Diskreetne matemaatika I

Kevad 2021

Lektor: Kati Ain

Konspekt: Valdis Laan

19. veebruar 2021. a.

Sisukord

1 Matemaatiline loogika **7**

1.1 Lausearvutus . . . 8

1.1.1 Põhimõistete meeldetuletamine . . . 8

1.1.2 Tõesuspuud . . . 14

1.2 Predikaatarvutus . . . 18

1.2.1 Indiviidid ja predikaadid . . . 18

1.2.2 Kvantorid . . . 20

1.2.3 Predikaatarvutuse süntaks . . . 21

1.2.4 Signatuuri interpretatsioonid . . . 25

1.2.5 Valemite omadused . . . 30

1.2.6 Tõesuspuu predikaatarvutuses . . . 31

1.2.7 Valemite samaväärsus. Predikaatloogika põhisamaväärsused . . . 34

1.2.8 Valemi prefikskuju . . . 41

1.3 Aksiomaatilised teooriad . . . 44

1.3.1 Aksiomaatilise teooria üldskeem . . . 44

1.3.2 Sekventsiaalne lausearvutus . . . 47

1.3.3 Sekventsiaalse lausearvutuse korrektsus ja täielikkus . . . 49

1.3.4 Peano aritmeetika . . . 52

1.3.5 Naturaalarvude omadused . . . 54

2 Graafiteooria **61**

2.1 Graafi mõiste . . . 61

2.2 Ahelad ja tsüklid . . . 67

2.3 Graafi sidusus . . . 70

2.4 Graafide isomorfism . . . 75

2.5 Euleri ja Hamiltoni graafid . . . 78

2.6 Puud . . . 82

2.6.1 Puude põhiomadused . . . 82

2.6.2 Toespuud . . . 85

2.7 Suunatud graafid . . . 92

2.7.1 Suunatud graafide põhiomadused . . . 92

2.7.2 Lühima tee leidmise ülesanne . . . 99

Eessõna

Tegemist on Tartu Ülikooli 2020. a. kevadsemestri kursuse “Diskreetne matemaatika I” loengukonspektiga. Lisaks sellele konspektile on kasulik tutvuda ka muude õppematerjalidega. Iseäranis kasulik on lugeda õpikuid [9], [10] ja [13].

Kursus (nagu ka loengukonspekt) koosneb kahest poolest: sissejuhatusest matemaatilisse loogikasse ja graafiteooria elementidest. Kuna suur osa kursuse kuulajatest on informaatika eriala üliõpilased, siis on oluline osa selles kursuses algoritmidel. Samas on tegemist siiski matemaatika kursusega ja selle tõttu on enamus väiteid esitatud koos tõestusega. Lugejalt eeldatakse matemaatika põhimõistete (hulk, alamhulk, kujutus, binaarne seos, ekvivalentsiseos jt.) tundmist.

Konspekti tekstist võib leida mõned märkused, mille tekst on muust tekstist väiksem. Nende märkuste lugemine ei ole muust materjalist aru saamiseks hädavajalik. Need märkused on mõeldud eelkõige neile, kes soovivad materjaliga sügavamalt tutvuda.

Konspekti lõpust võib leida nimekirja allikatest, mida on selle teksti koostamisel kasutatud.

Soovin tänada Reimo Palmi, Ago-Erik Rieti ja Uno Hämarikku arvukate asjalike märkuste eest, mis on aidanud konspekti kvaliteeti parandada. Ka mitmed üliõpilased on konspektist vigu leidnud ja parandusettepanekuid teinud, tänud neilegi.

Loengute ajakava

1. nädal. Lausearvutuse põhimõistete kordamine. Tõesuspuud.
2. nädal. Indiviidid, predikaadid ja kvantorid. Predikaatarvutuse valemid.
3. nädal. Predikaatarvutuse valemi tõeväärtus. Valemite omadused.
4. nädal. Predikaatarvutuse valemite samaväärsus. Predikaatloogika põhisamaväärsused.
5. nädal. Predikaatloogika põhisamaväärsuste tõestamine. Valemi prefikskuju.
6. nädal. Aksiomaatilise teooria üldskeem. Sekventsiaalne lausearvutus.
7. nädal. Sekventsiaalse lausearvutuse korrektsus ja täielikkus. Peano aksioomid.
8. nädal. Naturaalarvude omaduste tõestamine.
9. nädal. Graafi mõiste. Tipu aste. Tipuastmete teoreem. Ahelad ja tsüklid.
10. nädal. Graafi sidusus. Graafide isomorfism.
11. nädal. Euleri ja Hamiltoni graafid.
12. nädal. Puud.
13. nädal. Toespuud. Kruskali ja Primi algoritm.
14. nädal. Suunatud graafid.
15. nädal. Lühima tee leidmise ülesanne. Floydi–Warshalli algoritm.
16. nädal. Dijkstra algoritm.

Peatükk 1

Matemaatiline loogika

Kursuse esimeses pooles tutvume mõnede teemadega matemaatilisest loogikast. Kordame üle lausearvutuse põhimõisted, teeme sissejuhatuse predikaatloogikasse ning tutvume aksiomaatilise teooria ideega, muuhulgas vaatleme sekventsiaalset lausearvutust ja näitame, kuidas saab aksiomaatiliselt konstrueerida naturaalarvud (nn. Peano aksiomaatika).

Loogika uurimisega tegeleti juba Vanas-Kreekas (Aristoteles[1]). Matemaatilisest loogikast kui matemaatika ühest harust saab rääkida alates 19. sajandi keskpaigast, kui George Boole[2] kirjutas teosed "Loogika matemaatiline analüüs" (1847) ja "Mõtlemise reeglid" (1854). Ta andis lausearvutusele süsteemse, matemaatilise kuju. Sarnaseid ideid arendas Augustus de Morgan[3] oma teoses "Formaalloogika" (1847). Muuhulgas võttis ta 1838. aastal kasutusele mõiste *matemaatiline induktsioon*. Kõige olulisemaks 19. sajandi loogikaraamatuks võib pidada Gottlob Frege[4] 1879. aastal avaldatud saksakeelset teost *"Begriffschrift"* (võiks tõlkida: "Mõistete tähistamine" või isegi "Valemkeel"), kus ta lõi esimest järku predikaatarvutuse, küll pisut kohmakal kujul. 1888. aastal avaldas Giuseppe Peano[5] naturaalarvude aritmeetika aksioomid, mida tänaäeval tunnemegi Peano aksioomidena. 20. sajandi algul oli suur mõju nii loogika kui kogu matemaatika arengule David Hilberti[6] töödel. Väga olulised olid ka Kurt Gödeli[7] tulemused (Gödeli mittetäielikkuse teoreemid) ja Gerhard Gentzeni[8] tööd sekventsiaalse lause- ja predikaatarvutuse vallas. Loogika ajaloo kohta on võimalik pikemalt lugeda eestikeelsest raamatust [13].

[1] Aristoteles (384–322 e.m.a.) — vanakreeka filosoof

[2] George Boole (1815–1864) — inglise matemaatik

[3] Augustus de Morgan (1806–1871) — inglise matemaatik

[4] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925) — saksa matemaatik ja filosoof

[5] Giuseppe Peano (1858–1932) — itaalia matemaatik

[6] David Hilbert (1862–1943) — saksa matemaatik

[7] Kurt Friedrich Gödel (1906–1978) — austria-ameerika loogik, matemaatik ja filosoof

[8] Gerhard Karl Erich Gentzen (1909–1945) — saksa matemaatik

1.1 Lausearvutus

1.1.1 Põhimõistete meeldetuletamine

Lausearvutuse põhimõistetega on lugeja tutvunud kursuses "Matemaatiline maailmapilt". Selles paragrahvis tuletame kõik olulisemad mõisted lühidalt meelde.

Lausearvutuse uurimisobjektideks on laused, millele saab vastavusse seada tõeväärtuse ("tõene" või "väär"), mida antud kursuse jooksul tähistame sümbolitega 1 ja 0 (levinud on ka tähistus t ja v). Eeldatakse, et vaadeldavad laused rahuldavad järgmisi tingimusi.

Välistatud kolmanda seadus. Iga lause on kas tõene või väär.

Mittevasturääkivuse seadus. Ükski lause ei saa olla korraga tõene ja väär.

Keerulisemad laused jagatakse lihtlauseteks ja neid ühendavateks grammatilisteks seosteks. Lihtlausete tähistamiseks kasutatakse suuri ladina tähti A, B, C jne., mida nimetatakse **lausemuutujateks**. Grammatilistele seostele vastavad **lausearvutuse tehted**.

Liitlausete kohta tehakse veel järgmised eeldused.

- Liitlauseid võib moodustada suvalistest komponentlausetest, eeldamata nendevahelist sisulist seost.
- Liitlause tõeväärtus sõltub ainult komponentlausete tõeväärtustest, mitte sisust.

Tähtsamad lausearvutuse tehted on ära toodud järgmises tabelis.

tehte nimi	tähis	grammatiline seos
eitus	$\neg$	ei
konjunktsioon	$\&, \wedge$	ja
disjunktsioon	$\vee$	või (mittevälistav)
implikatsioon	$\Rightarrow, \rightarrow, \supset$	kui ..., siis ...
ekvivalents	$\Leftrightarrow, \leftrightarrow, \sim$	... parajasti siis, kui ...

Märkus 1.1 Lausearvutuse tehteid märgitakse erinevates allikates erinevate sümbolitega. Matemaatilise maailmapildi kursuses kasutati tähiseid $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Raamatus [9] on kasutusel komplekt $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Käesolevas kursuses me eelistame sümboleid $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Lausearvutuse valemid on teatud formaalsed avaldised, mis moodustatakse lausemuutujatest, tehtemärkidest $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ ja sulgudest, mis aitavad kindlaks määrata tehete järjekorda. Täpne definitsioon on järgmine.

Definitsioon 1.2 Lausearvutuse valemid on parajasti need avaldised, mida saab koostada järgmiste reeglite abil.

1. Iga lausemuutuja on lausearvutuse valem.
2. Kui $\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem, siis ka $\neg\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem.
3. Kui $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid, siis ka $(\mathcal{F}\&\mathcal{G}), (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}), (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})$ ja $(\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G})$ on lausearvutuse valemid.

Valemi konstrueerimise viimasel sammul kasutatud tehet nimetatakse selle valemi **peatehteks**.

Mõnikord on otstarbekas lubada valemites ka konstante 1 ja 0. Sellisel juhul asendatakse valemi definitsioonis tingimus 1 tingimusega

$1'$. Iga lausemuutuja on lausearvutuse valem ning tõeväärtused 1 ja 0 on lausearvutuse valemid.

Et vähendada sulgude arvu valemi kirjapanekus, tehakse järgmised kokkulepped.

1) Tehete prioriteet kõrgeimast madalaimani on $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

2) Kui mitme liikme konjunktsioonis või disjunktsioonis sooritatakse tehteid vasakult paremale, siis võib tehete järjekorda täpsustavatest sulgudest loobuda.

3) Valemi välimised sulud võib ära jätta.

Näide 1.3 Valem

$$A \wedge \neg B \wedge (C \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow B \vee A$$

on moodustatud valemitest $A \wedge \neg B \wedge (C \Rightarrow \neg A)$ ja $B \vee A$ tehte $\Leftrightarrow$ abil. Seega selle valemi peatehe on $\Leftrightarrow$.

Lausearvutuse valemeid tähistame harilikult tähtedega $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$. Kui tahame rõhutada, et valem $\mathcal{F}$ on koostatud kasutades näiteks lausemuutujaid X, Y, Z, siis kirjutame $\mathcal{F}(X, Y, Z)$.

Kui lausemuutuja X on tõene, siis kirjutame $X = 1$. Kui lausemuutuja X on väär, siis kirjutame $X = 0$. Kui meil on vaatluse all mingi lõplik hulk lausemuutujaid ja me omistame igale muutujale kindla tõeväärtuse, siis sellist tõeväärtuste komplekti nimetatakse nende muutujate **väärtustuseks**. (Formaalselt võib öelda, et lausemuutujate $X_1, X_2, \ldots, X_n$ väärtustus on hulga $\{0,1\}^n$ element, s.t. n-elemendiline järjend nullidest ja ühtedest.) Kui lausemuutujaid on n tükki, siis nende väärtustusi on sama palju, kui on hulgas $\{0,1\}^n$ elemente, s.t. 2^n tükki.

