Algebra II, Praktikum VII

Polünoomi lahutuskorpus.

Kristo Väljako

30. märts 2021

Polünoomi $p(X) \in K[X]$ nimetatame *lahutuvaks* ringis $K[X]$, kui polünoom p on esitatav lineaarpolünoomide korrutisena ringis $K[X]$.

Ülesanne 1. Kas $X^4 - 11X^2 + 18$ on lahutuv ringis $\mathbb{Q}[X]$?

Ülesanne 2. Näidake, et polünoomidel $(X^2-2X-2)(X^2+1)$ ja $X^5-3X^3+X^2-3$ on sama lahutuskorpus üle $\mathbb{Q}$.

Ülesanne 3. Tehke kindlaks, kas järgmised korpuste laiendid on lahutuskorpused:
1) $\mathbb{Z}_3[X]/\langle X^5 + \overline{1}\rangle$ polünoomi $X^5 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ suhtes;
2) korpus $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \supseteq \mathbb{Q}$ polünoomi $X^2 - 2$ suhtes.

Ülesanne 4. Leida polünoomi $X^4 + X^2 + 1$ lahutuskorpus üle $\mathbb{Q}$.

Ülesanne 5. Leida polünoomi $X^3 + \overline{2}X^2 + \overline{2}$ lahutuskorpus üle $\mathbb{Z}_3$.

Ülesanne 6. Tõestada, et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ on algebraline üle $\mathbb{Q}$, konstrueerides 4. astme polünoomi üle $\mathbb{Q}$, mille juureks ta on.

Olgu korpus L korpuse K laiend. Elementi $\alpha \in L$ nimetatakse *algebraliseks* üle K, kui leidub polünoom $f \in K[X]$, mille korral $f(\alpha) = 0$. Algebralise elemendi $a \in L$ *minimaalne polünoom* üle K on vähima astmega polünoom $0 \neq p \in K[X]$, mille pealiikme kordaja on 1 ja $p(a) = 0$.

Ülesanne 7. Tõestada, et algebralise elemendi minimaalne polünoom on taandumatu.

Ülesanne 8. Leida $\sqrt{2} + i$ minimaalne polünoom 1) üle $\mathbb{R}$; 2) üle $\mathbb{Q}$.

Ülesanne* 9. Tõestada, et polünoomi $X^n - 1$, $n > 1$, lahutuskorpus üle $\mathbb{Q}$ on korpuse $\mathbb{Q}$ $\varphi(n)$. järku laiend (φ on Euleri φ-funktsioon).