Kordamisküsimusi Algebra II eksamiks
Kevad 2021

Eksam on kirjalik ja selleks on aega 2 tundi. Eksamitöö eest on võimalik koguda kuni 60 punkti. Eksamitöö punktidele liidetakse praktikumide punktid ja lisapunktid (kui neid on) ning vastavalt kogutud punktide arvule kujuneb hinne. Pärast eksamitöö parandamist soovib eksaminaator töö autoriga suuliselt vestelda töö teemal. Vestluse käigus võib hinne täpsustuda.

Eksami ajal on materjale lubatud kasutada 10 minuti jooksul. Kasutatavad materjalid tuleb eelnevalt panna esimeses reas olevale lauale.

Eksamil küsitakse loengumaterjalides sisalduvaid tõestusi ja definitsioone. Peab oskama tuua ka näiteid. Allpool on antud loetelu tõestustest, mis eksamil võivad esineda. Nii lihtsamate kui keerulisemate tõestuste hulgast tuleb eksamil täpselt üks tõestus.

Keerulisemad küsimused:

1. Tõestada, et rühma kongruentsid ja normaalsed alamrühmad on üksüheses vastavuses. (Teoreem 1.52)
2. Tõestada, et ringi kongruentsid ja ideaalid on üksüheses vastavuses. (Teoreem 1.61)
3. Tõestada teoreem, mis seob omavahel R-moodulite sisemised ja välised otsesummad. (Teoreem 1.87)
4. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et vektoruumi lõplikumõõtmeliste alamruumide summa oleks otsesumma. (Teoreem 1.93)
5. Tõestada, et iga sümmeetriline polünoom on esitatav polünoomina sümmeetrilistest põhipolünoomidest. (Teoreem 2.16)
6. Tõestada, et kui K on korpus ja $p \in K[X]$ on vähemalt teise astme taandumatu polünoom, siis saab konstrueerida korpuse K laiendi, milles polünoomil p leidub juur. (Lause 2.21)
7. Tõestada, et igal reaalarvuliste kordajatega mittekonstantsel polünoomil leidub kompleksarvuline juur. (Lause 2.28)
8. Tõestada, et kui vektorruumi V lineaarteisendusel φ leidub selline annulleeriv polünoom, mis lahutub lineaartegurite korrutiseks, siis on lineaarteisendusel φ olemas kanooniline baas. (Teoreem 3.30)
9. Tõestada Cayley-Hamiltoni teoreem. (Teoreem 3.41)
10. Tõestada, et vektorruumi ja tema teise kaasruumi vahel on loomulik isomorfism. (Teoreem 4.13)
11. Tõestada, et Abeli rühm on vaba parajasti siis, kui ta on isomorfne lõpmatute tsükliliste rühmade välise otsesummaga. (Teoreem 5.36)

12. Tõestada, et lõpliku baasiga vaba Abeli rühma iga nullist erinev alamrühm on vaba. (Teoreem 5.40)

Lihtsamad küsimused:

1. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et kujutus kahe rühma vahel oleks rühmade homomorfism. (Lause 1.8)
2. Tõestada, et kui kahe homomorfismi korrutis on defineeritud, siis see korrutis on homomorfism. (Lause 1.14)
3. Tõestada, et isomorfsusseos on ekvivalentsiseos kõigi Ω-algebrate klassil. (Lause 1.19)
4. Tõestada, et kui $\varphi : B \to A$ on Ω-algebrate homomorfism, siis $\varphi(B)$ on A alamalgebra. (Lause 1.27)
5. Tõestada, et kui Ω-algebra alamalgebrate ühisosa on mittetühi, siis see ühisosa on ka alamalgebra. (Lause 1.30)
6. Tõestada Cayley teoreem: iga rühm on isomorfne mingi substitutsioonirühma alamrühmaga. (Teoreem 1.31)
7. Tõestada, et loomulik projektsioon faktoralgebrale on homomorfism. (Lause 1.35)
8. Tõestada, et Ω-algebrate homomorfismi tuum on kongruents. (Lause 1.37)
9. Tõestada Ω-algebrate homomorfismiteoreem. (Teoreem 1.39)
10. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rühma alamrühma kaks vasakpoolset kõrvalklassi oleksid võrdsed. (Lause 1.42)
11. Tõestada, et rühma alamrühma kõik vasakpoolsed kõrvalklassid on sama võimsusega. (Lause 1.44)
12. Tõestada Lagrange'i teoreem. (Teoreem 1.46)
13. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rühma alamrühm oleks normaalne. (Lause 1.51)
14. Tõestada kaks tarvilikku ja piisavat tingimust selleks, et R-mooduli (R on ring) alammoodulite summa oleks otsesumma. (Teoreem 1.81)
15. Tõestada väide selle kohta, kuidas saab leida vektorrumi kahe lõplikumõõtmelise alamruumi summa baasi. (Lause 1.89)
16. Tõestada, et lõplikumõõtmelise vektorruumi baasi tükeldus tekitab selle vektorruumi lahutuse otsesummaks. (Lause 1.94)
17. Tõestada, et kui lõplikumõõtmeline vektorruum V on oma alamruumide otsesumma, siis nende alamruumide baaside ühend on V baas. (Lause 1.95)

