Algebra II, Praktikum XII

Lõplikud, perioodilised ja vabad Abeli rühmad.

Kristo Väljako

4. mai 2021

Ülesanne 1. Leida rühma $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ kõik p-komponendid ($p \in \mathbb{P}$). Seejärel veenduge, et rühm $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ tõesti avaldub oma p-komponentide otsesummana.

Ülesanne 2. Esitage järgnevad rühmad oma mittetriviaalsete p-komponentide otsesummana: a) $\mathbb{Z}_{10}$, b) $\mathbb{Z}_{25}$ c) $\mathbb{Z}_{60}$.

Meenutame, et $U(R)$ tähistab kõikide ringi R pööratavate elementide (korrutamise suhtes) hulka.

Ülesanne 3. Leida rühma $(U(\mathbb{Z}_{21}), \cdot)$ p-komponendid ja esitada rühm $(U(\mathbb{Z}_{21}), \cdot)$ nende otsesummana.

Ülesanne 4. Leida kõik 36. ja 250. järku Abeli rühmad.

Ülesanne 5. Leida rühmade $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ ja $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{24}$ maksimaalset järku elemendid ning see maksimaalne järk.

Ülesanne 6. Olgu A Abeli rühm. Tõestage, et rühma A kõigi lõplikku järku elementide rühm on A normaalne alamrühm.

Ülesanne 7. Näidake, et hulk $\{a_1, \ldots, a_n\}$ on vaba Abeli rühma A moodustajate süsteem parajasti siis, kui $A = \langle a_1 \rangle + \ldots + \langle a_n \rangle$.

Ülesanne 8. Olgu A vaba Abeli rühm baasiga B. Tõestage, et kui Abeli rühmade homomorfismi $f\colon\ A \to A$ üheseks määramiseks piisab, kui määrata tema ahend $f|_B$.

Ülesanne* 9. Olgu $p > 2$ algarv. Leida isomorfismi täpsuseni kõik lõplikud (mitte tingimata Abeli) p^3 järku rühmad.