Valemi tõeväärtuse leidmiseks muutujate väärtustuse korral kasutame järgnevat definitsiooni.

Definitsioon 1.4 Olgu fikseeritud lausearvutuse valemis $\mathcal{F}$ leiduvate lausemuutujate mingi väärtustus. Kui $\mathcal{F}$ on lausemuutuja, siis **valemi $\mathcal{F}$ tõeväärtuseks** loetakse sellele muutujale antud tõeväärtus. Kui $\mathcal{F}$ sisaldab vähemalt ühte lausearvutuse tehet, siis **valemi $\mathcal{F}$ tõeväärtus** leitakse järgmiste reeglite abil.

1. Kui $\mathcal{F} = \neg\mathcal{G}$, siis $\mathcal{F} = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G} = 0$.

2. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \,\&\, \mathcal{H}$, siis $\mathcal{F} = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G} = 1$ ja $\mathcal{H} = 1$.

3. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \vee \mathcal{H}$, siis $\mathcal{F} = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G} = 1$ või $\mathcal{H} = 1$.

4. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$, siis $\mathcal{F} = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G} = 0$ või $\mathcal{H} = 1$.

5. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{H}$, siis $\mathcal{F} = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G} = 1$ ja $\mathcal{H} = 1$ või $\mathcal{G} = 0$ ja $\mathcal{H} = 0$.

Definitsioonis 1.4 antud reeglid võib esitada tabeli kujul järgmiselt:

$\mathcal{G}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{G}\&\mathcal{H}$	$\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$	$\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$	$\mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{H}$	$\neg\mathcal{G}$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

.

Näide 1.5 Leiame valemi

$$\mathcal{F}(A, B) = \ A \Rightarrow A\&B$$

tõeväärtuse väärtustusel $A = 1, B = 0$. Definitsiooni 1.4 punkti 2 põhjal on $A\&B = 0$. Sama definitsiooni punkti 4 põhjal on $A \Rightarrow A\&B = 0$, s.t. valem $\mathcal{F}$ on väär sellel väärtustusel. Põhimõtteliselt võiks selle arutluskäigu sümbolkujul kirja panna järgmiselt:

$$\mathcal{F}(1, 0) = \ 1 \Rightarrow 1\&0 \ = \ 1 \Rightarrow 0 \ = \ 0,$$

s.t. võiksime lausemuutujate asemele kirjutada nende tõeväärtused ja sooritada tõeväärtuste vahel vajalikud tehted vastavalt eelnevale tabelile.

Märkus 1.6 Mainime, et lausearvutuse valemi tõeväärtuse leidmine on väga sarnane sellega, kuidas leitakse algebralise avaldise väärtus muutujate mingite konkreetsete väärtuste korral. Näiteks kui meil on avaldis

$$f(x, y) = x + x \cdot y,$$

siis tema väärtus $x = 2, y = 5$ korral on reaalarv

$$f(2, 5) = 2 + 2 \cdot 5 = 2 + 10 = 12.$$

Selle väärtuse saame asendades avaldisse muutujate asemele nende väärtused ja sooritades tehted.

Kui kirjutame lausearvutuse valemi muutujate kõikvõimalikud väärtustused üksteise alla ja arvutame iga väärtustuse korral välja valemi tõeväärtuse, siis saame tabeli, mida kutsutakse antud valemi **tõeväärtustabeliks**. Näiteks valemi

$$\mathcal{F} = (A \Rightarrow B\&C) \vee \neg(A \vee \neg(B \vee C))$$

tõeväärtustabel on

A	B	C	$(A$	$\Rightarrow$	$(B$	$\&$	$C))$	$\vee$	$\neg$	$(A$	$\vee$	$\neg$	$(B$	$\vee$	$C))$
1	1	1		1		1		1	0		1	0		1	
1	1	0		0		0		0	0		1	0		1	
1	0	1		0		0		0	0		1	0		1	
1	0	0		0		0		0	0		1	1		0	
0	1	1		1		1		1	1		0	0		1	
0	1	0		1		0		1	1		0	0		1	
0	0	1		1		0		1	1		0	0		1	
0	0	0		1		0		1	0		1	1		0	

.

Sellest tabelist näeme näiteks, et valemi $\mathcal{F}$ tõeväärtus väärtustusel $(1, 0, 1)$ on 0.

Iga n muutujat sisaldav lausearvutuse valem $\mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n)$ määrab ära ühe kujutuse

$$f(X_1, \ldots, X_n) : \{1, 0\}^n \to \{1, 0\},$$

mis igale muutujate väärtustusele $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{1, 0\}^n$ seab vastavusse valemi tõeväärtuse sellel väärtustusel. Kujutusi

$$\{1, 0\}^n \to \{1, 0\}$$

nimetatakse n-kohalisteks **Boole'i funktsioonideks**.

Näide 1.7 Valem $\mathcal{F}(X, Y) = X\&Y$ määrab ära Boole'i funktsiooni

$$\begin{aligned} (1, 1) &\mapsto 1, \\ (1, 0) &\mapsto 0, \\ (0, 1) &\mapsto 0, \\ (0, 0) &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Arvutamisel võiksime põhimõtteliselt kirjutada näiteks, et $f(1, 0) = 1\&0 = 0$.

Märkus 1.8 Formaalselt võib lausemuutujate $X_1, \ldots, X_n$ väärtustust $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ vaadelda kui kujutust

$$\alpha : \{X_1, \ldots, X_n\} \to \{1, 0\},$$

mis igale lausemuutujale X_i seab vastavusse tema tõeväärtuse $\alpha_i \in \{1, 0\}$. (Nii on väärtustusi käsitletud näiteks raamatus [6].) Sellisel juhul võiksime $X_i = 0$ asemel kirjutada $\alpha(X_i) = 0$ ja $X_i = 1$ asemel $\alpha(X_i) = 1$. Samuti saaksime valemi tõeväärtuse väärtustusel α defineerida järgmisel viisil.

a) Kui $\mathcal{F} = \neg\mathcal{G}$, siis $\alpha(\mathcal{F}) = \neg(\alpha(\mathcal{G}))$.

b) Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$, kus $\oplus \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, siis $\alpha(F) = \alpha(\mathcal{G}) \oplus \alpha(\mathcal{H})$.

Sellises käsitluses on valemi $\mathcal{F}$ poolt ära määratud Boole'i funktsioon f defineeritud võrdusega

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha(\mathcal{F}).$$

Lausearvutuse valemitel võib olla mitmesuguseid omadusi. Neist olulisemad on järgmised.

Definitsioon 1.9 Öeldakse, et lausearvutuse valem on

- **samaselt tõene**, kui ta on igal väärtustusel tõene,
- **samaselt väär**, kui ta on igal väärtustusel väär,
- **kehtestatav**, kui ta on vähemalt ühel väärtustusel tõene.

Näide 1.10 Valem $A \vee \neg A$ on samaselt tõene. Valem $A\&\neg A$ on aga samaselt väär. Valem $A \vee B$ ei ole samaselt tõene ega samaselt väär, kuid on kehtestatav, sest ta on tõene näiteks väärtustusel $(0, 1)$.

Kehtivad järgmised teoreemid.

Teoreem 1.11 ([7, lause 3.13]) *Valem $\mathcal{F}$ on samaselt tõene parajasti siis, kui tema eitus $\neg\mathcal{F}$ on samaselt väär.*

Teoreem 1.12 ([7, lause 3.14]) *Valem $\mathcal{F}$ on kehtestatav parajasti siis, kui tema eitus $\neg\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene.*

Definitsioon 1.13 Valemeid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ nimetatakse **samaväärseteks**, kui nende tõeväärtused on võrdsed igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel. Kui valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed, siis kirjutatakse $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$.

Valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ samaväärsuse kontrollimiseks saab kasutada tõeväärtustabeleid. Tabelites tuleb anda väärtustusi kõigile muutujatele, mis esinevad vähemalt ühes neist kahest valemist. Kui valemite tõeväärtused on samad iga väärtustuse korral, siis $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed, vastasel korral mitte.

Näide 1.14 Valemid $\mathcal{F} = A$ ja $\mathcal{G} = A\&(B \vee \neg B)$ on samaväärsed, sest nende tõeväärtused on võrdsed muutujate A ja B mistahes väärtustuse (α, β) korral.

Juhime tähelepanu, et samaväärsus ei ole lausearvutuse tehe ja $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$ ei ole lausearvutuse valem. Kui vaatleme kõigi lausearvutuse valemite hulka, milles esinevad lausemuutujad kuuluvad hulka $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$, siis samaväärsuse seos $\equiv$ on binaarne seos sellel hulgal. On võimalik näidata, et see seos on ekvivalentsiseos (s.t. refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne).

Teoreem 1.15 ([7, teoreem 4.12]) *Valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed parajasti siis, kui valem $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene.*

Tuletame meelde lausearvutuse põhisamaväärsused:

LS1. $\mathcal{F}\&\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$
LS2. $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$
LS3. $\mathcal{F}\&\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}\&\mathcal{F}$
LS4. $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$
LS5. $(\mathcal{F}\&\mathcal{G})\&\mathcal{H} \equiv \mathcal{F}\&(\mathcal{G}\&\mathcal{H})$
LS6. $(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \vee \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$
LS7. $\mathcal{F}\&(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \mathcal{F}$
LS8. $\mathcal{F} \vee \mathcal{F}\&\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$
LS9. $\mathcal{F}\&(\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) \equiv \mathcal{F}\&\mathcal{G} \vee \mathcal{F}\&\mathcal{H}$
LS10. $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}\&\mathcal{H} \equiv (\mathcal{F} \vee \mathcal{G})\&(\mathcal{F} \vee \mathcal{H})$
LS11. $\neg(\mathcal{F}\&\mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{G}$
LS12. $\neg(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F}\&\neg\mathcal{G}$
LS13. $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F}\&\neg\mathcal{G})$
LS14. $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$
LS15. $\mathcal{F}\&\mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$
LS16. $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$
LS17. $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv \mathcal{F}\&\mathcal{G} \vee \neg\mathcal{F}\&\neg\mathcal{G}$
LS18. $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})\&(\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F})$
LS19. $\mathcal{F}\&\mathcal{T} \equiv \mathcal{F}$
LS20. $\mathcal{F} \vee \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}$
LS21. $\mathcal{F}\&\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}$
LS22. $\mathcal{F} \vee \mathcal{V} \equiv \mathcal{F}$
LS23. $\neg\neg\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$,

kus $\mathcal{T}$ on suvaline samaselt tõene valem ja $\mathcal{V}$ on suvaline samaselt väär valem.

Põhisamaväärsuste abil on võimalik lausearvutuse valemeid teisendada, kusjuures eesmärgiks võib olla valemi viimine lihtsamale kujule (näiteks saadavas valemis võib olla vähem tehtemärke) või mingile soovitud standardsele kujule (näiteks täielikule disjunktiivsele normaalkujule).

On teada, et iga lausearvutuse valemi jaoks leidub temaga samaväärne valem, mis sisaldab ainult kahte tehet. Seega põhimõtteliselt lausearvutusega tegelemisel ei olegi tingimata viit tehet vaja.

Teoreem 1.16 ([7, lause 4.21]) *Iga lausearvutuse valemi jaoks leidub temaga samaväärne valem, mis sisaldab ainult järgmisi tehteid:*

a) $\&$ *ja* $\neg$*;*

b) $\vee$ *ja* $\neg$*;*

c) $\Rightarrow$ *ja* $\neg$*.*

Definitsioon 1.17 Öeldakse, et valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ **järeldub** valem $\mathcal{G}$, kui igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel, millel $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka $\mathcal{G}$ tõene. Sellisel juhul kirjutatakse

$$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \models \mathcal{G}\,.$$

Teoreem 1.18 ([7, teoreem 4.7]) *Valemitest* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ *järeldub valem* $\mathcal{G}$ *parajasti siis, kui valem* $\mathcal{F}_1 \& \mathcal{F}_2 \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ *on samaselt tõene.*

Seega kontrollimaks, kas $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \models \mathcal{G}$, võime välja arvutada valemi $\mathcal{F}_1 \& \mathcal{F}_2 \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ tõeväärtustabeli.

