

# Algebra II, Praktikum XI

Tsüklilised rühmad. Rühma elemendi järk.

Kristo Väljako

27. aprill 2021

**Ülesanne 1.** Leida substitutsioonide rühma  $S_3$  kõigi elementide järgud.

Olgu  $R$  ring. Tähistame sümboliga  $U(R)$  kõigi ringi  $R$  pööratavate elementide (korrumise suhtes) rühma korrumise suhtes.

**Ülesanne 2.** Leida elementide  $g \in G$  järk ning alamrühm  $\langle g \rangle$ , kus

1.  $G = (\mathbb{Z}_{42}, +)$  ja  $g \in \{\overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$ ;
2.  $G = \mathbb{C}$  ja  $g \in \{\frac{1-i}{\sqrt{2}}, 1+i\}$ ;
3.  $G = \mathbb{Z}_{15}$  ja  $g = \overline{7}$ ;
4.  $G = U(\mathbb{Z}_{15})$  ja  $g = \overline{7}$ ;
5.  $G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$  ja  $g = (\overline{1}, \overline{3})$ .

**Ülesanne 3.** Leida kõik 12-elementilise tsüklilise rühma alamrühmad.

**Ülesanne 4.** Olgu  $G = \langle g \rangle$ ,  $|G| = 12$ . Leida  $G/\langle g^k \rangle$ , kus  $k = 6, 7, 8$ .

Järgmise ülesande lahendamisel võib kasulikuks osutada järgmine lemma arvuteoorias.

**Lemma 1.** Olgu  $G$  rühm,  $a \in G$  ja  $\text{ord}(a) = m \in \mathbb{N}$  ning  $k \in \mathbb{N}_1$ . Siis kehtib  $a^k = \varepsilon$  parajasti siis, kui  $m \mid k$ .

**Ülesanne 5.** Tõestada, et  $n$ -dat järku tsüklilise rühma mistahes alamrühm on tsükliline ja iga  $d \mid n$  korral leidub täpselt üks  $d$ -ndat järku alamrühm.

**Ülesanne 6.** Tõestada, et rühma  $G$  mistahes elementide  $a, b$  ja  $c$  korral

1. elementidel  $ab$  ja  $ba$  on sama järk;
2. elementidel  $abc$ ,  $bca$  ja  $cab$  on sama järk;
3. elementide  $abc$  ja  $cba$  järgud võivad olla erinevad.

**Ülesanne 7.** Tõestada, et kompleksarvu  $z$  järk rühmas  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  on lõplik parajasti siis kui  $|z| = 1$  ja  $\frac{1}{\pi} \arg z \in \mathbb{Q}$ .

**Ülesanne 8.** Leida kõik tsüklilise rühma endomorfismid.

**Ülesanne\* 9.** Oletame, et mingis mittetriviaalses rühmas on kõik ühikelemendid erinevad elemendid  $p$ -ndat järku. Tõestada, et  $p$  on algarv.