Analüütiline geomeetria

IV loeng. Vektorite vektorkorrutis.

Sügissemester 2016

Vektorkorrutise definitsioon

Olgu $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}^3$ ruumi vektorid.

Definitsioon

Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vektorkorrutiseks (`vector cross product`) nimetatakse **vektorit** $\vec{a} \times \vec{b}$, mis määratakse kolme tingimusega:

Vektorkorrutise definitsioon

Olgu $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}^3$ ruumi vektorid.

Definitsioon

Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vektorkorrutiseks (`vector cross product`) nimetatakse **vektorit** $\vec{a} \times \vec{b}$, mis määratakse kolme tingimusega:

- $(\text{pikkus}) \;\; |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$,

Vektorkorrutise definitsioon

Olgu $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}^3$ ruumi vektorid.

Definitsioon

Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vektorkorrutiseks (`vector cross product`) nimetatakse **vektorit** $\vec{a} \times \vec{b}$, mis määratakse kolme tingimusega:

- $(\text{pikkus})\ \ |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}),$
- $(\text{siht})\ \ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b},$

Vektorkorrutise definitsioon

Olgu $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}^3$ ruumi vektorid.

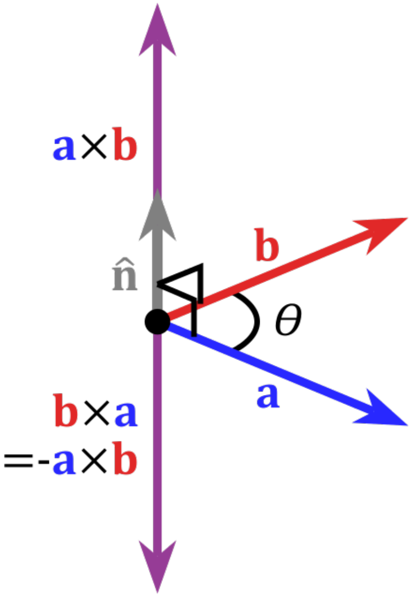
Definitsioon

Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vektorkorrutiseks (`vector cross product`) nimetatakse **vektorit** $\vec{a} \times \vec{b}$, mis määratakse kolme tingimusega:

- $\text{(pikkus)}\ \ |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$,
- $\text{(siht)}\ \ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$,
- (suund) kui vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on mittekollinaarsed, siis $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ on parema käe kolmik (vt joonis).

Kui vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on kollineaarsed, st $\vec{a} || \vec{b}$, siis $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ suuna leidmiseks võime kasutada parema käe reeglit.


a×b
n̂
b
θ
a
b×a
=-a×b

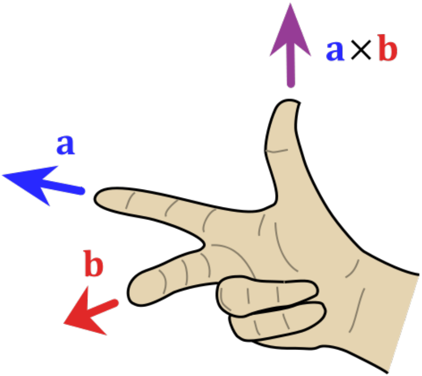


Figure:

Parema käe reegel

Teoreem

Vektorid $\vec{x}, \vec{y}$ on kollineaarsed parajasti siis, kui $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ (kollineaarsuse tarvilik ja piisav tingimus).

Tõestus.

Teoreem

Vektorid $\vec{x}, \vec{y}$ on kollineaarsed parajasti siis, kui $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ (kollineaarsuse tarvilik ja piisav tingimus).

Tõestus.
Tõestatud teoreemist järeldub, et suvalise vektori $\vec{x}$ korral kehtib

$$\boxed{\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}.}$$

Teoreem

Vektorid $\vec{x}, \vec{y}$ on kollineaarsed parajasti siis, kui $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ (kollineaarsuse tarvilik ja piisav tingimus).

Tõestus.