Näide 1.19 Valemitest $A \Rightarrow B$ ja $B \Rightarrow C$ järeldub valem $A \Rightarrow C$, s.t. võime kirjutada

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C\,.$$

Näide 1.20 Lihtne on veenduda, et mistahes valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ korral

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \& \mathcal{G} &\models \mathcal{F}, \\ \mathcal{F} &\models \mathcal{F} \vee \mathcal{G}, \\ \mathcal{F} \& \neg\mathcal{F} &\models \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Teoreem 1.21 ([7, teoreem 4.11]) *Valemid* $\mathcal{F}$ *ja* $\mathcal{G}$ *on samaväärsed parajasti siis, kui valemist* $\mathcal{F}$ *järeldub valem* $\mathcal{G}$ *ja valemist* $\mathcal{G}$ *järeldub valem* $\mathcal{F}$*.*

Sümbolites:

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{G} \quad \text{parajasti siis, kui} \quad \mathcal{F} \models \mathcal{G} \text{ ja } \mathcal{G} \models \mathcal{F}.$$

1.1.2 Tõesuspuud

Kui meil on vaja uurida, kas antud valemi puhul leidub muutujate väärtustus, millel see valem on tõene või väär, siis alati on seda võimalik teha tõeväärtustabeli abil. Teatud juhtudel võib siiski kiiremini lahenduseni jõuda valemi struktuuri uurides. Näiteks valemi

$$\neg A \;\&\; (B \Rightarrow C) \;\&\; A$$

puhul on ilma tõeväärtustabelitagi selge, et see on samaselt väär.

Valemite süstemaatiliseks analüüsimiseks võib kasutada järgmist skeemi, mida nimetatakse **tõesuspuuks**. Oletame näiteks, et me tahame kindlaks teha, kas valem $\mathcal{F}$ on kehtestatav. Paneme kirja rea $\mathcal{F} = 1$ ja hakkame uurima, millistel juhtudel selline asi on võimalik. Selleks leiame valemis üles peatehte ja osavalemid, mida see peatehe seob. Siis leiame need osavalemite tõeväärtused, mille korral $\mathcal{F}$ on tõene. Kui selliseid tõeväärtuste komplekte on üks, siis kirjutame need üksteise alla. Kui neid on mitu, siis tekib meil puule kaks allapoole hargnevat haru. Edasi jätkame harude analüüsimist sama skeemi alusel, kuni jõuame välja lausemuutujateni. Kui puu mingis harus tekib vastuolu (s.t. selles harus esineb mingi valem tõese ja väärana), siis ütleme, et see haru on vastuoluline ehk **suletud** ja kirjutame selle alla märgi $\times$. Vastasel korral ütleme, et haru on **avatud**.

Lausearvutuse tehete analüüsimisel kasutame järgmisi elementaarsamme.

- Eitus:

$$\begin{array}{c} \neg\mathcal{F} = 1 \\ | \\ \mathcal{F} = 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\mathcal{F} = 0 \\ | \\ \mathcal{F} = 1 \end{array}$$

- Konjunktsioon ja disjunktsioon:

$$\begin{array}{c} \mathcal{F} \;\&\; \mathcal{G} = 1 \\ | \\ \mathcal{F} = 1 \\ | \\ \mathcal{G} = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F} \;\&\; \mathcal{G} = 0} \\ / & \backslash \\ \mathcal{F} = 0 & \mathcal{G} = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = 1} \\ / & \backslash \\ \mathcal{F} = 1 & \mathcal{G} = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{F} \vee \mathcal{G} = 0 \\ | \\ \mathcal{F} = 0 \\ | \\ \mathcal{G} = 0 \end{array}$$

- Implikatsioon ja ekvivalents:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} = 1} \\ / & \backslash \\ \mathcal{F} = 0 & \mathcal{G} = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} = 0 \\ | \\ \mathcal{F} = 1 \\ | \\ \mathcal{G} = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} = 1} \\ / & \backslash \\ \mathcal{F} = 1 & \mathcal{F} = 0 \\ | & | \\ \mathcal{G} = 1 & \mathcal{G} = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} = 0} \\ / & \backslash \\ \mathcal{F} = 1 & \mathcal{F} = 0 \\ | & | \\ \mathcal{G} = 0 & \mathcal{G} = 1 \end{array}$$

Näiteks esimene konjunktsiooniga seotud skeem ütleb seda, et valem $\mathcal{F}\&\mathcal{G}$ saab tõene olla ainult siis, kui $\mathcal{F}$ on tõene **ja** $\mathcal{G}$ on tõene.

Teine ekvivalentsiga seotud skeem ütleb aga seda, et valem $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ saab olla väär täpselt kahel juhul: kui $\mathcal{F}$ on tõene ja $\mathcal{G}$ on väär **või** kui $\mathcal{F}$ on väär ja $\mathcal{G}$ on tõene.

Näide 1.22 Teha kindlaks, kas valem

$$\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A)$$

saab olla mingil väärtustusel väär.

Tõesuspuu koostamist alustame sellest, et paneme kirja tingimuse

$$\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A) = 0.$$

Vaadeldava valemi peatehe on disjunktsioon. Osavalemite $\neg(A \Rightarrow B)$ ja $\neg(B \Rightarrow A)$ disjunktsioon saab olla väär ainult siis, kui mõlemad osavalemid on väärad. Kirjutame vastavad tingimused üksteise alla. Nüüd võrdus $\neg(A \Rightarrow B) = 0$ kehtib ainult siis, kui $A \Rightarrow B = 1$. Lisame vastava rea tõesuspuusse. Sellega oleme kogu võrduses $\neg(A \Rightarrow B) = 0$ sisalduva info ära kasutanud ja märgime vastava rea läbivaadatuks kirjutades rea lõppu näiteks linnukese. Järgmine analüüsimata rida on $\neg(B \Rightarrow A) = 0$. See annab meile tingimuse $B \Rightarrow A = 1$. Märgime ka rea $\neg(B \Rightarrow A) = 0$ läbivaadatuks.

Võrdus $A \Rightarrow B = 1$ kehtib parajasti siis kui $A = 0$ või $B = 1$. See tekitab meil puus hargnemise (s.t. peame vaatama läbi nii juhu $A = 0$ kui ka juhu $B = 1$). Mõlemas harus tuleb veel arvestada ka tingimust $B \Rightarrow A = 1$, mis kehtib parajasti siis, kui $B = 0$ või $A = 1$. Kui oleme vastavad hargnemised kirja pannud, siis saame puu

$$\begin{array}{c}
\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A) = 0 \\
\neg(A \Rightarrow B) = 0 \ \checkmark \\
\neg(B \Rightarrow A) = 0 \ \checkmark \\
A \Rightarrow B = 1 \ \checkmark \\
B \Rightarrow A = 1 \ \checkmark \\
\begin{array}{cc}
A = 0 & B = 1 \\
\begin{array}{cc} B = 0 & A = 1 \\ & \times \end{array} & \begin{array}{cc} B = 0 & A = 1. \\ \times & \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Selles puus on kõik tehteid sisaldavad osavalemid läbi vaadatud ja igas harus oleme jõudnud lausemuutujateni. Kaks keskmist haru on suletud (ehk vastuolulised), sest ei A ega B saa olla korraga tõene ja väär. Vastava haru suletust märgime ristiga. Ülejäänud kaks haru annavad meile aga kõikvõimalikud väärtustused, mille korral esialgne valem on väär. Need väärtustused on $A = 0, B = 0$ ja $A = 1, B = 1$. Seega vastus esialgsele küsimusele on "jah, leidub väärtustusi, millel esialgne valem on väär".

Ühtlasi näeme ka, et esialgne valem on kehtestatav, kuid mitte samaselt tõene, sest tema tõeväärtus neljast muutujate väärtustusest kahe korral peab olema tõene.

Märgime veel, et lihtne on kontrollida, kas tõesti esialgse valemi tõeväärtus väärtustusel $(0, 0)$ on 0. Selleks võime lihtsalt arvutada

$$\neg(0 \Rightarrow 0) \vee \neg(0 \Rightarrow 0) = \neg 1 \vee \neg 1 = 0 \vee 0 = 0.$$

Näide 1.23 Teha kindlaks, kas valem

$$\neg(A\&B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$

on samaselt tõene. Alustame sellest, et kirjutame tõesuspuu algusse rea $\neg(A \ \& \ B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B = 0$. (Valem on samaselt tõene, kui ei õnnestu leida sellist väärtustust, mille korral tema tõeväärtus on "väär".) Tõesuspuu näeb välja järgmine:

$$\neg(A \ \& \ B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B = 0$$

$$\begin{array}{c}
\neg(A \ \& \ B) = 1 \ \checkmark \\
\neg A \vee \neg B = 0 \ \checkmark \\
A \ \& \ B = 0 \ \checkmark \\
\neg A = 0 \ \checkmark \\
\neg B = 0 \ \checkmark \\
A = 1 \\
B = 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
A = 0 & B = 0 \\
\times & \times
\end{array}$$

Hargnemise selles puus tekitab rida $A \ \& \ B = 0$. Nagu näeme, on mõlemad harud vastuolulised, seega väärtustust, millel esialgne valem oleks väär, ei leidu. See tähendab, et esialgne valem peab olema samaselt tõene.

Rohkem näiteid tõesuspuude kohta võib leida raamatust [9], lk. 17–18.

Tõesuspuuga saab valemi omadusi kontrollida järgmiselt.

- **Samaselt tõesuse** kontrollimiseks kirjutame tõesuspuu algusse $\mathcal{F} = 0$. Kui igas harus tekib vastuolu, siis valem on samaselt tõene.
- **Samaselt vääruse** kontrollimiseks kirjutame tõesuspuu algusse $\mathcal{F} = 1$. Kui igas harus tekib vastuolu, siis valem on samaselt väär.
- **Kehtestatavuse** kontrollimiseks kirjutame tõesuspuu algusse $\mathcal{F} = 1$. Kui leidub haru, kus vastuolu ei teki, siis valem on kehtestatav.

Tõesuspuu abil saab kontrollida, kas valemitest $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$. Selleks üritame leida valemites esinevate muutujate väärtustust, mille korral

$$\mathcal{F}_1 = 1, \ \mathcal{F}_2 = 1, \ \ldots, \ \mathcal{F}_n = 1 \quad \text{ja} \quad \mathcal{G} = 0.$$

Kui see ei õnnestu (s.t. tõesuspuu kõik harud on vastuolulised), siis järeldumine kehtib. Tõesuspuu algusse kirjutame need $n + 1$ tingimust ja edasi tegutseme nii nagu harilikult.

Näide 1.24 Tõestada, et

$$A \lor B \,\&\, C,\ A \lor B \Rightarrow D \models C \lor D.$$

Püüame leida A, B, C, D väärtustust, mille korral $A \lor B \,\&\, C = 1$, $A \lor B \Rightarrow D = 1$ ja $C \lor D = 0$. Koostame tõesuspuu:

$$\begin{array}{c}
A \lor B \,\&\, C = 1\ \checkmark \\
A \lor B \Rightarrow D = 1\ \checkmark \\
C \lor D = 0\ \checkmark \\
C = 0 \\
D = 0 \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
A = 1 \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} A \lor B = 0\ \checkmark \\ A = 0 \\ B = 0 \\ \times \end{array} &
\begin{array}{c} D = 1 \\ \times \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
\end{array} &
\begin{array}{c}
B \,\&\, C = 1\ \checkmark \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} A \lor B = 0 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ \times \end{array} &
\begin{array}{c} D = 1 \\ \times \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Kuna kõik harud on vastuolulised, siis järeldumine kehtib.

1.2 Predikaatarvutus

1.2.1 Indiviidid ja predikaadid

Lausearvutuses vaadeldakse lauseid kui lihtlausetest moodustatud liitlauseid. Seejuures lihtlauseid käsitletakse kui tervikuid, mida enam osadeks jagada ei saa.

