Analüütiline geomeetria

III loeng. Vektorite skalaarkorrutis.

Sügissemester 2016

Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}$. Rakendame vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ ühest ja samast punktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}$ rakendatud (seotud) vektorid. Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vaheline nurk on nurk, mis tekkib vektori $\overline{OA}$ pööramisel ümber punkti O **lühemat teed pidi** seotud vektorile $\overline{OB}$. Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vahelist nurka tähistame $\phi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Seega $0 \leq \phi \leq \pi$. Kui $\phi = \frac{\pi}{2}$, siis vektorid on teineteisega risti või nad on ortogonaalsed ja seda tähistatakse $\vec{a} \perp \vec{b}$. Nullvektor on risti mistahes vektoriga.

Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}$. Rakendame vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ ühest ja samast punktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}$ rakendatud (seotud) vektorid. Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vaheline nurk on nurk, mis tekkib vektori $\overline{OA}$ pööramisel ümber punkti O **lühemat teed pidi** seotud vektorile $\overline{OB}$. Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vahelist nurka tähistame $\phi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Seega $0 \le \phi \le \pi$. Kui $\phi = \frac{\pi}{2}$, siis vektorid on teineteisega risti või nad on ortogonaalsed ja seda tähistatakse $\vec{a} \perp \vec{b}$. Nullvektor on risti mistahes vektoriga.

Definitsioon

Kahe vektori $\vec{a}, \vec{b}$ skalaarkorrutiseks nimetatakse arvu $|\vec{a}||\vec{b}|\ \cos\phi$ ja skalaarkorrutist tähistatakse $<\vec{a}, \vec{b}>$. Seega

$$<\vec{a}, \vec{b}> = |\vec{a}||\vec{b}|\ \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

kus $|\vec{a}|, \vec{b}$ on vektorite pikkused.

Kasutades vektorite vahelise nurga tähistust skalaarkorrutise võime kirjutada kujul

$$<\vec{a}, \vec{b}> = |\vec{a}||\vec{b}|\ \cos\phi.$$

Skalaarkorrutise omadused:

Skalaarkorrutise omadused:

1. vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne $<\vec{a},\vec{b}>=<\vec{b},\vec{a}>$,

Skalaarkorrutise omadused:

1. vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne $<\vec{a}, \vec{b}>=<\vec{b}, \vec{a}>$,
2. $<\vec{a}, \vec{a}>= |\vec{a}|^2 \geq 0$, kusjuures $<\vec{a}, \vec{a}>= 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$,

Skalaarkorrutise omadused:

1. vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne $<\vec{a},\vec{b}>=<\vec{b},\vec{a}>$,
2. $<\vec{a},\vec{a}>=|\vec{a}|^2\geq 0$, kusjuures $<\vec{a},\vec{a}>=0 \ \Leftrightarrow \ \vec{a}=\vec{0}$,
3. vektorite $\vec{a},\vec{b}$ skalaarkorrutis on null parajasti siis, kui nad on teineteisega risti $\vec{a}\perp\vec{b}$ (vt tõestus).

Skalaarkorrutise omadused:

1. vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne $<\vec{a},\vec{b}>=<\vec{b},\vec{a}>$,
2. $<\vec{a},\vec{a}>=|\vec{a}|^2\geq 0$, kusjuures $<\vec{a},\vec{a}>=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}=\vec{0}$,
3. vektorite $\vec{a},\vec{b}$ skalaarkorrutis on null parajasti siis, kui nad on teineteisega risti $\vec{a}\perp\vec{b}$ (vt tõestus).
4. Vektorite skalaarkorrutamine on lineaarne, st
$$<\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b},\vec{c}>=\alpha\,<\vec{a},\vec{c}>+\beta\,<\vec{b},\vec{c}>,$$
kus α,β on suvalised arvud ja $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ on suvalised vektorid, (vt tõestus)
5. kui $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ on ristreeper, siis kehtib
$$\begin{aligned}<\vec{e}_1,\vec{e}_1> &= <\vec{e}_2,\vec{e}_2>=<\vec{e}_3,\vec{e}_3>=1,\\ <\vec{e}_1,\vec{e}_2> &= <\vec{e}_2,\vec{e}_3>=<\vec{e}_1,\vec{e}_3>=0.\end{aligned}$$

Teisest omadusest järeldub, et vektori pikkuse võime arvutada kasutades valemit $|\vec{a}|=+\sqrt{<\vec{a},\vec{a}>}$.

