Analüütiline geomeetria

VII loeng. Tasandi võrrandid.

Sügissemester 2016

Antud paragrahvis eukleidilise ruumi dimensioon võrdub kolmega, st meie vaatleme eukleidilist ruumi E^3. Paragrahvi uurimisobjekt on tasand ja eesmärk on leida, kuidas tasandit saab kirjeldada ja uurida võrrandite abil, kui ruumis on antud koordinaadisüsteem (reeper). Tasand on pinna erijuht. Pinna võrrandi leidmiseks on kaks lähenemist:

1. parameetriline võrrand;
2. ilmutamata võrrand.

Alustame pinna parameetrilisest võrrandist. Pinna parameetriliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\begin{aligned} x &= \psi(u,v), \\ y &= \chi(u,v), \\ z &= \xi(u,v), \end{aligned}$$

kus $\psi(u,v), \chi(u,v), \xi(u,v)$ on kahemuutuja funktsioonid ja u, v on pinna parameetrid ning $a \leq u \leq b,\ c \leq v \leq d$ on pinna parameetrilise võrrandi määramispiirkond. Kasutades pinna punkti kohavektorit, võime pinna parameetrilise võrrandi kirjutada kujul

$$\vec{r}(u,v) = (\psi(u,v), \chi(u,v), \xi(u,v)).$$

Tasand on üheselt määratud, kui

1. on antud tasandi punkt A;
2. on antud kaks mittekollineaarset vektorit $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Leidub üks ja ainult üks tasand $\mathfrak{P}$ selline, et ta läbib punkti A ja on paralleelne vektoritega $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ moodustavad tasandi rihi.
Tuletame tasandi $\mathfrak{P}$ parameetrilise võrandi, kui on antud tasandi punkt A ja tasandi riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$.
Eeldame, et ruumis on antud reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Olgu X tasandi suvaline punkt ja $\vec{r}$ selle punkti kohavektor. Olgu $\vec{r}_0$ tasandi punkti A kohavektor.
On ilmne, et $\vec{r} - \vec{r}_0$ on tasandi vektor. Seega (vt teise loengu materjalid)

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = u\,\vec{r}_1 + v\,\vec{r}_2,$$

kus reaalarvud u, v on üheselt määratud. Tasandi $\mathfrak{P}$ parameetriliseks vektorvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + u\,\vec{r}_1 + v\,\vec{r}_2,}$$

kus u, v on tasandi parameetrid.

Kui $A(x_0, y_0, z_0), X(x, y, z), \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis tasandi parameetriline vektorvõrrand on samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x = & x_0 + x_1\,u + x_2\,v, \\ y = & y_0 + y_1\,u + y_2\,v, \\ z = & z_0 + z_1\,u + z_2\,v. \end{cases} \tag{1}$$

Võrrandisüsteemi (1) nimetatakse tasandi parameetriliseks võrrandiks. Tasandi parameetrilise võrrandi võime kirjutada ka kujul

$$\vec{r}(u, v) = (x_0 + x_1\,u + x_2\,v, y_0 + y_1\,u + y_2\,v, z_0 + z_1\,u + z_2\,v).$$

Tasandi parameetriline vektorvõrrand on tuletatud tingimusel, et on antud tasandi punkt A ja riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$. Moodustame kolmiku $\{A; \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$. Antud kolmikut võime vaadelda tasandi reeperina. Tasandi reeper määrab tasandi koordinaadisüsteemi, kus A on alguspunkt ja $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ on koordinaattelgede sihivektorid. Parameetrid u, v on tasandi punkti koordinaadid reeperi $\{A; \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ poolt tekitatud koordinaadisüsteemis.

Pinna ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit $F(x, y, z) = c$, kus $F(x, y, z)$ on ruumi koordinaatide kolmemuutuja funktsioon ja c on reaalarv. Pinna punktid on ruumi need punktid, mille koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit. Leiame tasandi ilmutamata võrrandi. Tasand on üheselt määratud, kui

1. on antud tasandi punkt A;
2. on antud nullvektorist erinev vektor $\vec{N} \neq \vec{0}$.

Leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib punkti A ja on risti vektoriga $\vec{N}$. Vektorit $\vec{N}$ nimetatakse tasandi normaalvektoriks. Tuletame tasandi vektorvõrrandi, kui on antud tasandi punkt A ja tasandi normaalvektor $\vec{N}$. Eeldame, et ruumis on antud ristreeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Olgu X tasandi suvaline punkt ja $\vec{r}$ tema kohavektor. Olgu $\vec{r}_0$ punkti A kohavektor. Suvalise tasandi punkti X korral kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$. Järelikult

$$\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} >= 0.} \tag{2}$$

Leitud võrrandit (2) nimetatakse tasandi vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu. Kui on antud tasandi riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$, siis võime kasutada rihi vektorite vektorkorrutist $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ tasandi normaalvektorina.

Tõepoolest vektorkorrutis on risti nii vektoriga $\vec{r}_1$, kui ka vektoriga $\vec{r}_2$. Järelikult ta on risti tasandi mistahes vektoriga. Seega tasandi suvalise punkti X korral kehtib

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0.} \qquad (3)$$

Võrrandit (3) nimetatakse tasandi vektorvõrrandiks rihi kaudu. Nüüd kasutame ruumi reeperit ja eeldame, et on antud tasandi punkti A kohavektori $\vec{r}_0$ ja normaalvektori $\vec{N}$ koordinaadid, st $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{N} = (A, B, C)$. Tasandi vektorvõrrandi kuju vektorite $\vec{r}_0, \vec{N}$ koordinaatide kaudu on järgmine

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0.$$

Leitud võrrandi võime kirjutada kujul

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,} \qquad (4)$$

kus $D = -A\,x_0 - B\,y_0 - C\,z_0$. Tasandi võrrandit (4) nimetatakse tasandi üldvõrrandiks. See on tasandi ilmutamata võrrand. Näeme, et tasandi korral pinna ilmutamata võrrandi $F(x, y, z) = c$ vasakpool on **lineaarfunktsioon**.

Tasandi üldvõrrand sisaldab geomeetrilist informatsiooni tasandi kohta, nt võrrandi kordajad A, B, C moodustavad tasandi normaalvektori, st $\vec{N} = (A, B, C)$.

Näide

Koostada tasandi üldvõrrand, kui tasand läbib punkti $A(4, -2, 1)$ ja tasandi normaalvektor on $\vec{N} = (5, 3, -6)$.
Lahendus. Kasutame tasandi üldvõrrandit kujul

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Seega

$$5\,(x-4) + 3\,(y+2) - 6\,(z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\,x + 3\,y - 6\,z - 8 = 0.$$

Olgu antud tasandi $\mathfrak{P}$ üldvõrrand $Ax + By + Cz + D = 0$. Leiame selle tasandi parameetrilise võrrandi. Selleks peab olema leitud tasandi punkt ja kaks mittekollineaarset vektorit (riht). Tasandi punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit $Ax + By + Cz + D = 0$, seega tuleb leida selle võrrandi üks lahend.

Kuna tasandi normaalvektor $\vec{N} = (A, B, C)$ on nullvektorist erinev vektor, tasandi võrrandi kordajatest A, B, C vähemalt üks on nullist erinev. Olgu $A \neq 0$. Lahendame järgmiselt: olgu $y = z = 0$, siis tasandi võrrand on $A\,x = -D$, selle lahend on $x = -\frac{D}{A}$. Seega tasandi punkt on leitud, see on $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$. Leiame tasandi kaks mittekollineaarset vektorit. Tasandi mistahes vektor on risti tasandi normaalvektoriga. Järelikult otsitavate vektorite koordinaadid $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ peavad rahuldama võrrandit

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0.$$

Eelduse kohaselt $A \neq 0$. Leiame

$$\alpha_1 = -\frac{B}{A}\alpha_2 - \frac{C}{A}\alpha_3.$$

Võrrandi lahendid on leitud, nad moodustavad lahendite parve, kus parve parameetrid on α_2, α_3. Moodustame nullist erineva teist järku determinandi, nt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Esimese lahendi saame, kui $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$ ja teise, kui $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$. Seega vektorid

$$\vec{r}_1 = (-\frac{B}{A}, 1, 0), \quad \vec{r}_2 = (-\frac{C}{A}, 0, 1),$$

on tasandi mittekollineaarsed vektorid.