Predikaatloogikas jagatakse ka lihtlaused teatud osadeks. Täpsemalt öeldes jagatakse laused

- *indiviidideks* ehk *subjektideks*, mille kohta midagi väidetakse, ja
- *predikaadiks*, s.t. seoseks, milles indiviide väidetakse olevat.

Näiteks

lause	indiviid(id)	predikaat
3 on väiksem kui 7	3, 7	on väiksem kui
$2+4=6$	$2,4,6$	$\ldots + \ldots = \ldots$
3 on paaritu arv	3	on paaritu arv
lumi on valge	lumi	on valge

.

Nagu näeme võivad predikaadid sisaldada erineval arvul indiviide (eelmises näites on neid $1,2$ või 3). Kui indiviide on predikaadis n tükki, siis räägitakse *n-kohalisest predikaadist*.

Predikaadi puhul on oluline ära näidata, milline on see hulk, kuhu võivad kuuluda tema indiviidid. Näiteks predikaati "on väiksem kui" võib vaadelda naturaalarvude hulgal, reaalarvude hulgal või hoopis päikesesüsteemi planeetide hulgal.

n-kohalist predikaati võib vaadelda kui n muutujast sõltuvat lauset, millel on muutujate konkreetsete väärtuste korral üheselt määratud tõeväärtus.

Nii näiteks võime naturaalarvude hulgal[9] $\mathbb{N}$ vaadelda kahekohalist predikaati

$$x \text{ on väiksem kui } y.$$

Kui $x=3$ ja $y=7$, siis selle lause tõeväärtus on 1, kui aga $x=4$ ja $y=2$, siis on tõeväärtus 0.

Predikaadi range matemaatiline definitsioon esitatakse harilikult järgmisel kujul.

Definitsioon 1.25 Olgu M mittetühi hulk. Hulgal M määratud **n-kohaliseks predikaadiks** nimetatakse kujutust $P : M^n \to \{1,0\}$. Hulka M nimetatakse sellise predikaadi **indiviidide piirkonnaks**.

Definitsioon 1.26 Predikaadi $P : M^n \to \{1,0\}$ **tõesuspiirkonnaks** nimetatakse hulka

$$T_P = \{(a_1,\ldots,a_n) \in M^n \mid P(a_1,\ldots,a_n) = 1\}.$$

Vaatleme veel näiteid.

[9]Käesolevas kursuses loeme, et $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$.

Näide 1.27 Naturaalarvude hulgal $\mathbb{N}$ võib vaadelda ühekohalist predikaati $P(x) =$ "x on algarv". See on siis kujutus

$$P : \mathbb{N} \to \{1, 0\},$$

mis igale naturaalarvule x seab vastavuse tõeväärtuse 1 või 0 vastavalt sellele, kas x on algarv või mitte. Muuhulgas

$$P(0) = 0,\ P(1) = 0,\ P(2) = 1,\ P(3) = 1,\ P(4) = 0, ...$$

Selle predikaadi tõesuspiirkond on kõigi algarvude hulk.

Näide 1.28 Olgu M kõigi maailmajagude hulk

$$M = \{\text{Aafrika, Aasia, Ameerika, Antarktika, Austraalia, Euroopa}\}$$

ning vaatleme kahekohalist predikaati

$$Q(x, y) = \text{“}x\text{-i ja }y\text{-i vahel on maismaaühendus”}.$$

Siis näiteks

$$\begin{array}{ll} Q(\text{Aafrika, Aasia}) = 1, & Q(\text{Ameerika, Aasia}) = 0, \\ Q(\text{Aafrika, Ameerika}) = 0, & Q(\text{Euroopa, Aasia}) = 1, \\ Q(\text{Aasia, Ameerika}) = 0, & Q(\text{Euroopa, Euroopa}) = 1. \end{array}$$

Märkus 1.29 Põhimõtteliselt võivad indiviidid kuuluda ka erinevatesse hulkadesse, s.t. predikaat võib olla kujutus $M_1 \times \ldots \times M_n \to \{1, 0\}$. Sellisel juhul räägitakse *mitmesordilistest predikaatidest.* Käesolevas kursuses me selliseid predikaate ei vaatle. Selles kursuses vaatleme ainult ühesordilist predikaatarvutust, kus eeldatakse, et komponentlausetes esinevad predikaadid on defineeritud ühel ja samal piirkonnal.

Märkus 1.30 Kuna predikaadi tõesuspiirkond on hulga M^n alamhulk, siis võime teda vaadelda n-kohalise seosena hulgal M. Näiteks iga kahekohaline predikaat määrab ära ühe binaarse seose.

Predikaatarvutus üldistab lausearvutust selles mõttes, et predikaadi tõeväärtus võib sõltuda argumentide väärtustest, samal ajal kui lausearvutuse lausel argumente ei ole ja tema tõeväärtus on kogu käsitluse jooksul ühesugune. Põhimõtteliselt võib lausearvutuse lauseid vaadelda kui nullkohalisi predikaate, s.t. kujutusi $M^0 \to \{0, 1\}$. Selline kujutus fikseerib hulgas $\{0, 1\}$ ühe elemendi (vaadeldava lause tõeväärtuse).

Predikaate võib siduda lausearvutuse tehete abil, et moodustada lihtsamatest predikaatidest keerulisemaid. Näiteks võib hulgal M defineeritud predikaatidest $P(x_1, \ldots, x_n)$ ja $Q(y_1, \ldots, y_m)$ moodustada predikaadi

$$R(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = P(x_1, \ldots, x_n) \,\&\, Q(y_1, \ldots, y_m),$$

mille väärtus kohal $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ on 1 parajasti siis, kui $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$ ja $Q(y_1, \ldots, y_m) = 1$. Ülejäänud lausearvutuse tehete korral toimitakse analoogiliselt.

Näide 1.31 Vaatleme naturaalarvude hulgal $\mathbb{N}$ predikaate

$$P(x) = \text{“}x \text{ on algarv”},$$
$$Q(x,y) = \text{“}y \text{ jagub arvuga } x\text{”}.$$

Siis võime moodustada kahekohalise predikaadi

$$\begin{aligned} R(x,y) &= P(x) \mathbin{\&} Q(x,y) \\ &= \text{“}x \text{ on algarv ja } y \text{ jagub arvuga } x\text{”} \\ &= \text{“}x \text{ on arvu } y \text{ algtegur”}. \end{aligned}$$

Näiteks $R(2,24) = 1$ ja $R(6,24) = 0$.

Võib aga moodustada ka kolmekohalise predikaadi

$$S(x,y,z) = P(x) \mathbin{\&} Q(y,z) = \text{“}x \text{ on algarv ja } z \text{ jagub arvuga } y\text{”}.$$

Siis näiteks $S(2,6,24) = 1$ ja $S(2,6,7) = 0$.

1.2.2 Kvantorid

Lisaks lausearvutuse tehetele on predikaatide puhul olemas veel kaks spetsiifilist operatsiooni, mida kutsutakse kvantoriteks.

Definitsioon 1.32 Olgu $P(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$ hulgal M määratud n-kohaline predikaat, kus $n \geqslant 1$, ning olgu $i \in \{1,\dots,n\}$.

1. Kirjutis
$$\forall x_i\, P(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$$
tähistab $(n-1)$-kohalist predikaati, mis on tõene parajasti siis, kui argumentide $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ väärtused on sellised, et hulga M iga elemendi m korral on $P(x_1,\dots,m,\dots,x_n)$ tõene. Operaatorit $\forall$ nimetatakse **üldisuskvantoriks** ehk **universaalsuskvantoriks**.

2. Kirjutis
$$\exists x_i\, P(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$$
tähistab $(n-1)$-kohalist predikaati, mis on tõene parajasti siis, kui argumentide $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ väärtused on sellised, et hulgas M leidub element m, mille korral on $P(x_1,\dots,m,\dots,x_n)$ tõene. Operaatorit $\exists$ nimetatakse **olemasolukvantoriks** ehk **eksistentsikvantoriks**.

Kvantori rakendamisel tekkinud predikaat ei sõltu enam muutujast, mis kvantoriga seoti. Öeldakse, et selline muutuja on **seotud**. Saadud predikaadi argumentideks olevaid muutujaid nimetatakse **vabadeks**. Predikaadile kvantori rakendamist nimetatakse **kvantifitseerimiseks**.

Märkus 1.33 Põhimõtteliselt $\forall x_i$ ja $\exists x_i$ on kujutused n-kohaliste predikaatide hulgast $(n-1)$-kohaliste predikaatide hulka. Kui kvantorit rakendatakse ühekohalisele predikaadile, siis tulemuseks on lause, mis ei sõltu ühestki muutujast ning millel on kas tõeväärtus 1 või 0.

Näide 1.34 Vaatleme predikaati $Q(x,y)$ näitest 1.28. Siis kirjutis

$$\forall y\, Q(x,y)$$

väljendab ühekohalist predikaati $Q'(x)$, mida sõnades väljendab lause "maailmajaol x on maismaaühendus kõigi maailmajagudega". Avaldises $\forall y\, Q(x,y)$ on y seotud muutuja ja x vaba muutuja. Kirjutis

$$\exists y\, Q(x,y)$$

väljendab aga ühekohalist predikaati $Q''(x)$, mida sõnades väljendab lause "maailmajaol x on maismaaühendus mingi maailmajaoga."

Näide 1.35 Vaatleme hulgal $\mathbb{N}$ ühekohalist predikaati $P(x) =$ "x on algarv". Siis $\forall x P(x)$ on lause, mis väidab, et iga naturaalarv on algarv, ja $\exists x\, P(x)$ on lause, mis väidab, et leidub naturaalarv, mis on algarv. Neist esimene lause on väär ja teine tõene.

Näide 1.36 Vaatleme hulgal $\mathbb{N}$ kolmekohalist predikaati

$$P(x,y,z) = \text{“}x+y=z\text{”}.$$

Sellele predikaadile võime järjest rakendada mitut kvantorit saades näiteks
$\forall y \forall z \exists x\, P(x,y,z)$. Siis

$$\forall y \forall z \exists x\, P(x,y,z) = \forall y \forall z \text{ “}y \le z\text{”} = \forall y \text{ “}y = 0\text{”}$$

on lause, mis ei sõltu ühestki argumendist (vabu muutujaid ei ole). See lause on väär, sest mitte kõik naturaalarvud ei võrdu nulliga.

1.2.3 Predikaatarvutuse süntaks

Anname nüüd reeglid predikaatarvutuse valemite koostamiseks. Kuna predikaatarvutuse väljendusvõimalused on lausearvutuse omadest suuremad, siis on ka predikaatarvutuse valemite struktuur keerulisem.

Predikaatarvutuses kasutatakse avaldiste üleskirjutamisel järgmisi sümboleid.

- **Indiviidmuutujad**, mida märgime harilikult tähtedega u, v, w, x, y, z. Iga indiviidmuutuja võib tähistada vaadeldava hulga ükskõik millist elementi (indiviidi).
- **Konstantsümbolid** a, b, c, d jne. Konstantsümbol tähistab vaadeldava hulga mingit fikseeritud elementi.
- **Funktsionaalsümbolid** f, g, h jne. Need tähistavad vaadeldaval hulgal defineeritud funktsioone.

- **Predikaatsümbolid** P, Q, R jne.
- **Loogikasümbolid** $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$.
- **Kirjavahemärgid** (,) ja koma.

Kõigile sümbolitena kasutatavatele tähtedele võib vajaduse korral lisada indekseid (näiteks võib vaadelda indiviidmuutujaid $x_1, \ldots, x_n$). Funktsionaalsümboli ja predikaatsümboli argumentide arv peab selguma kontekstist.

Definitsioon 1.37 **Signatuuriks** nimetatakse järjestatud kolmikut $\sigma = \langle \mathbf{C};\ \mathbf{F};\ \mathbf{P} \rangle$, kus

- $\mathbf{C}$ on konstantsümbolite hulk,
- $\mathbf{F}$ on funktsionaalsümbolite hulk,
- $\mathbf{P}$ on predikaatsümbolite mittetühi hulk.

Märkus 1.38 Alati eeldatakse, et predikaatsümbolite hulk on mittetühi, sest vastasel korral ei saa selles signatuuris kirja panna ühtegi valemit. Hulgad $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{F}$ võivad olla tühjad. Kõik kolm hulka võivad olla lõpmatud.