Tõestatud teoreemist järeldub, et suvalise vektori $\vec{x}$ korral kehtib

$$\boxed{\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}.}$$

Teoreem

Kui $\vec{x}, \vec{y}$ on mittekollineaarsed vektorid, siis vektorkorrutise $\vec{x} \times \vec{y}$ pikkus on võrdne vektoritele $\vec{x}, \vec{y}$ ehitatud rööpküliku pindalaga

$$S = |\vec{x} \times \vec{y}|.$$

Teoreem

Vektorid $\vec{x}, \vec{y}$ on kollineaarsed parajasti siis, kui $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ (kollineaarsuse tarvilik ja piisav tingimus).

Tõestus.

Tõestatud teoreemist järeldub, et suvalise vektori $\vec{x}$ korral kehtib

$$\boxed{\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}.}$$

Teoreem

Kui $\vec{x}, \vec{y}$ on mittekollineaarsed vektorid, siis vektorkorrutise $\vec{x} \times \vec{y}$ pikkus on võrdne vektoritele $\vec{x}, \vec{y}$ ehitatud rööpküliku pindalaga

$$S = |\vec{x} \times \vec{y}|.$$

Tõestus. Rööpküliku $OABC$ pindala S on võrdne rööpküliku aluse $|OA| = |\vec{x}|$ (vt joonis) ja kõrguse $h = |BH|$ korrutisega, st $S = |\vec{x}|\, h$ Kolmnurk OHB on täisnurkne, seega $h = |OB| \sin\phi = |\vec{y}| \sin\phi$. Järelikult

$$S = |\vec{x}|\, h = |\vec{x}|\, |\vec{y}| \sin\phi = |\vec{x} \times \vec{y}|.$$

Tarvilikus: $\vec{x} \parallel \vec{y} \Longrightarrow \vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$

1) kui $\vec{x} = \vec{0}$ või $\vec{y} = \vec{0}$, siis definitsioonist järeldub

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}.$$

2) kui $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, siis on kaks võimalust

a) $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y} \Longrightarrow \phi = \angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, $\sin\phi = 0$;

b) $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y} \Longrightarrow \phi = \pi$, $\sin\phi = 0$.

Seega $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \cdot \underbrace{\sin\phi}_{=0} = 0 \Longrightarrow \vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$.

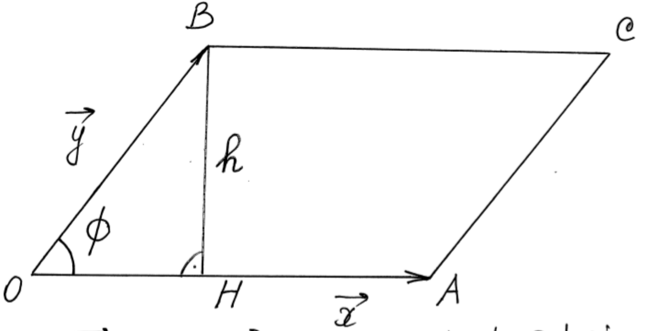
Piisavus: $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x} \parallel \vec{y}$

$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \Longrightarrow |\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \cdot \sin\phi = 0$

1) $|\vec{x}| = 0$ või $|\vec{y}| = 0 \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ või $\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \parallel \vec{y}$

2) $|\vec{x}| \neq 0$, $|\vec{y}| \neq 0$, $\sin\phi = 0 \Longrightarrow \phi = 0$ või $\phi = \pi$

$\Longrightarrow \vec{x} \parallel \vec{y}$.



$$\vec{x} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{y} = \overrightarrow{OB}, \quad |HB| = h = |OB| \cdot \sin\phi$$

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = S$$

Vektorkorrutise algebralised omadused:

Vektorkorrutise algebralised omadused:

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$, vektorkorrutis on kaldsümmeetriline,

Vektorkorrutise algebralised omadused:

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$, vektorkorrutis on kaldsümmeetriline,
2. $(\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y}) \times \vec{z} = \alpha\,\vec{x} \times \vec{z} + \beta\,\vec{y} \times \vec{z}$, vektorkorrutis on lineaarne.

Tõestame ainult esimest omadust.