18. Tõestada, et üksliikmete leksikograafiline järjestus on kooskõlas korrutamisega. (Lemma 2.4)

19. Tõestada, et kui f ja g on n muutuja polünoomid üle nullitegureita ringi R, siis fg kõrgeim liige on f ja g kõrgeimate liikmete korrutis. (Lause 2.5)

20. Tõestada Viete'i valemid. (Teoreem 2.14)

21. Tõestada, et iga mittekonstantse polünoomi jaoks üle korpuse leidub lahutuskorpus. (Teoreem 2.23)

22. Tõestada, et igal paarituarvulise astmega reaalarvuliste kordajatega polünoomil leidub reaalarvuline juur. (Lause 2.26)

23. Tõestada algebra põhiteoreem. (Teoreem 2.29)

24. Tõestada, et kui φ on vektorruumi V lineaarteisendus, siis V ühemõõtmeslised φ-invariantsed alamruumid on parajasti φ omavektorite lineaarsed katted. (Lause 3.9)

25. Tõestada, et vektorruumi $V \neq \{0\}$ nilpotentsel lineaarteisendusel on ainult üks omaväärtus, milleks on 0. (Lause 3.14)

26. Tõestada teoreem, mille abil saab leida Jordani kastide arvud nilpotentse maatriksi Jordani normaalkujus. (Teoreem 3.22)

27. Tõestada, et igal ruutmaatriksil üle korpuse on olemas annulleeriv polünoom. (Lause 3.28)

28. Tõestada, et kui vektorruumi V lineaarteisenduse φ annulleeriv polünoom lahutub paarikaupa ühistegurita polünoomide korrutiseks, siis V lahutub teatud φ-invariantsete alamruumide otsesummaks. (Lause 3.29)

29. Tõestada, et nullist erinev polünoom on lineaarteisenduse annulleeriv polünoom parajasti siis, kui ta jagub selle lineaarteisenduse minimaalse polünoomiga. (Lause 3.33)

30. Tõestada, et igal lineaarteisendusel leidub üheselt määratud minimaalne polünoom. (Järeldus 3.34)

31. Tõestada tulemus, mis kirjeldab Jordani kasti minimaalse polünoomi. (Lause 3.38)

32. Tõestada, et Jordani maatriksi minimaalne polünoom on tema kastide minimaalsete polünoomide vähim ühiskordne. (Lause 3.40)

33. Tõestada, et lineaarteisendusel leidub kanooniline baas parajasti siis, kui tema karakteristlik polünoom lahutub lineaarpolünoomide korrutiseks. (Teoreem 3.42)

34. Tõestada, et vektorruumi baasi fikseerimine tekitab üksühese vastavuse lineaarsete funtsionaalide ja lineaarvormide vahel. (Lause 4.7)

35. Tõestada tulemus, mis kirjeldab lineaarse funktsionaali maatriksi muutumist üleminekul ühelt baasilt teisele. (Lause 4.8)

36. Tõestada tulemus vektorruumi baasi kaasbaasi kohta. (Lause 4.9)

37. Tõestada bilineaarse funktsionaali maatriksi teisenemise reegel üleminekul ühelt baasilt teisele. (Lause 4.19)

38. Tõestada, et kui korpuse karakteristika ei ole 2, siis ruutfunktsionaali määrav sümmeetriline bilineaarne funktsionaal on üheselt määratud. (Lause 4.24)

39. Tõestada, et n-mõõtmelise vektoruumi ruutfunktsionaalide, n muutuja ruutvormide ja n-ndat järku sümmeetriliste ruutmaatriksite vahel on üksühene vastavus. (Lause 4.29)