Teoreem

Kui tasandi üldvõrrand on $Ax + By + Cz + D = 0$, siis kaks mittekollineaarset vektorit

$$\vec{r}_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad \vec{r}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

sellised, et nende koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0,$$

moodustavad tasandi rihi.

Näide

Koostada tasandi parameetriline võrrand, kui tasandi üldvõrrand on $2x - 3y + z + 1 = 0$.

Vastus: $\vec{r}(u, v) = (u, v, -1 - 2u + 3v)$.

Teoreem

Olgu antud kaks tasandit

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$$

Tasandid on paralleelsed parajasti siis, kui leidub arv λ selline, et

$$A_2 = \lambda\, A_1, \;\; B_2 = \lambda\, B_1, \;\; C_2 = \lambda\, C_1. \tag{5}$$

Tasandid ühtivad parajasti siis, kui lisaks valemitele (5) kehtib $D_2 = \lambda\, D_1$.

Tõestus.

Tarvilikus. Olgu tasandid paralleelsed. Siit järeldub, et tasandite normaalvektorid on kollineaarsed. Seega $\vec{N}_2 || \vec{N}_1$, kus $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2), \vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$. Vektorite kollineaarsuse tingimuse tõttu leidub arv λ selline, et $\vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_1$. Siit järeldub (5). Olgu tasandid ühtivad. Siis teise tasandi võrrand on $\lambda (A_1 x + B_1 y + C_1 z) + D_2 = 0$. Olgu $P(x_0, y_0, z_0)$ tasandite ühine punkt. Kehtib

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0, \quad \lambda (A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0) + D_2 = 0.$$

Järelikult $\lambda(-D_1) + D_2 = 0$ ja $D_2 = \lambda D_1$.

Piisavus. Olgu kehtib (5) ja $D_2 = \lambda D_1$. On ilmne, et võrrandid

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$$

on ekvivalentsed ja nende lahendihulgad ühtivad. Seega ka vastavad tasandid ühtivad.

Kui on täidetud tingimus (5), siis eespool tõestatud teoreemist järeldub, et tasandite rihi vektorid rahuldavad võrrandit

$$A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3 = 0.$$

Seega kui on leitud rihi vektorid, siis nad on on nii esimese, kui ka teise tasandi rihi vektorid. Seega tasandid on paralleelsed.

Tasandite paralleelsuse tingimuse (5) võime kirjutada ka kujul $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = 0$. Seega tasandid on paralleelsed parajasti siis, kui

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Kui tasandid ei ole paralleelsed, siis nad lõikuvad ja lõikejoon on sirge. Seega kui tasandite võrrandid on

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

ja tasandid ei ole paralleelsed, siis lõikejoon on sirge ning selle sirge punktide koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = & 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = & 0. \end{cases} \tag{6}$$

Eelduse kohaselt tasandid ei ole paralleelsed, järelikult kehtib

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0.$$

Leiame sirge punkti ja sihivektori, kui sirge on määratud tasandite võrranditest moodustatud võrrandisüsteemiga. Olgu

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Võrrandisüsteemis (6) vabalt fikseerime koordinaadi z väärtise, nt võtame $z = 0$. Siis

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = & 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = & 0. \end{cases}$$

Kui lineaarvõrrandisüsteemi (7) peadeterminant on nullist erinev, st

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

siis leidub antud võrrandisüsteemi üks ja ainult lahend.

Olgu x_0, y_0 võrrandisüsteemi (7) lahend. Siis punkt $P(x_0, y_0, 0)$ on sirge punkt ja selle punkti võtame sirge alguspunktiks. Nüüd leiame sirge sihivektori. Tuletame meelde, et vektorid $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ on tasandite normaalvektorid. Järelikult tasandite lõikesirge sihivektor on risti nii $\vec{N}_1$, kui ka $\vec{N}_2$. Siit järeldub, et normaalvektorite **vektorkorrutis** $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ on kollineaarne lõikesirge sihivektoriga. Seega vektor $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ sobib lõikesirge sihivektoriks.

Teoreem

Olgu sirge kahe tasandi lõikesirge, st

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = & 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = & 0. \end{cases}$$

Vektor

$$\vec{s} = (\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix})$$

on lõikesirge sihivektor.

Näide

On antud tasandid $3x+y-z+1=0, \;\; 5x+3y+z+2=0$. Kas tasandid on paralleelsed? Koostada lõikesirge kanooniline võrrand.