Vektorkorrutise algebralised omadused:

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$, vektorkorrutis on kaldsümmeetriline,
2. $(\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y}) \times \vec{z} = \alpha\,\vec{x} \times \vec{z} + \beta\,\vec{y} \times \vec{z}$, vektorkorrutis on lineaarne.

Tõestame ainult esimest omadust. On ilmne, et kui vektorid $\vec{x}, \vec{y}$ on kollineaarsed, siis omadus 1 kehtib (võrduse mõlemad pooled on nullvektor). Eeldame, et $\vec{x} \nparallel \vec{y}$.

a) **Pikkus**. On tõestatud, et vektorkorrutise pikkus on võrdne vektoritele ehitatud rööpküliku pindalaga. Järelikult vektorite $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $\vec{y} \times \vec{x}$ pikkused on võrdsed, kuna tegemist on ühe ja sama rööpküliku pindalaga.

b) **Siht**. Vektorid $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $\vec{y} \times \vec{x}$ on kollineaarsed vektorid. Tõepoolest definitsiooni kohaselt mõlemad vektorid on risti vektoritega $\vec{x}, \vec{y}$, seega $\vec{x} \times \vec{y} || \vec{y} \times \vec{x}$,

c) **Suund**. Parema käe reeglist järeldub (vt joonis), et vektorid $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $\vec{y} \times \vec{x}$ on vastassuunalised. Seega $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.

Kaldsümeetrilisuse ja lineaarsuse omadus annab võimaluse vektorkorrutise lihtsustamiseks.

Näide

Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}, \vec{b}$, kus $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ ja $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.
Leida $|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|^2$.

Kaldsümeetrilisuse ja lineaarsuse omadus annab võimaluse vektorkorrutise lihtsustamiseks.

Näide

Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}, \vec{b}$, kus $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ ja $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.
Leida $|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|^2$.
Lihtsustame vektorkorrutist kasutades lineaarsust ja kaldsümmeetrilisust.

$$(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b}) = 2\,\vec{a}\times\vec{a}+4\,\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+2\,\vec{b}\times\vec{b} = 4\,\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b} = 3\,\vec{a}\times\vec{b}.$$

Seega

$$|(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})|^2 = |3\,\vec{a}\times\vec{b}|^2 = 9\,|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\,\sin^2\frac{2\pi}{3} = 9\cdot1\cdot4\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \boxed{27}.$$

Algebra vaatekohalt vektorkorrutamine on algebraline tehe, st vektorkorrutamine seab igale paarile $(\vec{x}, \vec{y})$ vastavusse üheselt määratud vektori $\vec{x} \times \vec{y}$. Seoses sellega kerkib loomulik küsimus, kas on mingi seos kahe kahekordse vektorkorrutise $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$ ja $(\vec{x} \times (\vec{y}) \times \vec{z})$ vahel, nt nad on võrdsed (assotsiatiivsus)?

Algebra vaatekohalt vektorkorrutamine on algebraline tehe, st vektorkorrutamine seab igale paarile $(\vec{x}, \vec{y})$ vastavusse üheselt määratud vektori $\vec{x} \times \vec{y}$. Seoses sellega kerkib loomulik küsimus, kas on mingi seos kahe kahekordse vektorkorrutise $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$ ja $(\vec{x} \times (\vec{y}) \times \vec{z})$ vahel, nt nad on võrdsed (assotsiatiivsus)? Osutub, et vektorkorrutamise korral **assotsiatiivsus ei kehti**, st

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \neq \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}).$$

Algebra vaatekohalt vektorkorrutamine on algebraline tehe, st vektorkorrutamine seab igale paarile $(\vec{x}, \vec{y})$ vastavusse üheselt määratud vektori $\vec{x} \times \vec{y}$. Seoses sellega kerkib loomulik küsimus, kas on mingi seos kahe kahekordse vektorkorrutise $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$ ja $(\vec{x} \times (\vec{y}) \times \vec{z})$ vahel, nt nad on võrdsed (assotsiatiivsus)? Osutub, et vektorkorrutamise korral **assotsiatiivsus ei kehti**, st