Näide 1.39 Naturaalarvude aritmeetikat saab kirja panna signatuurides

$$\begin{gathered}\langle 0;\ {}',+,\cdot;\ =\rangle,\\ \langle 0,1;\ +,\cdot;\ =\rangle,\\ \langle 0,1,2,3,\ldots;\ +,\cdot;\ =\rangle.\end{gathered}$$

(Märgime, et harilikult jäetakse kirjapanekust $\langle\{0\};\ \{{}',+,\cdot\};\ \{=\}\rangle$ loogelised sulud ära.)

Näide 1.40 Rühmateooria jaoks võib kasutada signatuure

$$\begin{gathered}\langle e;\ \cdot;\ =\rangle,\\ \langle e;\ \cdot,{}^{-1};\ =\rangle.\end{gathered}$$

Avaldiste kirjapanemiseks ei pea teadma sümbolite täpset tähendust, küll aga peavad olema fikseeritud reeglid, mille abil sümbolitest avaldisi koostatakse.

Definitsioon 1.41 **Termid** signatuuris σ on parajasti need avaldised, mida saab koostada järgmiste reeglite abil.

1. Iga indiviidmuutuja on term.
2. Signatuuri σ iga konstantsümbol on term.
3. Kui f on signatuuri σ n-kohaline funktsionaalsümbol ja $t_1, t_2, \ldots, t_n$ on termid, siis ka $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ on term.

Termi, milles ei ole ühtegi indiviidmuutujat, nimetatakse **muutujateta termiks**. Selline term on moodustatud ainult konstantsümbolitest ja funktsionaalsümbolitest.

Näide 1.42 Vaatleme indiviidmuutujat x ja signatuuri $\langle c;\ f, g;\ =\rangle$, kus f on kolmekohaline funktsionaalsümbol ja g on kahekohaline funktsionaalsümbol. Siis võib vaadelda näiteks terme

$$c \qquad g(c,c) \qquad x \qquad f(x,c,x) \qquad g(f(x,x,x),c).$$

Neist kaks esimest on muutujateta termid.

Näide 1.43 Vaatleme indiviidmuutujaid x, y ja signatuuri $\langle \mathbb{R};\ +, \cdot;\ =\rangle$, kus $+$ ja $\cdot$ on kahekohalised funktsionaalsümbolid. Harilikult kirjutatakse kahekohaline funktsionaalsümbol argumentide vahele, mitte nende ette. Seega näiteks $+(x,y)$ asemel kirjutatakse $x+y$. Selles signatuuris võib vaadelda näiteks järgmisi terme:

$$46 \qquad 3{,}14 \cdot y \qquad ((2\cdot x)+1)\cdot(y+(4\cdot x)).$$

Näide 1.44 Kolmemõõtmelise ruumi vabavektoritest rääkides võib kasutada signatuuri $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{0};\ +, -, \times;\ =\rangle$ ja indiviidmuutujaid $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Termideks on näiteks

$$\vec{j} \qquad \vec{z} \qquad (\vec{x}+\vec{y})-\vec{z} \qquad ((\vec{x}\times\vec{i})+(\vec{y}\times\vec{j}))+(\vec{z}\times\vec{k}).$$

Märkus 1.45 Matemaatikas on kõige enam levinud kahekohalised funktsionaalsümbolid. Neid nimetatakse enamasti tehtemärkideks. Seega tüüpiline term on avaldis, mis on moodustatud konstantsümbolitest ja muutujatest tehtemärkide abil.

Predikaatarvutuse valemid moodustatakse antud signatuuri predikaatsümbolitest, termidest, lausearvutuse tehetest ja kvantoritest.

Definitsioon 1.46 Predikaatarvutuse valemid on parajasti need avaldised, mis on moodustatud järgmiste reeglite abil.

1. Kui P on n-kohaline predikaatsümbol ja $t_1, \dots, t_n$ on termid, siis $P(t_1, \dots, t_n)$ on predikaatarvutuse valem.

2. Kui $\mathcal{F}$ on predikaatarvutuse valem, siis $\neg\mathcal{F}$ on predikaatarvutuse valem.

3. Kui $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on predikaatarvutuse valemid, siis $(\mathcal{F} \mathbin{\&} \mathcal{G}), (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}), (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}), (\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G})$ on predikaatarvutuse valemid.

4. Kui x on indiviidmuutuja ja $\mathcal{F}$ on predikaatarvutuse valem, siis $\forall x\, \mathcal{F}$ ja $\exists x\, \mathcal{F}$ on predikaatarvutuse valemid.

Esimese punkti põhjal moodustatud valemeid nimetatakse **atomaarseteks valemiteks** ehk **elementaarvalemiteks**. Kõiki antud valemi konstrueerimise käigus tekkinud valemeid nimetatakse antud valemi **osavalemiteks**. Viimasel konstrueerimissammul kasutatud lausearvutuse tehet või kvantori rakendamist nimetatakse valemi **peatehteks**.

Predikaatarvutuse valemite kirjutamisel kasutame sulgude eemaldamisel samasuguseid kokkuleppeid nagu lausearvutuse korralgi. Valemi loetavuse huvides võib osavalemi $\mathcal{F}$ korral kirjutada ka $(\mathcal{F})$. Kvantorite prioriteet loetakse võrdseks eituse omaga.

Näide 1.47 Vaatleme indiviidmuutujaid x, y, z ja signatuuri $\langle \mathbb{R};\ +, \cdot;\ =, <, > \rangle$, kus kõik funktsionaal- ja predikaatsümbolid on kahekohalised. Ka kahekohalisi predikaatsümboleid on tavaks kirjutada argumentide vahele (seega $<(x, y)$ asemel $x < y$). Võime vaadelda atomaarseid valemeid

$$y = 2 \cdot x \qquad x < x \qquad (x + y) \cdot (y + z) > x + z$$

ja mitteatomaarseid valemeid

$$x = 0 \vee x = 1 \qquad \forall x \exists y\, (x + y > x) \qquad \neg(x = 0) \Rightarrow \exists y\, (x \cdot y = 1)\,.$$

Kui välja jätta indiviidmuutuja esinemised vahetult kvantori järel, siis tema ülejäänud esinemised valemis jagunevad seotuteks ja vabadeks. Indiviidmuutuja esineb valemis **seotult**, kui ta asub mingi kvantori mõjupiirkonnas. Ülejäänud esinemisi nimetatakse **vabadeks**. Seega kui muutuja x esineb valemis $\mathcal{G}$, siis valemites $\forall x\, \mathcal{G}$ ja $\exists x\, \mathcal{G}$ on tema esinemised seotud. Predikaatarvutuse valemit nimetatakse **kinniseks**, kui tema kõigi indiviidmuutujate kõik esinemised on seotud. Kui tahetakse juhtida tähelepanu sellel, et indiviidmuutuja x esineb valemis $\mathcal{F}$ vabalt, siis kirjutatakse vahel $\mathcal{F}(x)$.

Näide 1.48 Eelmise näite valem $\forall x \exists y\, (x + y > x)$ on kinnine, sest muutujad x ja y on seotud. Valemis $\neg(x = 0) \Rightarrow \exists y\, (x \cdot y = 1)$ on muutuja x vaba ja muutuja y seotud.

Üks ja sama indiviidmuutuja võib valemis esineda nii vabalt kui seotult.

Näide 1.49 Predikaatarvutuse valemis

$$\exists x\, (P(x) \Rightarrow \neg Q(y)) \vee R(x)$$

on kvantori $\exists$ mõjupiirkonnaks osavalem $(P(x) \Rightarrow \neg Q(y))$. Selles osavalemis on muutuja x seotud ja muutuja y vaba. Osavalemis $R(x)$ esineb muutuja x aga vabalt, sest ta ei asu ühegi kvantori mõjupiirkonnas. Kuna valemis leidub vabu muutujaid, siis see valem ei ole kinnine.

Märkus 1.50 Selles kursuses oleme defineerinud predikaatarvutuse valemi süntaksi rangelt ja sellest definitsioonist me kõrvale ei kaldu. Kui aga loogikasümboleid kasutatakse mõnedes konkreetsetes matemaatilistes tekstides, siis tihti suhtutakse kvantorite kirjutamisse pisut vabamalt. Allpool toome mõned näited selle kohta, kuidas mujal võidakse kvantoreid kirjutada ja kuidas sama sisuga väidet saaks kirja panna selle kursuse tähistustes.

mujal	selles kursuses
$\exists x \forall y > x :\ \mathcal{G}(x, y)$	$\exists x \forall y\, ((y > x) \Rightarrow \mathcal{G}(x, y))$
$\forall x \exists y < x :\ \mathcal{G}(x, y)$	$\forall x \exists y((y < x)\ \&\ \mathcal{G}(x, y))$
$\forall x, y \exists z, w :\ \mathcal{G}(x, y, z, w)$	$\forall x \forall y \exists z \exists w\, \mathcal{G}(x, y, z, w)$

.

1.2.4 Signatuuri interpretatsioonid

Sümbolite arv, mida matemaatikas kasutatakse on suhteliselt piiratud. Selle tõttu tarvitatakse tihti ühte ja sama sümbolit mitmes erinevas tähenduses. Näiteks tehtemärk + võib märkida reaalarvude liitmist, jäägiklasside liitmist, vektorite liitmist, maatriksite liitmist või hoopis funktsioonide liitmist. Need kõik on erinevad tehted, mis on defineeritud erinevatel hulkadel. Millist märgi + tähendust konkreetses olukorras silmas peetakse, peab selguma kontekstist.

Signatuur koosneb sümbolitest, mida me valemite kirja panemiseks soovime kasutada. Nendele sümbolitele võib aga vastavalt vajadusele anda erineva tõlgenduse, s.t. me võime neid erinevalt interpreteerida.

Definitsioon 1.51 Signatuuri $\sigma = \langle \mathbf{C};\ \mathbf{F};\ \mathbf{P}\rangle$ **interpretatsioon** on järjestatud paar $\alpha = \langle M_\alpha;\ I_\alpha\rangle$, kus M_α on mingi mittetühi hulk, mida nimetatakse **põhihulgaks** ehk **interpretatsiooni kandjaks**, ja I_α on **interpreteeriv kujutus**, mis teisendab

1. iga konstantsümboli $c \in \mathbf{C}$ hulga M_α mingiks elemendiks c^α;
2. iga n-kohalise funktsionaalsümboli $f \in \mathbf{F}$ mingiks n-kohaliseks funktsiooniks $f^\alpha : M_\alpha^n \to M_\alpha$;
3. iga n-kohalise predikaatsümboli P mingiks n-kohaliseks predikaadiks $P^\alpha : M_\alpha^n \to \{1, 0\}$.

Märkus 1.52 1. Kui interpretatsioon on fikseeritud ja ei ole karta segaduse tekkimist, siis võib interpretatsiooni tähise ära jätta.

2. On oluline teha vahet sümbolil ja tema interpretatsioonil. Erinevates interpretatsioonides võib üks ja sama sümbol tähendada väga erinevaid asju.

3. Võrdusmärki interpreteeritakse alati võrduspredikaadina.

Näide 1.53 Vaatleme signatuuri $\sigma = \langle 0, 1, 2, 3, \ldots;\ +, \cdot;\ =, <\rangle$. Anname sellele kolm erinevat interpretatsiooni.

1. $M = \mathbb{N}$ ja signatuuri sümboleid interpreteerime standardselt (nt. sümbolit + interpreteerime naturaalarvude liitmistehtena, mis on kujutus $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).
2. $M = \mathbb{R}$ ja signatuuri sümboleid interpreteerime standardselt.
3. $M = \{0, 1\}$,
$$c_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{kui } c \text{ on paarisarv,} \\ 1, & \text{kui } c \text{ on paaritu arv,} \end{cases}$$
+ ja $\cdot$ on kahekohalised tehted hulgal $\{0, 1\}$, mis on antud tabelitega

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

,

ning $<$ on kahekohaline predikaat hulgal $\{0,1\}$, mille tõesuspiirkond on $\{(0,1)\}$ (s.t. $0<1$ ja ülejäänud paarid ei ole selles seoses).

