Analüütiline geomeetria

Pinna mõiste. Teist järku pinnad.

Sügissemester 2016

Pinna võrrandid

Kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis E^3 on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, sellega määratud ristkoordinaadid on x, y, z. Tasandilise joone korral on kaks võimalust: kas ilmutamata võrrand $F(x, y) = c$ või parameetriline võrrand $r(t) = (x(t), y(t))$.
Analoogiliselt pinna võrrandi korral on ka kaks võimalust:

1. Pind on määratud ilmutamata võrrandi $F(x, y, z) = c$ abil, kus $F(x, y, z)$ on kolmemuutuja (lõpmata diferentseeruv) funktsioon ja c on reaalarv. Pinnaks nimetatakse ruumi E^3 punktihulka S, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit $F(x, y, z) = c$.
   Sellisel juhul öeldakse, et pind on funktsiooni F tasemepind kõrgusega c. Kui F on n-astme polünoom, siis pinda nimetatakse n-järku algebraliseks pinnaks.
2. Pind on määratud parameetrilise võrrandi $x = \phi(u, v), y = \psi(u, v), z = \xi(u, v)$ abil, kus u, v on pinna parameetrid, ϕ, ψ, ξ on kahemuutuja (lõpmata diferentseeruvad) funktsioonid, määramispiirkond on hulk $D \subset \mathbb{R}^2$. Sageli kirjutatakse kujul $r(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v), \xi(u, v))$ ja $(u, v) \in D$.

Tasand

Näide

1. Tasandi üldvõrrand on $Ax + By + Cz + D = 0$.

   See on ilmutamata võrrand $F(x, y, z) = c$, kus $F(x, y, z) = Ax + By + Cz$ ja $c = -D$.

   Tuletame meelde, et vektor $\vec{N} = (A, B, C)$ on tasandi normaalvektor. Kui tasandi normaalvektor on $\vec{N} = (A, B, C)$ ja tasand läbib punkti $P(x_0, y_0, z_0)$, siis sellise tasandi üldvõrrand on $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

2. Tasandi parameetriline võrrand on

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 u + b_1 v + x_0, \\
y &= a_2 u + b_2 v + y_0, \\
z &= a_3 u + b_3 v + z_0,
\end{aligned}
$$

   kus $\{\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)\}$ on tasandi riht

Sfäär

Sfääriks nimetatakse fikseeritud punktist C (keskpunkt) võrdsetel kaugustel asuvate punktide hulka. Kui $\vec{r}_0$ on C kohavektor, R on sfääri raadius ja $\vec{r}$ on sfääri suvalise punkti kohavektor, siis sfääri vektorvõrrand on

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = R.$$

1. Sfääri ilmutamata võrrand. Sfääri vektorvõrrandist järeldub, et sfääri võrrand ristkoordinaatides on järgmine

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \tag{0.1}$$

kus $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ on sfääri keskpunkt ja $R > 0$ on raadius. On ilmne, et võrrand (0.1) on sfääri ilmutamata võrrand, kus

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \\ c &= R^2. \end{aligned}$$

Seega sfäär on teist järku pind.

Sfäär

2. Sfääri parameetriline võrrand on

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos u\,\sin v + x_0,\\
y &= R\sin u\,\sin v + y_0,\\
z &= R\cos v + z_0,
\end{aligned}
$$

kus $D = \{(u,v) : 0 \le u < 2\pi, 0 \le v \le \pi\} \subset \mathbb{R}^2$.

Pöördpind

Oletame, et xy-koordinaattasandil on antud joon nii, et kas joon asub xy-koordinaattasandi ülemisel pooltasandil (st joone suvalise punkti korral teine koordinaat rahuldab tingimust $y > 0$) või x-koordinaattelg on joone sümmeetriatelg.
Antud joone pööramisel ümber x-telje (pöördetelg) tekib pind ja vastavat pinda nimetatakse pöördpinnaks. Joont nimetatakse pöördpinna profiiljooneks.

1. Pöördpinna ilmutamata võrrand:
pöördpinna ilmutamata võrrandi koostamiseks eeldame, et on antud profiiljoone ilmutamata võrrand $f(x, y) = c$. Kui profiiljoont pöörame ümber x-telje, siis pöördpinna ilmutamata võrrand on

$$f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = c.$$

Järelikult pöördpinna ilmutamata võrrandi koostamiseks profiiljoone võrrandis muutujat y asendame avaldisega $\sqrt{y^2 + z^2}$, st

$$f(x, y) = c \quad \Rightarrow \quad f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = c.$$

Pöördpinna parameetriline võrrand

2. Pöördpinna parameetriline võrrand. Eeldame, et on antud profiiljoone parameetriline võrrand $r(t) = (x(t), y(t))$, kus $t \in I \subset \mathbb{R}$ ja suvalise t korral $y(t) > 0$. Leiame pöördpinna parameetrilise võrrandi.
Pöördpinna parameetriline võrrand on

$$r(u, v) = (x(u), y(u)\ \cos(v), y(u)\ \sin(v)),$$

kus $(u, v) \in D = I \times [0, 2\pi]$.