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \neq \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}).$$

Märkus. *Hiljem näitame, et kahekordne vektorkorrutis rahuldab Jacobi samasust ja vastavat algebralist struktuuri nimetatakse Lie algebraks. Marius Sophus Lie (1842-1899) oli norra matemaatik. Pindade ja diferentsiaalvõrrandite sümmeetriaid uurides, ta pani aluse pidevate (diferentseeruvate) rühmade (Lie rühmad) teooriale. Ta näitas, et igale Lie rühmale vastab Lie algebra. Ruumi vektorite vektorkorrutamine on kõige lihtsam Lie algebra.*

Leiame, kuidas vektorkorrutise saab arvutada, kui ruumis on antud ristkoordinaadid. Selleks oletame, et ruumis on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Kuna vektorkorrutamise korral orientatsioon on oluline, edaspidi eeldame, et **kõik reeperid on parema käe ristreeperid**.

Teoreem

Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *parema käe ristreeper ja*

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

suvalised vektorid. Vektorkorrutise koordinaadid avalduvad järgmiselt

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Tõestus.

Teoreem

Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *parema käe ristreeper ja*

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

suvalised vektorid. Vektorkorrutise koordinaadid avalduvad järgmiselt

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Tõestus.Arvutame $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$. Selleks kasutame vektorkorrutise definitsiooni. Alustame pikkusest

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = |\vec{e}_1|\,|\vec{e}_2| \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Definitsiooni teine punkt annab $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \perp \vec{e}_1, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \perp \vec{e}_2$, seega $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 || \vec{e}_3$. Rakendame definitsiooni kolmandat punkti (parema käe reegel) ja saame $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \uparrow\uparrow \vec{e}_3$. Arvestades, et pikkused on võrdsed, saame

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3.$$

Analoogiliselt leiame (iseseisvalt kontrollida) $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$. Vektorkorrutise kaldsümmeetrilisuse omadusest järeldub, et $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$. Seega baasivektorite korrutustabel on järgmine

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \\
\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2, \\
\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 &= \vec{0}, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}, \quad \vec{0},\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Nüüd leiame, kuidas vektorkorrutise koordinaadid avalduvad vektorite koordinaatide kaudu. Selleks kasutame vektorkorrutise lineaarsust ja kaldsümmeetrilisust (vt arvutamine).

Analoogiliselt leiame (iseseisvalt kontrollida) $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$. Vektorkorrutise kaldsümmeetrilisuse omadusest järeldub, et $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$. Seega baasivektorite korrutustabel on järgmine

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \\
\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2, \\
\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 &= \vec{0}, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}, \quad \vec{0}, \ \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Nüüd leiame, kuidas vektorkorrutise koordinaadid avalduvad vektorite koordinaatide kaudu. Selleks kasutame vektorkorrutise lineaarsust ja kaldsümmeetrilisust (vt arvutamine).

Järeldus. Kui vektorid $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ on mittekollineaarsed, siis vektoritele $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööpküliku pindala avaldub järgmiselt

$$S = \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_2 z_1 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}.$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3) \times (x_2 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2 + z_2 \cdot \vec{e}_3) =$$

$$= \overset{0}{\cancel{x_1 x_2 \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_1}} + x_1 y_2 \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + x_1 \cdot z_2 \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + y_1 x_2 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_1$$

$$+ \overset{0}{\cancel{y_1 \cdot y_2 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_2}} + y_1 \cdot z_2 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + z_1 x_2 \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + z_1 y_2 \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_2$$

$$+ \overset{0}{\cancel{z_1 \cdot z_2 \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_3}} =$$

$$= (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 +$$

$$+ (z_1 x_2 - z_2 x_1) \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 =$$

$$= (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \vec{e}_3 + (y_1 z_2 - y_2 z_1) \cdot \vec{e}_1 + (z_1 x_2 - z_2 x_1) \cdot \vec{e}_2$$

$$\boxed{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1;\ z_1 x_2 - z_2 x_1;\ x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

Teist järku ruutmaatriksi determinant

Definitsioon

Teist järku ruutmaatriksiks nimetatakse arvutabelit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

kus $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ on suvalised reaalarvud.

