(X_1 - X_2)^2}{X_1X_2} + \frac{(X_1 - X_3)^2}{X_1X_3} + \frac{(X_2 - X_3)^2}{X_2X_3}$$

sümmeetriliste põhipolünoomide kaudu.

Ülesanne* 7. Tõestada, et iga $k = 1, \dots, n$ ja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ korral

$$\sqrt[k]{\sigma_k(\mathbf{x} + \mathbf{y})} \geq \sqrt[k]{\sigma_k(\mathbf{x})} + \sqrt[k]{\sigma_k(\mathbf{y})}.$$