Näide 1.54 Vaatleme signatuuri $\langle e;\ *;\ =\rangle$, kus $*$ on kahekohaline funktsionaalsümbol. Interpreteerime seda signatuuri järgmistel viisidel.

1. $M=\mathbb{R}^+$ (positiivsete reaalarvude hulk), e^α on reaalarv 1 ja $*^\alpha$ on reaalarvude korrutamistehe.

2. $M=Mat_2(\mathbb{R})$ (teist järku reaalarvuliste elementidega ruutmaatriksite hulk), e^α on teist järku ühikmaatriks ja $*^\alpha$ on maatriksite korrutamistehe.

3. $M=\mathbb{R}^\mathbb{R}$ (hulga $\mathbb{R}$ kõigi teisenduste hulk), $e^\alpha=1_\mathbb{R}$ (hulga $\mathbb{R}$ samasusteisendus) ja $*^\alpha=\circ$ (teisenduste järjestrakendamine).

4. $M=\mathbb{Z}$, $e^\alpha=0$, $*^\alpha=+$.

5. M on mingi mittetühja hulga A kõigi alamhulkade hulk $\mathcal{P}(A)$, $e^\alpha=A$, $*^\alpha=\cap$.

Kui fikseerime signatuuri mingi interpretatsiooni $\alpha=\langle M_\alpha;\ I_\alpha\rangle$ ja anname indiviidmuutujatele konkreetsed väärtused, siis tekib ka igale termile väärtus, milleks on hulga M_α mingi element.

Definitsioon 1.55 Termi t **väärtus** t^α interpretatsioonis α indiviidmuutujate fikseeritud väärtustel leitakse järgmiste reeglite abil.

1. Kui $t=x$, kus x on indiviidmuutuja, siis t^α on muutuja x väärtus.

2. Kui $t=c$, kus c on konstantsümbol, siis $t^\alpha=c^\alpha$.

3. Kui $t=f(t_1,\ldots,t_n)$, kus f on n-kohaline funktsionaalsümbol ja $t_1,\ldots,t_n$ on termid, siis $t^\alpha=f^\alpha(t_1^\alpha,\ldots,t_n^\alpha)$.

Tänu sellele definitsioonile tekitab iga n muutujat sisaldav term ühe n-muutuja funktsiooni hulgal M_α.

Jämedalt öeldes toimub termi väärtuse leidmine nii: pane muutujate asemele nende väärtused ja soorita vajalikud tehted.

Näide 1.56 Vaatleme signatuuri $\sigma=\langle 0,1,2,3,\ldots;\ +,\cdot;\ =,<\rangle$. Olgu interpretatsiooni kandja $M=\mathbb{N}$ ja interpretatsioon standardne. Siis võib vaadelda näiteks järgmisi terme:

term	x	2	$x+2$	$x\cdot x+2\cdot y$
vabade muutujate väärtused	$x=3$	puuduvad	$x=3$	$x=3,\ y=1$
termi väärtus	3	2	5	11

.

Näiteks term $x\cdot x+2\cdot y$ tekitab kahe muutuja funktsiooni

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N},\quad (k,l)\mapsto k^2+2l.$$

Ka predikaatarvutuse valemi tõeväärtus sõltub sellest, millisesse hulka kuuluvad temas sisalduvate muutujate väärtused ja kuidas me tõlgendame temas esinevaid sümboleid. Näiteks valem $\forall x\,(x \geqslant 0)$ on naturaalarvude korral tõene, kuid reaalarvude korral väär. Valemi tõeväärtuse etteantud interpretatsioonis ja vabade muutujate väärtuste korral saab leida järgmise definitsiooni abil.

Definitsioon 1.57 Predikaatarvutuse valemi $\mathcal{F}$ **tõeväärtus** $\mathcal{F}^\alpha$ interpretatsioonis α vabade muutujate fikseeritud väärtustusel leitakse järgmiste reeglite abil.

1. Kui $\mathcal{F} = P(t_1, \ldots, t_n)$, kus P on n-kohaline predikaatsümbol ja $t_1, \ldots, t_n$ on termid, siis $\mathcal{F}^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $P^\alpha(t_1^\alpha, \ldots, t_n^\alpha) = 1$.
2. Kui $\mathcal{F} = \neg\mathcal{G}$, siis $\mathcal{F}^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G}^\alpha = 0$.
3. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G}\ \&\ \mathcal{H}$, siis $\mathcal{F}^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G}^\alpha = 1$ ja $\mathcal{H}^\alpha = 1$.
4. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \vee \mathcal{H}$, siis $\mathcal{F}^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G}^\alpha = 1$ või $\mathcal{H}^\alpha = 1$.
5. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$, siis $\mathcal{F}^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G}^\alpha = 0$ või $\mathcal{H}^\alpha = 1$.
6. Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{H}$, siis $\mathcal{F}^\alpha = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G}^\alpha = 1$ ja $\mathcal{H}^\alpha = 1$ või $\mathcal{G}^\alpha = 0$ ja $\mathcal{H}^\alpha = 0$.
7. Kui $\mathcal{F} = \forall x\,\mathcal{G}$, siis $\mathcal{F}^\alpha = 1$ parajasti siis, kui põhihulga M_α iga elemendi m korral $\mathcal{G}^\alpha_{[x/m]} = 1$, kus $[x/m]$ tähendab, et muutuja x väärtuseks loetakse element m.
8. Kui $\mathcal{F} = \exists x\,\mathcal{G}$, siis $\mathcal{F}^\alpha = 1$ parajasti siis, kui põhihulgas M_α leidub selline element m, mille korral $\mathcal{G}^\alpha_{[x/m]} = 1$, kus $[x/m]$ tähendab, et muutuja x väärtuseks loetakse element m.

Märkus 1.58 Kui $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ on predikaatarvutuse valem vabade muutujatega $x_1, \ldots, x_n$, siis tema tõeväärtust interpretatsioonis α vabade muutujate väärtustusel $(m_1, \ldots, m_n)$ võib tähistada $\mathcal{F}^\alpha(m_1, \ldots, m_n)$. Nii tekib meil kujutus

$$M_\alpha^n \to \{1, 0\}, \quad (m_1, \ldots, m_n) \mapsto \mathcal{F}^\alpha(m_1, \ldots, m_n).$$

Niisiis valemi iga interpretatsioon tekitab ühe predikaadi.

Näide 1.59 Vaatleme signatuuri $\sigma = \langle 0, 1, 2, 3, \ldots;\ +, \cdot;\ =, < \rangle$. Olgu interpretatsiooni kandja $M = \mathbb{N}$ ja interpretatsioon standardne. Olgu meil valem

$$\mathcal{F}(y) = \exists x\,(2 \cdot x = y).$$

Milline on selle valemi tõeväärtus näiteks $y = 6$ korral? Kuna leidub selline $m \in \mathbb{N}$, et $2 \cdot m = 6$ (selleks m-ks on arv 3), siis vastavalt definitsiooni 1.57 punktile 8 on valem $\mathcal{F}$ tõene $y = 6$ korral. Viimast asjaolu võib kirja panna kujul $\mathcal{F}(6) = 1$. On lihtne aru saada, et

$$\mathcal{F}(k) = 1 \quad \text{parajasti siis, kui} \quad k \text{ on paarisarv.}$$

Seega valemi $\mathcal{F}(y)$ poolt tekitatud predikaadi $\mathbb{N} \to \{1, 0\}$, $k \mapsto \mathcal{F}(k)$ tõesuspiirkonnaks on paarisarvude hulk.

Ülesanne 1.60 Leida järgmiste valemite tõeväärtused kolmes interpretatsioonis, mida vaatlesime näites 1.53 (märgime, et siinsetes valemites pole vabu muutujaid):

valem	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\{1,0\}$
$0=2$	0	0	1
$\forall x\,(x<x+1)$	1	1	0
$\forall x\,\exists y\,(x<y)$			
$\forall x\,\exists y\,(y<x)$			
$\forall x\,\forall y\,(x<y \Rightarrow \exists z\,(x<z \,\&\, z<y))$			
$\forall x\,\forall u\,\forall v\,(x+u=x+v \Rightarrow u=v)$			
$\forall x\,\forall y\,\exists z\,(x+z=y)$			
$\forall x\,\forall y\,\exists z\,(x\cdot z=y)$			
$\forall x\,\forall y\,(\neg(x=0) \Rightarrow \exists z\,(x\cdot z=y))$			

Ülesanne 1.61 Olgu signatuur $\langle e;\ *;\ =\rangle$. See signatuur lubab muuhulgas näiteks kirja panna järgmisi abstraktse algebra jaoks olulisi valemeid

$$(x*y)*z=x*(y*z), \quad (e*x=x)\,\&\,(x=x*e), \quad \exists y((x*y=e)\,\&\,(y*x=e)).$$

Millised neist valemitest on tõesed näites 1.54 vaadeldud interpretatsioonides vabade muutujate kõigi väärtuste korral?

Definitsioon 1.62 Valemi $\mathcal{F}$ **mudeliks** nimetatakse sellist interpretatsiooni α, milles valem $\mathcal{F}$ on tõene oma vabade muutujate kõikidel väärtustel. Sel juhul öeldakse ka, et valem $\mathcal{F}$ **on tõene mudelis** α.

Definitsioon 1.63 Interpretatsiooni α nimetatakse valemite hulga $\{\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_n\}$ **mudeliks**, kui see interpretatsioon on iga üksiku valemi mudel.

Näide 1.64 Vaatleme signatuuri $\sigma=\langle 1;\ \cdot;\ =\rangle$ interpretatsiooni α, kus $M=\mathbb{N}$ ja sümboleid interpreteeritakse standardselt. Siis valem

$$\mathcal{F}(x,y,z)=((x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z))$$

on tõene vabade muutujate x,y,z kõigil väärtustel ning seega antud interpretatsioon α on valemi $\mathcal{F}(x,y,z)$ mudel.

Valem

$$x\cdot x=x$$

aga ei ole tõene muutuja x väärtuse 2 korral ning seega interpretatsioon α ei ole selle valemi mudel.

Lihtne on ka aru saada, et interpretatsioon α on valemite hulga

$$\{(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z),\quad x\cdot 1=x,\quad 1\cdot x=x\}$$

mudel. Sellise valemite hulga mudeleid kutsutakse algebras **monoidideks**. Väga paljud algebralised struktuurid (näiteks rühmad, Abeli rühmad, vektorruumid) saab defineerida mingite valemite hulkade mudelitena.

Näide 1.65 Vaatleme signatuuris $\sigma = \langle \top;\ \ ;\ =, \leqslant \rangle$ valemite hulka

$$\{x \leqslant x,\ \ (x \leqslant y) \,\&\, (y \leqslant x) \Rightarrow x = y,\ \ (x \leqslant y) \,\&\, (y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z,\ \ x \leqslant \top\}.$$

Selle valemite hulga mudeliteks on osaliselt järjestatud hulgad, milles leidub suurim element.

Nagu nägime eespool, valemi interpretatsioon tekitab predikaadi. Võib püstitada ka vastupidise küsimuse: kas etteantud predikaadi, signatuuri ja selle interpretatsiooni korral õnnestub kirja panna valem, mille interpretatsioon oleks see predikaat.

Definitsioon 1.66 Olgu $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ valem signatuuris σ ja olgu $\alpha = \langle M_\alpha, I_\alpha \rangle$ selle signatuuri interpretatsioon. Öeldakse, et valem $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ **väljendab** predikaati $P : M_\alpha^n \to \{1, 0\}$, kui iga $m_1, \ldots, m_n \in M_\alpha$ korral

$$\mathcal{F}^\alpha(m_1, \ldots, m_n) = 1 \quad \text{parajasti siis, kui} \quad P(m_1, \ldots, m_n) = 1.$$

Lühemalt võib öelda, et valem $\mathcal{F}$ väljendab predikaati P, kui tema poolt tekitatud kujutus, mida mainisime märkuses 1.58, langeb kokku kujutusega P.

Näide 1.67 Valem $\mathcal{F}(y)$, mida vaatlesime näites 1.59, väljendab naturaalarvude hulgal defineeritud predikaati $P(y) =$ "y on paarisarv".

Näide 1.68 Vaatleme signatuuri $\langle 0, 1;\ +;\ = \rangle$ standardset interpretatsiooni hulgal $\mathbb{N}$.