Teist järku ruutmaatriksi determinant

Definitsioon

Teist järku ruutmaatriksiks nimetatakse arvutabelit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

kus $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ on suvalised reaalarvud. Teist järku ruutmaatriksi determinandiks nimetatakse arvu

$$|A| = \text{det } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ nimetatakse teist järku ruutmaatriksi elementideks. Elemendid a_{11}, a_{12} (a_{11}, a_{21}) moodustavad maatriksi A esimese rea (esimese veeru) ja elemendid a_{21}, a_{22} (a_{12}, a_{22}) moodustavad teise rea (teise veeru). Seega elemendi a_{ij} esimene alaindeks i näitab, millises reas asub antud element (rea indeks) ja teine j näitab, millises veerus seisab antud element (veeru indeks).

Sageli teist järku ruutmaatriksi A determinanti tähistatakse järgmiselt:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Eespool näitasime, et kehtib valem

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Sageli teist järku ruutmaatriksi A determinanti tähistatakse järgmiselt:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Eespool näitasime, et kehtib valem

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Kasutades teist järku ruutmaatriksi determinandi mõistet, võime kirjutada

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

või

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Eespool tõestatud teoreemist (vt kollineaarsuse tarvilik ja piisav tingimus) ja eelmise slaidi valemitest järeldub, et kehtib väide:

Teoreem

Kaks vektorit $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *on kollineaarsed parajasti siis, kui*

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Definitsioon

Kolmandat järku ruutmaatriksiks nimetatakse arvutabelit

Definitsioon

Kolmandat järku ruutmaatriksiks nimetatakse arvutabelit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Kolmandat järku ruutmaatriksi A determinandiks nimetatakse arvu (vt joonis)

$$\begin{aligned} |A| = \det A \;&=\; a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Definitsioon

Kolmandat järku ruutmaatriksiks nimetatakse arvutabelit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Kolmandat järku ruutmaatriksi A determinandiks nimetatakse arvu (vt joonis)

$$\begin{aligned} |A| = \text{det } A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Kehtib valem

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

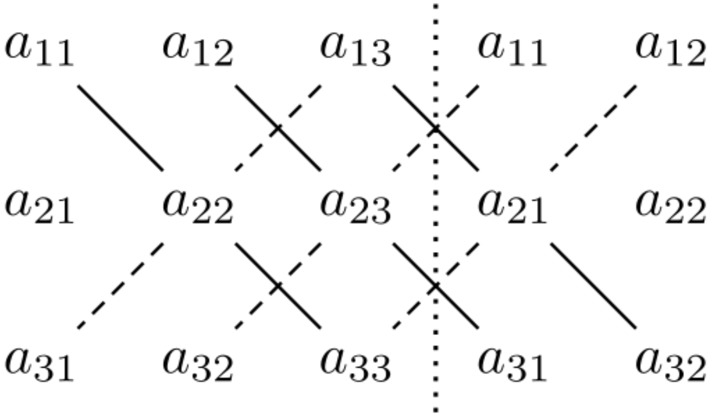


Figure:

Sarruse valem

Teame, et vektorkorrutise korral kehtib valem

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Kasutades kolmandat järku determinandi valemit, võime kirjutada

Teame, et vektorkorrutise korral kehtib valem

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Kasutades kolmandat järku determinandi valemit, võime kirjutada

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Nüüd uurime kahekordset vektorkorrutist $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Teoreem

Suvaliste vektorite korral kehtib valem

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = < \vec{a}, \vec{c} > \ \vec{b} - < \vec{b}, \vec{c} > \ \vec{a}. \tag{1}$$

Tõestus.
Kui vähemalt üks vektor on nullvektor, siis valem kehtib.
Seega üldsust kitsendamata, eeldame $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$.