Näide

Huvitav joon on aheljoon. Vabalt rippuv elastne (kuid mitte venitatav) kett (raskusjõu toimel) võtab aheljoone kuju. Leibniz, Huygens, Johann Bernulli lahendasid probleemi aheljoone võrrandi leidmisega ja näitasid, et aheljoone (catenary) võrrand on

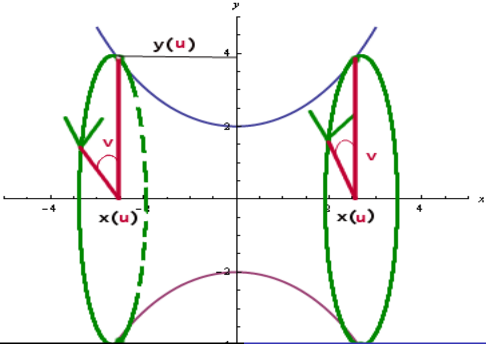
$$y = a\ \cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

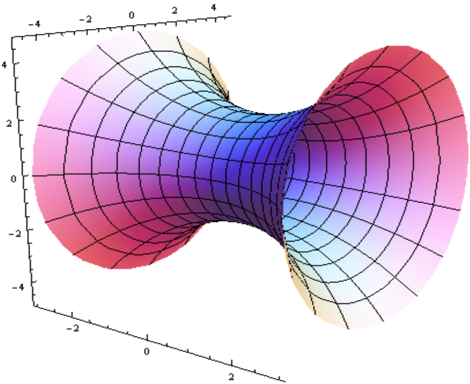
kus $a > 0$ on mingi konstant.

Katenoid

Kui aheljoont pöörame ümber x-koordinaattelje (aheljoon on profiiljoon), siis vastavat pöördpinda nimetatakse katenoidiks. Leiame katenoidi parameetrilise võrrandi. Aheljoone parameetriline võrrand on $r(t) = (t, a\,\cosh(\frac{t}{a}))$ (x on parameeter). Seega

$$r(u,v) = \Big(u, a\,\cosh(\frac{u}{a})\,\cos v, a\,\cosh(\frac{u}{a})\,\sin v\Big).$$

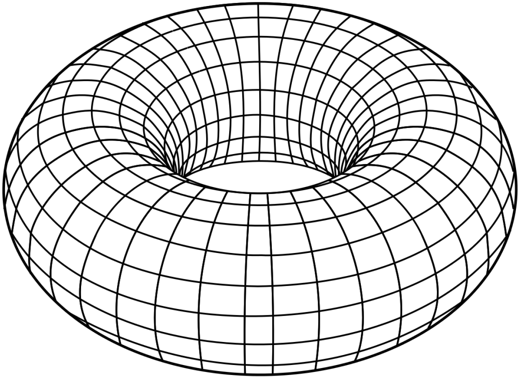




Joonis: Katenoid

Näide

Leiame rõngaspinna (toor) parameetrilise võrrandi.



Ellipsoid

Olgu xy-koordinaattasandil antud ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Antud ellipsi pööramisel ümber x-telje tekib pöördpind, mida nimetatakse pöördellipsoidiks. Pöördellipsoidi võrrandi leidmiseks ellipsi võrrandis asendame

$$y \to \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Saame

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

See on pöördellipsoidi võrrand. Üldistame ülalpool kirjutatud võrrandit järgmiselt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{0.2}$$

kus $c > 0$. Ruumi punktihulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit (0.2), nimetatakse ellipsoidiks. Ellipsoid on teist järku pind.

Koonus

Olgu xz-koordinaattasandil antud sirge

$$z = \frac{c}{a}\, x,$$

kus $c > 0, a > 0$ on reaalarvud. Antud sirge pööramisel ümber z-telje tekib pöördkoonus. Pöördkoonuse võrrand on

$$x \to \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Antud võrrandit võime üldistada, kui võrrandi teises liikmes $a \to b, b \neq a$. Ruumi punktihulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

nimetatakse teist järku koonuseks.

Hüperboloidid

Olgu xz-koordinaattasandil antud hüperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Hüperbooli korral on kaks võimalust, kas pöörame ümber z-telje või pöörame ümber x-telje. Kui hüperbooli pöörame ümber z-telje ($x \to \sqrt{x^2 + y^2}$), siis tekib pöördpind, mille võrrand on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{0.3}$$

Võrrandiga (0.5) määratud pinda nimetatakse ühekatteliseks pöördhüperboloidiks. Kui hüperbooli pöörame ümber x-telje ($z \to \sqrt{y^2 + z^2}$), siis tekib pöördpind, mille võrrand on

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{0.4}$$

Ruumi punktihulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit (0.4), nimetatakse kahekatteliseks pöördhüperboloidiks.

Paraboloidid

Olgu xz-koordinaattasandil antud parabool

$$y^2 = 2p\, z.$$

Parabooli korral on kaks võimalust, kas pöörame ümber z-telje või pöörame ümber x-telje. Kui parabooli pöörame ümber z-telje ($x \to \sqrt{x^2+y^2}$), siis tekib pöördpind,

$$x^2 + y^2 = 2p\, z, \tag{0.5}$$

mille võrrandit võime üldistada järgmiselt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{(elliptiline paraboloid)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{(hüperboolne paraboloid)}.$$

Eksami küsimused

- Pinna võrrandi mõiste. Sfääri võrrandid.
- Pöördpinna mõiste. Pöördpinna võrrandid.
- Ellipsoidi, koonuse, hüperboloidi (ühekattelise ja kahekattelise) ja paraboloidi (elliptilise ja hüperboolse) võrrand.