Tarvilikus: $\vec{a} \perp \vec{b}$ või $\vec{a} = \vec{0} \Longrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

1) kui $\vec{a} = \vec{0}$, siis definitsiooni kohaselt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$,

2) kui $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, siis

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0''} = 0$$

Piisavus: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Longrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ või $\vec{a} \perp \vec{b}$

Kirjutame $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi = 0$.

Kaks võimalust

1) $|\vec{a}| = 0$, seega $\vec{a} = \vec{0}$,

2) $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, siis $\cos \phi = 0 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

Defineerime kahe alaindeksiga suurust (Kroneckeri sümbol)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kui } i = j, \\ 0 & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

Viimase omaduse valemid võime kirjutada kompaktselt järgmiselt
$< \vec{e}_i, \vec{e}_j >= \delta_{ij}$.

Defineerime kahe alaindeksiga suurust (Kroneckeri sümbol)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kui } i = j, \\ 0 & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

Viimase omaduse valemid võime kirjutada kompaktselt järgmiselt $< \vec{e}_i, \vec{e}_j >= \delta_{ij}$. Tuletame meelde, et ristbaasi (ortonormeeritud) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral kehtib valem (Loeng II)

$$\vec{r} = |\vec{r}|\, \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{r}|\, \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + |\vec{r}|\, \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3.$$

Defineerime kahe alaindeksiga suurust (Kroneckeri sümbol)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kui } i = j, \\ 0 & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

Viimase omaduse valemid võime kirjutada kompaktselt järgmiselt $< \vec{e}_i, \vec{e}_j >= \delta_{ij}$. Tuletame meelde, et ristbaasi (ortonormeeritud) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral kehtib valem (Loeng II)

$$\vec{r} = |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3.$$

On ilmne, et $|\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_i) =< \vec{r}, \vec{e}_i >, i = 1, 2, 3.$ Seega

$$\boxed{\vec{r} =< \vec{r}, \vec{e}_1 >\ \ \vec{e}_1+ < \vec{r}, \vec{e}_2 >\ \ \vec{e}_2+ < \vec{r}, \vec{e}_3 >\ \ \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} < \vec{r}, \vec{e}_i >\ \ \vec{e}_i.}$$

Järelikult ortonormeeritud baasi korral vektori $\vec{r}$ koordinaadid avalduvad järgmiselt:

$$x =< \vec{r}, \vec{e}_1 >, y =< \vec{r}, \vec{e}_2 >, z =< \vec{r}, \vec{e}_3 > .$$

Eeldame, et $\vec{c} \neq \vec{0}$. Võtame kaks vektorit $\vec{d}, \vec{f}$ nii, et $\vec{d} \perp \vec{c}$, $\vec{f} \perp \vec{c}$, $|\vec{d}| \neq 0$, $|\vec{f}| \neq 0$.
Vektorid $\vec{c}, \vec{d}, \vec{f}$ on mittekomplanaarsed, järelikult suvalise vektori korral

$$\vec{a} = \frac{1}{|\vec{c}|} pr_{\vec{c}} \vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{|\vec{d}|} pr_{\vec{d}} \vec{a} \cdot \vec{d} + \frac{1}{|\vec{f}|} pr_{\vec{f}} \vec{a} \cdot \vec{f}.$$

Ristprojektsiooni korral kehtib

$$\frac{1}{|\vec{c}|} pr_{\vec{c}} \vec{a} = \frac{1}{|\vec{c}|} |\vec{a}| \cos \angle(\vec{c}, \vec{a}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Järelikult vektori $\vec{a}$ esimene koordinaat on

$$x_1 = \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Vektori $\alpha \cdot \vec{a}$ esimene koordinaat on

$$\alpha \cdot x_1 = \frac{\alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Analoogiliselt vektori $\beta \cdot \vec{b}$ esimene koordinaat on

$$\beta \cdot \frac{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Analoogiliselt vektori $\beta\cdot\vec{b}$ esimene koordinaat on

$$\frac{\beta\langle\vec{b},\vec{c}\rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Vektori $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$ esimene koordinaat on summa

$$\frac{\alpha\langle\vec{a},\vec{c}\rangle}{|\vec{c}|^2}+\frac{\beta\langle\vec{b},\vec{c}\rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Vektori $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$ esimese koordinaadi võime arvutada

$$\frac{\langle\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{c}\rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Seega

$$\frac{\langle\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{c}\rangle}{\cancel{|\vec{c}|^2}}=\frac{\alpha\langle\vec{a},\vec{c}\rangle}{\cancel{|\vec{c}|^2}}+\frac{\beta\langle\vec{b},\vec{c}\rangle}{\cancel{|\vec{c}|^2}}$$

Olgu ruumis antud ristreeper $\mathfrak{r} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ja kaks vektorit $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, kus $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2$ on vektorite ristkoordinaadid.