Predikaati "$x = 3$" saab väljendada valemiga

$$x = (1 + 1) + 1$$

(konstantsümbolit naturaalarvu 3 jaoks meil hetkel signatuuris pole).

Predikaati "$x < y$" saab väljendada valemiga

$$\exists z\, ((x + z = y) \,\&\, \neg(x = y))$$

või hoopis valemiga

$$\exists z\, ((x + z = y) \,\&\, \neg(z = 0)).$$

Predikaati "x on paarisarv" saab väljendada valemiga

$$\exists y\, (x = y + y)$$

(ka korrutamistehte jaoks ei ole praegu signatuuris sümbolit).

Näide 1.69 Vaatleme suvalise mittetühja hulga A kõigi alamhulkade hulka $\mathcal{P}(A)$ ja signatuuri $\langle\ ;\ \ ;\ \subseteq \rangle$, kus puuduvad konstantsümbolid ja funktsionaalsümbolid. Interpreteerime sümbolit $\subseteq$ sisalduvusseosena.

Predikaati "X on tühi hulk" väljendab valem $\forall Y\, (X \subseteq Y)$.

Predikaati "Alamhulkade X ja Y ühend on Z" saab väljendada valemiga

$$(X \subseteq Z) \,\&\, (Y \subseteq Z) \,\&\, \forall W\, ((X \subseteq W) \,\&\, (Y \subseteq W) \Rightarrow (Z \subseteq W))$$

aga ka valemiga

$$\forall W\, ((X \subseteq W) \,\&\, (Y \subseteq W) \Leftrightarrow (Z \subseteq W)).$$

1.2.5 Valemite omadused

Nii nagu lausearvutuseski saab ka predikaatarvutuses rääkida valemi samaselt tõesusest, samaselt väärusest ja kehtestatavusest.

Definitsioon 1.70 Predikaatarvutuse valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse

- **samaselt tõeseks**, kui ta on tõene igas interpretatsioonis oma vabade muutujate kõigil väärtustel;
- **samaselt vääraks**, kui ta on väär igas interpretatsioonis oma vabade muutujate kõigil väärtustel.

Kui valem $\mathcal{F}$ on samaselt tõene, siis kirjutatakse $\models \mathcal{F}$.

Kui võtame mingi samaselt tõese lausearvutuse valemi ja asendame iga lausemuutuja mingi predikaatarvutuse valemiga, siis saame samaselt tõese predikaatarvutuse valemi. Näiteks valem

$$\exists x\, P(x) \vee \neg \exists x\, P(x)$$

on samaselt tõene. Sarnasel viisil saab samaselt vääratest lausearvutuse valemitest tuletada samaselt vääraid predikaatarvutuse valemeid. Kuid on ka selliseid samaselt tõeseid või vääraid predikaatarvutuse valemeid, millel puudub analoog lausearvutuses.

Näide 1.71 Veendume, et signatuuris $\sigma = \langle\ ;\ \ ;\ P\rangle$ antud valem

$$\mathcal{F} = \forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x)$$

on samaselt tõene.

Olgu meil fikseeritud signatuuri σ suvaline interpretatsioon $\alpha = \langle M_\alpha;\ I_\alpha\rangle$. Kuna valemis $\mathcal{F}$ pole vabu muutujaid, siis neile me väärtusi andma ei pea. Tänu interpretatsiooni fikseerimisele on meil olemas osavalemi $\forall x\, P(x)$ tõeväärtus. On kaks võimalust.

1) $\forall x\, P(x) = 1$. Siis ka $\mathcal{F}^\alpha = 1$ vastavalt definitsiooni 1.57 punktile 4.

2) $\forall x\, P(x) = 0$. Seega ei kehti väide, et iga $m \in M_\alpha$ korral $P(m)$ on tõene. Järelikult leidub vähemalt üks element $m \in M_\alpha$, mille korral $P(m) = 0$ ehk $\neg P(m) = 1$. See tähendab, et $\exists x\, \neg P(x) = 1$, ning seega ka $\mathcal{F}^\alpha = 1$.

Kuna suvalise interpretatsiooni korral on valem $\mathcal{F}$ tõene, siis on ta samaselt tõene.

Definitsioon 1.72 Predikaatarvutuse valemit nimetatakse **kehtestatavaks**, kui ta on tõene vähemalt ühes interpretatsioonis vabade muutujate mingitel väärtustel.

Näide 1.73 Valem

$$\mathcal{F} = \exists x\, P(x)$$

on kehtestatav, sest me saame konstrueerida interpretatsiooni, kus see valem on tõene. Valime näiteks interpretatsiooni kandjaks kõigi hetkel maailmas elavate meeste hulga ja ühekohalise predikaatsümboli P interpretatsiooniks olgu predikaat "... on kiilakas".

Ka valem

$$\mathcal{G}(y) = \forall x\, Q(x, y)$$

on kehtestatav. Olgu põhihulk $\mathbb{N}$ ja predikaatsümbolit Q interpreteerime kui predikaati $Q(x, y) =$ "$x \geqslant y$". Andes vabale muutujale y väärtuse 0 näeme, et $\forall x\, Q(x, 0) = 1$.

Lausearvutuse valemi samaselt tõesuse kontrollimiseks võib välja arvutada tema tõeväärtustabeli, milles on lõplik arv ridu. Et uurida predikaatarvutuse valemi samaselt tõesust, peaksime definitsioonist lähtudes vaatlema signatuuri kõikvõimalikke interpretatsioone. Neid on aga lõpmata palju, sest juba põhihulka M_α võib valida lõpmata paljudel viisidel. 1936. aastal tõestas Alonzo Church[10] järgmise fundamentaalse teoreemi.

Predikaatarvutuse mittelahenduvuse teoreem. *Ei leidu algoritmi, mis suvalise predikaatarvutuse valemi puhul suudaks kindlaks teha, kas see on samaselt tõene või ei.*

Teoreem 1.74 *Predikaatarvutuse valem $\mathcal{F}$ on samaselt tõene parajasti siis, kui tema eitus $\neg\mathcal{F}$ on samaselt väär.*

TÕESTUS. Definitsiooni 1.57 punkti 2 põhjal on iga interpretatsiooni ja vabade muutujate mistahes väärtuste korral valemite $\mathcal{F}$ ja $\neg\mathcal{F}$ tõeväärtused erinevad. Seega kui $\mathcal{F}$ on igas interpretatsioonis ja vabade muutujate kõigil väärtustel tõene, siis $\neg\mathcal{F}$ on igas interpretatsioonis ja vabade muutujate kõigil väärtustel väär ning ka vastupidi. □

Teoreem 1.75 *Predikaatarvutuse valem $\mathcal{F}$ on kehtestatav parajasti siis, kui tema eitus $\neg\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene.*

TÕESTUS. Vaatleme valemit $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ vabade muutujatega $x_1, \dots, x_n$. Kui $\mathcal{F}$ on kehtestatav, siis leidub mingi interpretatsioon α ja elemendid $m_1, \dots, m_n \in M_\alpha$ nii, et $\mathcal{F}^\alpha(m_1, \dots, m_n) = 1$. Siis aga $\neg\mathcal{F}^\alpha(m_1, \dots, m_n) = 0$, mis tähendab seda, et valem $\neg\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ ei ole samaselt tõene.

Kui valem $\neg\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ ei ole samaselt tõene, siis leidub interpretatsioon α ja elemendid $m_1, \dots, m_n \in M_\alpha$ nii, et $\neg\mathcal{F}^\alpha(m_1, \dots, m_n) = 0$. Siis aga $\mathcal{F}^\alpha(m_1, \dots, m_n) = 1$. See tähendab, et valem $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ on kehtestatav. □

1.2.6 Tõesuspuu predikaatarvutuses

Ka predikaatarvutuse valemite puhul saab valemit tõeseks või vääraks muutva interpretatsiooni leidmiseks kasutada tõesuspuid. Vaatleme selle kohta mõningaid näiteid.

Järgnevas näites on vasakul ääres ridade numbrid ja paremal ääres on näidatud, millisest eelnevast reast on antud rida saadud.

Näide 1.76 Uurime, kas valem

$$\forall x\, P(x) \,\&\, \forall x\, Q(x) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \,\&\, Q(x))$$

on samaselt tõene. Selleks proovime uurida, kas on võimalik, et see valem on mingis interpretatsioonis väär. Tekib järgmine tõesuspuu.

[10] Alonzo Church (1903–1995) — ameerika matemaatik

1.	$\forall x\, P(x) \,\&\, \forall x\, Q(x) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \,\&\, Q(x)) = 0$ ✓		
2.	$\forall x\, P(x) \,\&\, \forall x\, Q(x) = 1$ ✓		/1/
3.	$\forall x\, (P(x) \,\&\, Q(x)) = 0$ ✓		/1/
4.	$\forall x\, P(x) = 1$		/2/
5.	$\forall x\, Q(x) = 1$		/2/
6.	$P(c) \,\&\, Q(c) = 0$ ✓		/3/
7.	$P(c) = 0$	$Q(c) = 0$	/6/
8.	$P(c) = 1$	$P(c) = 1$	/4/
9.	$\times$	$Q(c) = 1$	/5/
		$\times$	

Selle puu read 2–5 on saadud definitsiooni 1.57 punktide 5 ja 3 põhjal. Rida 6 on saadud reast 3, mis ütleb, et $\forall x\, (P(x) \,\&\, Q(x)) = 0$. Definitsiooni 1.57 punkti 7 põhjal saame, et peab leiduma põhihulga mingi element, tähistame seda sümboliga c, mille korral $P(c) \,\&\, Q(c) = 0$. Rea 7 saamiseks kasutame konjunktsiooni definitsiooni. Rea 8 saamiseks kasutame seda, et rea 4 tõttu peab iga x väärtuse korral $P(x)$ olema tõene, muuhulgas siis ka $P(c) = 1$. Rea 9 saame analoogilise põhjendusega reast 5.

Nagu näeme, on puu mõlemad harud vastuolulised, seega ei leidu interpretatsiooni, milles esialgne valem oleks väär. Järelikult on see valem samaselt tõene.

Näide 1.77 Uurime, kas valem

$$\exists x\, P(x) \,\&\, \exists x\, Q(x) \Rightarrow \exists x\, (P(x) \,\&\, Q(x))$$

on samaselt tõene. Tekib järgmine tõesuspuu.

1.	$\exists x\, P(x) \,\&\, \exists x\, Q(x) \Rightarrow \exists x\, (P(x) \,\&\, Q(x)) = 0$ ✓			
2.	$\exists x\, P(x) \,\&\, \exists x\, Q(x) = 1$ ✓			/1/
3.	$\exists x\, (P(x) \,\&\, Q(x)) = 0$			/1/
4.	$\exists x\, P(x) = 1$ ✓			/2/
5.	$\exists x\, Q(x) = 1$ ✓			/2/
6.	$P(d) = 1$			/4/
7.	$Q(e) = 1$			/5/
8.	$P(d) \,\&\, Q(d) = 0$ ✓			/3/
9.	$P(e) \,\&\, Q(e) = 0$ ✓			/3/
10.	$P(d) = 0$	$Q(d) = 0$		/8/
11.	$\times$	$P(e) = 0$	$Q(e) = 0$	/9/
			$\times$	

Selles puus on kaks haru vastuolulised, kuid kolmas mitte. Selle kolmanda haru põhjal võime konstrueerida interpretatsiooni, kus põhihulk koosneb kahest elemendist, $M =$

$\{d, e\}$, ja ühekohalised predikaadid $P, Q : \{d, e\} \to \{1, 0\}$ on defineeritud võrdustega

$$P(d) = 1,\ P(e) = 0,\ Q(d) = 0,\ Q(e) = 1.$$

Selles interpretatsioonis

$$\exists x\, P(x) \,\&\, \exists x\, Q(x) = 1, \quad \text{kuid} \quad \exists x\, (P(x) \,\&\, Q(x)) = 0.$$

Seega esialgne valem ei ole samaselt tõene.

Märgime veel, et selles puus me ei märkinud rida 3 läbivaadatuks. Me küll kasutasime seda ridade 8 ja 9 saamiseks, aga sellega ei ole me veel kogu infot, mis reas 3 sisaldub, ära kasutanud.