Tõestus.
Kui vähemalt üks vektor on nullvektor, siis valem kehtib.
Seega üldsust kitsendamata, eeldame $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$.
Valime ruumi parema käe ristreeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nii, et $\vec{e}_1 \uparrow\uparrow \vec{c}$.
See on alati võimalik. Seega $\vec{c} = |\vec{c}|\, \vec{e}_1$.
Järelikult $\vec{c} = (|\vec{c}|, 0, 0)$. Olgu $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Kasutame vektorkorrutise koordinaatide arvutamise valemit

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Rakendades veel kord sama valemit, leiame

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = |\vec{c}| \left(0; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right).$$

Nüüd arvutame valemi (1) parempoolel asetseva vektori koordinaadid

$$\begin{aligned} <\vec{a}, \vec{c}> \vec{b} - <\vec{b}, \vec{c}> \vec{a} &= |\vec{c}|\, x_1\, (x_2; y_2; z_2) - |\vec{c}|\, x_2\, (x_1; y_1; z_1) \\ &= |\vec{c}|\, (0; x_1 y_2 - x_2 y_1; x_1 z_2 - x_2 z_1). \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Jacobi samasus

Kasutame teoreemis tõestatud valemit

Jacobi samasus

Kasutame teoreemis tõestatud valemit

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= <\vec{a}, \vec{c}> \vec{b} - <\vec{b}, \vec{c}> \vec{a}, \\
(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= <\vec{b}, \vec{a}> \vec{c} - <\vec{c}, \vec{a}> \vec{b}, \\
(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} &= <\vec{c}, \vec{b}> \vec{a} - <\vec{c}, \vec{b}> \vec{c}.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.}$$

Ülalpool kirjutatud samasust nimetatakse Jacobi samasuseks.

$$\boxed{\text{vektorruum } \mathbf{E}^3 + \text{ vektorkorrutamine } = \textbf{Lie algebra}}$$

Vektorkorrutise rakendused

Vektorkorrutist kasutatakse teoreetilises füüsikas, mehaanikas ja tehnikas. Olgu ruumis antud punkt O (tavaliselt selleks punktiks on koordinaadisüsteemi alguspunkt). Kui A on ruumi mingi teine punkt, $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ on punkti A kohavektor ja punktile A on rakendatud jõud $\vec{F}$ (A on jõu $\vec{F}$ rakenduspunkt), siis jõumomendiks punkti O suhtes nimetatakse vektorit

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Füüsikas punkti A kohavektorit $\vec{r}$ nimetatakse jõu $\vec{F}$ õlaks. Jõumomendi suurus on vektori $\vec{M}$ pikkus. Kui $\vec{F} \perp \vec{r}$, siis jõumomendi suurus on $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}|$, st jõumomendi suurus arvutatakse jõu õla ja jõu suuruse korrutisena. Näiteks, $|\vec{r}| = 3m, |\vec{F}| = 2N$ ja jõumomendi suurus on $6Nm$. Sama jõumomendi suurus tekib, kui $|\vec{r}| = 6m, |\vec{F}| = 1N$.

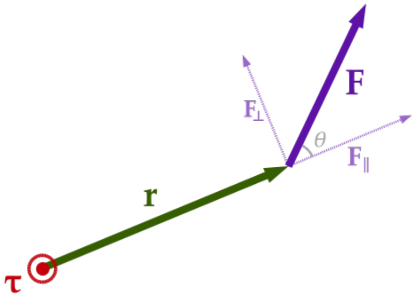


Figure: A particle is located at position $\vec{r}$ relative to its axis of rotation. When a force $\vec{F}$ is applied to the particle, only the perpendicular component $\vec{F}_\perp$ produces a torque. This torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ has magnitude $|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}_\perp| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\theta$ and is directed outward from the page.

Eksami küsimused

1. Vektorkorrutise definitsioon. Teoreem vektorite kollineaarsusest. Teoreem rööpküliku pindalast.
2. Vektorkorrutise omadused. Teoreem vektorkorrutise koordinaatidest. Teist ja kolmandat järku determinandi mõiste.
3. Teoreem kahekordsest vektorkorrutisest. Jacobi samasus.