40. Tõestada, et igal ruutfunktsionaalil on olemas kanooniline baas. (Teoreem 4.34)

41. Tõestada, et igal eukleidilise ruumi ruutfunktsionaalil on olemas ortonormeeritud kanooniline baas. (Teoreem 4.35)

42. Tõestada tulemus kompleksarvuliste kordajatega ruutvormi kanoonilise kuju kohta. (Lause 4.37)

43. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus kompleksarvuliste kordajatega ruutvormide ekvivalentsuseks. (Teoreem 4.39)

44. Tõestada, et reaalarvuliste kordajatega ruutvormi positiivsete kordajate arv tema kanoonilises kujus ei sõltu kanoonilisest baasist. (Teoreem 4.40)

45. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus reaalarvuliste kordajatega ruutvormide ekvivalentsuseks. (Teoreem 4.41)

46. Tõestada, et reaalarvuliste kordajatega ruutvorm on positiivselt määratud parajasti siis, kui tema maatriksi kõik peamiinorid on positiivsed. (Teoreem 4.46)

47. Tõestada, et sama järku tsüklilised rühmad on isomorfsed. (Teoreem 5.5)

48. Tõestada, et kui G on n-ndat järku tsükliline rühm moodustajaga g, siis element g^k on rühma G moodustaja parajasti siis, kui $\text{SÜT}(k, n) = 1$. (Lause 5.12)

49. Tõestada, et mittetriviaalsel rühmal ei ole mittetriviaalseid pärisalamrühmi parajasti siis, kui see rühm on tsükliline ja algarvulise järguga. (Lause 5.16)

50. Tõestada, et Abeli rühma p-komponent on selle rühma alamrühm. (Lemma 5.19)

51. Tõestada, et perioodiline Abeli rühm on oma p-komponentide otsesumma. (Teoreem 5.22)

52. Tõestada, et kui algarv p jagab lõpliku Abeli rühma järku, siis selles rühmas leidub element, mille järk on p. (Teoreem 5.25)

53. Tõestada, et iga Abeli rühm on isomorfne mingi vaba Abeli rühma faktorrühmaga. (Lause 5.37)

Mõisted, mida tuleb tunda: n-aarne tehe, tüüp, Ω-algebra, monoid, rühm, ring, korpus, vektorruum, moodul üle ringi, homomorfism, endomorfism, isomorfism, automorfism, alamalgebra, alamhulga poolt tekitatud alamalgebra, kongruents, faktorhulk, faktoralgebra, kujutuse tuum, alamrühma kõrvalklass, rühma järk, normaalne alamrühm, faktorrühm, rühmade homomorfismi tuum, ringi ideaal, faktorring, vektorruumi faktorruum, Ω-algebrate otsekorrutis, moodulite väline otsesumma, alammoodulite summa, alammoodulite sisemine otsesumma.

n-muutuja polünoom, üksliige, sarnased üksliikmed, polünoomi liige, üksliikme aste, polünoomi aste, üksliikmete leksikograafiline järjestus, homogeenne polünoom, sümmeetriline polünoom, sümmeetrilised põhipolünoomid, polünoomi juur, alamkorpus, korpuse laiend, taandumatu polünoom, polünoomi lahutuskorpus, algebraliselt kinnine korpus.

Jordani kast, Jordani maatriks, blokk-diagonaalne maatriks, lineaarteisenduse kanooniline baas, maatriksi Jordani normaalkuju, φ-invariantne alamruum, ringi nilpotentne element ja tema nilpotentsuse indeks, lineaarteisenduse ja maatriksi annulleeriv polünoom, minimaalne polünoom.

Lineaarne funktsionaal, vektorruumi kaasruum, vorm, lineaarvorm, ruutvorm, lineaarse funktsionaali maatriks, üleminekumaatriks ühelt baasilt teisele, kaasbaas, teine kaasruum, bilineaarne funktsionaal, bilineaarse funktsionaali maatriks, bilineaarvorm, sümmeetriline bilineaarne funktsionaal, ruutfunktsionaal, ruutfunktsionaali maatriks, ruutvormi maatriks, ruutvormi kanooniline kuju, ruutfunktsionaali kanooniline baas, ekvivalentsed ruutvormid, ruutvormi normaalkuju (üle kompleksarvude ja reaalarvude), positiivselt (negatiivselt) määratud ruutvorm, ruutmaatriksi peamiinor.

Rühma elemendi poolt tekitatud alamrühm, tsükliline rühm ja selle tekitaja, rühma elemendi järk, perioodiline rühm, Abeli rühma p-komponent, p-rühm. Abeli rühma elementide lineaarkombinatsioon ja lineaarne kate, Abeli rühma elementide süsteemi lineaarne sõltuvus (sõltumatus), Abeli rühma moodustajate süsteem ja baas, vaba Abeli rühm.