

# Algebra II, Praktikum X

Ruutvormid.

Kristo Väljako

20. aprill 2021

**Ülesanne 1.** Viige ruutvorm  $2X_1X_2 + 2X_2X_3$  kanoonilisele kujule.

**Ülesanne 2.** Viige järgmised ruutvormid normaalkujule a) üle  $\mathbb{R}$ , b) üle  $\mathbb{C}$ :

1.  $F_1 = X_1^2 + 4X_2^2 + X_3^2 + 4X_1X_2 - 2X_1X_3$ ,
2.  $F_2 = X_1^2 + 2X_2^2 - X_3^2 + 4X_1X_2 - 2X_1X_3 - 4X_2X_3$ ,
3.  $F_3 = -4X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - 4X_1X_2 + 4X_1X_3 + 18X_2X_3$ ,
4.  $F_4 = X_1^2 + 5X_2^2 - X_3^2 + 6X_1X_2 + 4X_2X_3$ .

Millised nendest ruutvormidest on omavahel ekvivalentsed?

**Ülesanne 3.** Leidke, kui palju on erinevaid mitteekvivalentseid ruutvorme  $n$  muutujast a) üle  $\mathbb{C}$ , b) üle  $\mathbb{R}$ .

**Ülesanne 4.** Leidke kõik parameetri  $a$  reaalarvulised väärtused, mille korral ruutvorm  $aX_1^2 + aX_2^2 + (a-3)X_3^2 + 2X_1X_2 + 2aX_1X_3 + 2X_2X_3$  on negatiivselt määratud.

**Ülesanne 5.** Leidke kõik parameetri  $a$  reaalarvulised väärtused, mille korral ruutvorm  $2X_1^2 - X_2^2 + 4X_3^2 + (2a-1)X_1X_2 + a^2X_2X_3$  on positiivselt määratud.

**Ülesanne 6.** Tõestage, et eukleidilise ruumi sümmeetrilise lineaarteisenduse erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on ortogonaalsed.

**Ülesanne 7.** Viige ruutvorm

1.  $2X_1^2 + 5X_2^2 + 5X_3^2 + 4X_1X_2 - 4X_1X_3 - 8X_2X_3$ ,
2.  $8X_1^2 - 7X_2^2 + 8X_3^2 + 8X_1X_2 - 2X_1X_3 + 8X_2X_3$ ,

kanoonilisele kujule ortogonaalse muutujate vahetusega (s.o. muutujate vahetusega, mille maatriks on ortogonaalmaatriks).

**Ülesanne 8.** Leidke muutujate vahetus, mis viib ruutvormid

$$F = X_1^2 + 2X_2^2 + 3X_3^2 + 2X_1X_2 - 2X_1X_3,$$
$$G = 2X_1^2 + 8X_2^2 + 3X_3^2 + 8X_1X_2 + 2X_1X_3 + 4X_2X_3$$

korraga kanoonilisele kujule üle korpuse  $\mathbb{R}$ .

**Ülesanne\* 9.** Olgu  $f(X_1, \dots, X_n)$  ja  $g(X_1, \dots, X_n)$  ruutvormid, kusjuures  $g$  on positiivselt määratud. Tõestada, et kanooniline kuju  $f = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$  on iga muutujavahetuse korral, mis viib  $g$  normaalkujule, määratud üheselt liidetavate järjekorra täpsuseni, kusjuures  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  on niinimetatud  $\lambda$ -võrrandi

$$\det(A - \lambda B) = 0'$$

lahendid, kus  $A$  ja  $B$  on vormide  $f$  ja  $g$  maatriksid.