Algebra II, Praktikum VIII

Maatriksi Jordani normaalkuju.

Kristo Väljako

6. aprill 2021

Ülesanne 1. Leidke järgmiste maatriksite Jordani normaalkujud:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kas nende maatriksite hulgas leidub ka sarnaseid maatrikseid?

Ülesanne 2. Kasutades Jordani normaalkuju ja eksponentfunktsiooni Taylori rida leidke

$$\exp \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 3. Leidke maatriksi $(J_m(a))^2$ Jordani normaalkuju, kui $a \neq 0$.

Ülesanne 4. Leida

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 1 & -20 & -22 \\ -1 & 15 & 17 \end{pmatrix}^{2020}.$$

Ülesanne 5. Leidke idempotentse maatriksi (s.o. maatriksi, mille korral $A^2 = A$) Jordani normaalkuju.

Ülesanne 6. Tooge näide kahest maatriksist, mis ei ole sarnased, aga mille karakteristlikud polünoomid on võrdsed.

Ülesanne 7. Olgu A regulaarne maatriks, mille Jordani normaalkuju on $J(A)$. Milline on maatriksi A^{-1} Jordani normaalkuju?

Maatriksi A *jäljeks* $\operatorname{trace}(A)$ nimetatakse tema peadiagonaali elementide summat.

Ülesanne 8. Olgu $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Tõestada, et kui A on nilpotentne, siis tema jälg $\operatorname{trace} A = 0$.

Ülesanne 9. Tõestada, et kui maatriksi A ainus omaväärtus on 0, siis A on nilpotentne.

Ülesanne* 10. Tõestada, et kui K on lõpmatu korpus, L tema laiend, $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ on sarnased ringis $\mathrm{Mat}_n(L)$, siis A ja B on sarnased juba ringis $\mathrm{Mat}_n(K)$.