Vastus: $\frac{x}{1}=\frac{y+3/4}{-2}=\frac{z-1/4}{1}$.

Kui ruumi kolm punkti P,Q,R ei asu ühisel sirgel, siis need punktid määravad tasandit, st leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib vastavaid punkte P,Q,R. Leiame selle tasandi üldvõrrandi, kui on antud punktide P,Q,R koordinaadid. Olgu $P(x_0,y_0,z_0), Q(x_1,y_1,z_1), R(x_2,y_2,z_2)$. Tasandi üldvõrrandi leidmiseks kasutame tasandi vektorvõrrandit rihi vektorite kaudu

$$(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{r}_1,\vec{r}_2)=0.$$

Kuna P,Q,R on tasandi punktid, vektorid $\vec{r}_1=\overrightarrow{PQ}, \vec{r}_2=\overrightarrow{PR}$ moodustavad tasandi rihi. Tasandi alguspunktiks võtame punkti P ja selle kohavektorit tähistame $\vec{r}$. Kehtib

$$\begin{aligned}
\vec{r}-\vec{r}_0 &= (x-x_0, y-y_0, z-z_0),\\
\vec{r}_1 &= (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0),\\
\vec{r}_2 &= (x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0).
\end{aligned}$$

Vektorvõrrandi vasakpool on kolme vektori segakorrutis, kuid vektorite segakorrutis on võrdne vektorite koordinaatidest moodustatud kolmandat järku determinandiga. Seega tasandi üldvõrrand on

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Näide

Koostada tasandi üldvõrrand, kui tasand läbib punkte $P(2, 1, 3), Q(-1, 2, 5), R(3, 1, 0)$.

Vastus: $2y - z + 1 = 0.$

Olgu antud tasandi $\mathfrak{P}$ vektorvõrrand $(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$ ja ruumi punkt $M \notin \mathfrak{P}$. Punkti M kohavektorit tähistame $\vec{R}$.
Leiame punkti M kauguse d tasandini $\mathfrak{P}$. Selleks vaatleme vektoritele $\vec{R}-\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööptahukat.
Selle rööptahuka põhi on vektoritele $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööpkülik $\mathfrak{R}$. Kaugus d on võrdne rööptahuka kõrgusega, st d on tipust M rööpkülikule $\mathfrak{R}$ tõmmatud kõrgus.
Kõrguse leidmiseks kasutame valemit

$$d = \frac{V}{S},$$

kus V on rööptahuka ruumala ja S on rööpküliku $\mathfrak{R}$ pindala. Rööptahuka ruumala V on võrdne vektorite $\vec{R}-\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ segakorrutise absoluutväärtusega ja rööpküliku pindala S on võrdne vektorite $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ vektorkorrutise pikkusega. Seega

$$d = \frac{|(\vec{R}-\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}. \tag{7}$$

Vektorkorrutis $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ on tasandi normaalvektor, tähistame $\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (A, B, C)$.

Kasutades normaalvektorit, võime valemi (7) kirjutada kujul

$$d = \frac{| < \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} > |}{|\vec{N}|}.$$

Olgu $M(x_1, y_1, z_1)$, st $\vec{R} = (x_1, y_1, z_1)$. Leiame

$$< \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} > = < \vec{R}, \vec{N} > - < \vec{r}_0, \vec{N} > = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

kus $D = - < \vec{r}_0, \vec{N} >$. Seega kauguse arvutamise valem on

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Näide

Leida punkti $A(3, 1, -1)$ kaugus tasandini $x - y - 5z + 2 = 0$.

Vastus: $d = \sqrt{3}$.

Eksami küsimused

1. Pinna parameetriline võrrand. Tasandi parameetriline vektorvõrrand ja parameetriline võrrand koordinaatides.
2. Tasandi vektorvõrrand tasandi normaalvektori ja tasandi rihi kaudu. Tasandi üldvõrrand. Tasandi võrrand, kui ta läbib kolme punkti.
3. Teoreem tasandi rihist, kui on antud tasandi üldvõrrand.
4. Tasandite paralleelsuse tarvilik ja piisav tingimus.
5. Teoreem kahe tasandi lõikesirge sihivektorist.
6. Punkti kaugus tasandini.