Teoreem

Vektorite $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ skalaarkorrutis on võrdne koordinaatide korrutiste summaga, kus summa esimene liidetav on esimeste koordinaatide korrutis, teine liidetav on teiste koordinaatide korrutis ja kolmas liidetav on kolmandate koordinaatide korrutis, st

$$\boxed{< \vec{r}_1, \vec{r}_2 >= x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2}.$$

Olgu ruumis antud ristreeper $\mathfrak{r} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ja kaks vektorit $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, kus $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2$ on vektorite ristkoordinaadid.

Teoreem

Vektorite $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ skalaarkorrutis on võrdne koordinaatide korrutiste summaga, kus summa esimene liidetav on esimeste koordinaatide korrutis, teine liidetav on teiste koordinaatide korrutis ja kolmas liidetav on kolmandate koordinaatide korrutis, st

$$\boxed{< \vec{r}_1, \vec{r}_2 >= x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2}.$$

Tõestus. Kehtib

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \;\Rightarrow\; \vec{r}_1 = x_1\, \vec{e}_1 + y_1\, \vec{e}_2 + z_1\, \vec{e}_3.$$

Seega kasutades skalaarkorrutise lineaarsust leiame

$$\begin{aligned} < \vec{r}_1, \vec{r}_2 > &= < x_1\, \vec{e}_1 + y_1\, \vec{e}_2 + z_1\, \vec{e}_3, \vec{r}_2 > \\ &= x_1 \;< \vec{r}_2, \vec{e}_1 > + y_1 \;< \vec{r}_2, \vec{e}_2 > + z_1 \;< \vec{r}_2, \vec{e}_3 > . \end{aligned}$$

Eespool tõestatud valemist järeldub

$x_2 =< \vec{r}_2, \vec{e}_1 >, y_2 =< \vec{r}_2, \vec{e}_2 >, z_2 =< \vec{r}_2, \vec{e}_3 >$.

Tõestatud teoreemist järeldub, et ristkoordinaatides vektori $\vec{r} = (x, y, z)$ pikkus on võrdne

$$|\vec{r}| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Kui $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis kahe vektori vahelise nurga koosinuse arvutame kasutades valemit

$$\cos\angle(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{< \vec{r}_1, \vec{r}_2 >}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|} = \frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Kui $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ on ruumi punktid, siis kauguse punktide vahel arvutame järgmiselt

$$|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Juhin tähelepanu, et antud valem kehtib ainult ristkoordinaatides.

Eksami küsimused

1. Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused. Baasivektorite skalaarkorrutised. Kroneckeri sümbol. Vektori ristkoordinaatide arvutamise valem skalaarkorrutise abil.
2. Teoreem (vektorite skalaarkorrutise valem ristkoordinaatides). Vektori pikkuse valem, kahe vektori vahelise nurga koosinuse valem, kahe punkti vahelise kauguse valem.

Eksami ülesanded

1. On antud kolm ühikvektorit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, mis rahuldavad tingimust $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Leida
$$< \vec{a}, \vec{b} > + < \vec{b}, \vec{c} > + < \vec{c}, \vec{a} > .$$
2. Olgu a, b reaalarvud. Kui $a\, b = 0$, siis sellest kohe järeldub, et vähemalt üks arv arvudest a, b on null. Kas samasugune omadus kehtib vektorite skalaarkorrutise korral? Teiste sõnadega, kui $\vec{a}, \vec{b}$ on vektorid ja $< \vec{a}, \vec{b} >= 0$, kas sellest järeldub, et vähemalt üks vektoritest on nullvektor?
3. Kehtib $< \vec{a}, \vec{c} >=< \vec{b}, \vec{c} >$, kus $\vec{c} \neq \vec{0}$. Kas sellest võrdusest järeldub, et $\vec{a} = \vec{b}$? Vastus peab olema põhjendatud.
4. On antud kaks vektorit $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ (ristreeper). Lihtsustada summa
$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \delta_{ij}\; x_i y_j .$$