Näide 1.78 Teha kindlaks, kas valem

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, P(x)$$

on samaselt tõene.

Alustame tõesuspuu konstrueerimist:

$$\begin{array}{lcc}
1. & \forall x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, P(x) = 0 \checkmark & \\
2. & \forall x\, P(x) = 1 & /1/ \\
3. & \exists x\, P(x) = 0 & /1/
\end{array}$$

Oleme olukorras, kus oleks vaja kasutada kas rida 2 või rida 3, aga me ei ole veel ühtegi tähist hulga M elemendi jaoks sisse toonud. Selles olukorras võime siiski kasutusele võtta tähise mingi elemendi jaoks (n.ö. esimese elemendi jaoks), sest definitsiooni kohaselt peab interpretatsiooni kandja M olema mittetühi hulk. Võtame selleks tähiseks näiteks c. Siis saame

$$\begin{array}{lcc}
1. & \forall x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, P(x) = 0 \checkmark & \\
2. & \forall x\, P(x) = 1 & /1/ \\
3. & \exists x\, P(x) = 0 & /1/ \\
4. & P(c) = 1 & /2/ \\
5. & P(c) = 0 & /3/ \\
 & \times &
\end{array}$$

Näeme, et valem on samaselt tõene.

Tõesuspuu abil saame oma ülesande lahendada küll paljudel juhtudel, kuid mitte alati.

Näide 1.79 Teha kindlaks, kas valem $\forall x \exists y\, P(x, y)$ on kehtestatav.

Konstrueerime tõesuspuu:

$$\begin{array}{lcc}
1. & \forall x \exists y\, P(x, y) = 1 & \\
2. & \exists y\, P(a, y) = 1 & /1/ \\
3. & P(a, b) = 1 & /2/ \\
4. & \exists y\, P(b, y) = 1 & /1/ \\
5. & P(b, c) = 1 & /4/ \\
6. & \vdots &
\end{array}$$

Olemasolukvantorit lahti kirjutades tuleb iga kord sisse tuua uus sümbol, rida 1 annab siis aga uue olemasolukvantorit sisaldava valemi. Seega tõesuspuu ei saa kunagi valmis ja me ei saa selle põhjal teha järeldusi valemi kohta.

Siiski saab ka ilma tõesuspuuta näha, et see valem on kehtestatav. Näiteks võib P osas vaadelda suvalisel mittetühjal hulgal võrduspredikaati.

Lõpuks sõnastame ka tõesuspuu analüüsimise reeglid, mida vaadeldud näidetes juba kasutasime.

$$\begin{array}{c} \forall x\,\mathcal{F}(x)=1 \\ | \\ \mathcal{F}(t)=1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \forall x\,\mathcal{F}(x)=0 \\ | \\ \mathcal{F}(c)=0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \exists x\,\mathcal{F}(x)=1 \\ | \\ \mathcal{F}(c)=1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \exists x\,\mathcal{F}(x)=0 \\ | \\ \mathcal{F}(t)=0 \end{array}$$

Siin c on uus konstantsümbol hulga M mingi elemendi tähistamiseks ja t on juba olemasolev (tõesuspuus varem sisse toodud) tähis.

1.2.7 Valemite samaväärsus. Predikaatloogika põhisamaväärsused

Definitsioon 1.80 Predikaatarvutuse valemeid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ nimetatakse **samaväärseteks**, kui nende tõeväärtused on võrdsed igas interpretatsioonis valemite vabade muutujate kõikidel väärtustel. Sellisel juhul kirjutatakse $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$.

Kui vaatleme kõigi predikaatarvutuse valemite hulka, milles esinevad indiviidmuutujad kuuluvad hulka $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, siis on lihtne näha, et samaväärsuse seos $\equiv$ on ekvivalentsiseos sellel hulgal.

Definitsioon 1.81 Öeldakse, et valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ **järeldub** valem $\mathcal{G}$, kui igas interpretatsioonis valemite vabade muutujate kõikidel väärtustel, kus valemid $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka valem $\mathcal{G}$ tõene. Sellisel juhul kirjutatakse $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \models \mathcal{G}$.

Lause 1.82 *Olgu $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ predikaatarvutuse valemid. Siis*

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{G} \quad \textit{parajasti siis, kui} \quad \mathcal{F} \models \mathcal{G} \textit{ ja } \mathcal{G} \models \mathcal{F}.$$

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Eeldame, et $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$. Kui α on mingi interpretatsioon ja vabadele muutujatele on antud sellised väärtused, et $\mathcal{F}$ on tõene, siis ka $\mathcal{G}$ on tõene, ja vastupidi. Seega $\mathcal{F} \models \mathcal{G}$ ja $\mathcal{G} \models \mathcal{F}$.

PIISAVUS. Eeldame, et $\mathcal{F} \models \mathcal{G}$ ja $\mathcal{G} \models \mathcal{F}$. Olgu fikseeritud mingi interpretatsioon ja vabade muutujate mingid väärtused. On kaks võimalust.

1) $\mathcal{F} = 1$. Siis ka $\mathcal{G} = 1$, sest $\mathcal{F} \models \mathcal{G}$.

2) $\mathcal{F} = 0$. Siis ei ole võimalik, et $\mathcal{G} = 1$, sest see oleks vastuolus tingimusega $\mathcal{G} \models \mathcal{F}$. Järelikult $\mathcal{G} = 0$.

Kuna valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ tõeväärtused on igas interpretatsioonis ja vabade muutujate kõigi väärtuste korral samad, siis $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$. □

Kui võtame mingi lausearvutuse valemite samaväärsuse ja asendame selles lausemuutujad predikaatarvutuse valemitega, siis saame predikaatarvutuse samaväärsuse. Näiteks kehtivad samaväärsused

$$\neg(\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{G}, \quad \neg(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \,\&\, \neg\mathcal{G}$$

sõltumata sellest, kas $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on lausearvutuse või predikaatarvutuse valemid. Siiski on predikaatarvutuses ka selliseid samaväärsusi, mida ei saa tõestada puhtalt lausearvutuse vahenditega. Üheks selliseks on näiteks

$$\neg\forall x\, \mathcal{F}(x) \equiv \exists x\, \neg\mathcal{F}(x).$$

Selliste samaväärsuste kirjapanekul loeme, et $\mathcal{F}$ on predikaatarvutuse valem, mis sisaldab vaba muutujat x, kuid põhimõtteliselt võib sisaldada ka veel mingeid teisi vabu muutujaid, mida me eraldi kirja panema ei hakka. Näiteks kui

$$\mathcal{F} = P(x) \& Q(y) \Rightarrow R(x, y, z),$$

siis võime öelda, et kehtib samaväärsus

$$\neg\forall x (P(x) \& Q(y) \Rightarrow R(x, y, z)) \equiv \exists x \neg(P(x) \& Q(y) \Rightarrow R(x, y, z)),$$

kus viimased kaks valemit sisaldavad vabu muutujaid y ja z.

Teoreem 1.83 *Predikaatloogikas kehtivad järgmised põhisamaväärsused.*

PS1. *Kvantori ja eituse vahetamisseadus:*

$$\neg\forall x\, \mathcal{F}(x) \equiv \exists x\, \neg\mathcal{F}(x), \qquad \neg\exists x\, \mathcal{F}(x) \equiv \forall x\, \neg\mathcal{F}(x).$$

PS2. *Kvantorite distributiivsus:*

$$\forall x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}(x)) \equiv \forall x\, \mathcal{F}(x) \;\&\; \forall x\, \mathcal{G}(x),$$

$$\exists x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x)) \equiv \exists x\, \mathcal{F}(x) \;\vee\; \exists x\, \mathcal{G}(x),$$

PS3. *Kui indiviidmuutuja x ei esine valemis $\mathcal{G}$ vabalt, siis*

$$\forall x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}) \equiv \forall x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}, \qquad \exists x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}) \equiv \exists x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G},$$

$$\forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}) \equiv \forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}, \qquad \exists x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}) \equiv \exists x\, \mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}.$$

PS4. *Kui indiviidmuutuja x ei esine valemis $\mathcal{G}$ vabalt, siis*

$$\forall x\, (\mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{G}) \equiv \exists x\, \mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{G}, \qquad \exists x\, (\mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{G}) \equiv \forall x\, \mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{G}.$$

Kui indiviidmuutuja x ei esine valemis $\mathcal{F}$ vabalt, siis

$$\forall x\, (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}(x)) \equiv \mathcal{F} \Rightarrow \forall x\, \mathcal{G}(x), \qquad \exists x\, (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}(x)) \equiv \mathcal{F} \Rightarrow \exists x\, \mathcal{G}(x).$$

PS5. *Seotud muutujate ümbernimetamine:*

$$\forall x\,\mathcal{F}(x) \equiv \forall y\,\mathcal{F}(y), \qquad \exists x\,\mathcal{F}(x) \equiv \exists y\,\mathcal{F}(y),$$

kus y ei esine valemis $\mathcal{F}(x)$.

PS6. *Samaliigiliste kvantorite kommutatiivsus:*

$$\forall x \forall y\,\mathcal{F}(x,y) \equiv \forall y \forall x\,\mathcal{F}(x,y), \qquad \exists x \exists y\,\mathcal{F}(x,y) \equiv \exists y \exists x\,\mathcal{F}(x,y).$$

TÕESTUS. Tõestame osa neist samaväärsusest. Selleks kasutame lauset 1.82.

PS1a. Näitame, et $\neg\forall x\,\mathcal{F}(x) \models \exists x\,\neg\mathcal{F}(x)$. Olgu meil fikseeritud mingi interpretatsioon $\alpha = \langle M_\alpha, I_\alpha\rangle$ ja vabade muutujate väärtused. Eeldame, et $\neg\forall x\,\mathcal{F}(x) = 1$. Siis $\forall x\mathcal{F}(x) = 0$. Järelikult ei ole nii, et iga elemendi $m \in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m) = 1$ (s.t. et kui anname muutujale x väärtuse m, siis valem $\mathcal{F}$ on tõene). See tähendab, et leidub mingi element $m_0 \in M_\alpha$ nii, et $\mathcal{F}(m_0) = 0$. Siis aga $\neg\mathcal{F}(m_0) = 1$. Predikaatarvutuse valemi tõeväärtuse definitsiooni põhjal (vt. definitsiooni 1.57 punkti 8) $\exists x\neg\mathcal{F}(x) = 1$.

Näitame, et $\exists x\,\neg\mathcal{F}(x) \models \neg\forall x\,\mathcal{F}(x)$. Selleks eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral on $\exists x\,\neg\mathcal{F}(x) = 1$. Siis peab leiduma mingi element $m_0 \in M_\alpha$ nii, et $\neg\mathcal{F}(m_0) = 1$. Järelikult $\mathcal{F}(m_0) = 0$. Siis aga ei ole nii, et iga $m \in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m) = 1$, s.t. $\forall x\,\mathcal{F}(x) = 0$ ehk $\neg\forall x\,\mathcal{F}(x) = 1$.

Kuna oleme tõestanud, et $\neg\forall x\,\mathcal{F}(x) \models \exists x\,\neg\mathcal{F}(x)$ ja $\exists x\,\neg\mathcal{F}(x) \models \neg\forall x\,\mathcal{F}(x)$, siis valemid $\neg\forall x\,\mathcal{F}(x)$ ja $\exists x\,\neg\mathcal{F}(x)$ on samaväärsed.

PS1b. Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral $\neg\exists x\,\mathcal{F}(x) = 1$ ehk $\exists x\,\mathcal{F}(x) = 0$. Siis hulgas M_α ei ole sellist elementi m, mille korral $\mathcal{F}(m) = 1$. Järelikult iga $m \in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m) = 0$ ehk $\neg\mathcal{F}(m) = 1$. Valemi tõeväärtuse definitsiooni põhjal (vt. definitsiooni 1.57 punkti 7) $\forall x\,\neg\mathcal{F}(x) = 1$. Sellega oleme tõestanud, et $\neg\exists x\,\mathcal{F}(x) \models \forall x\,\neg\mathcal{F}(x)$.

Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral kehtib $\forall x\,\neg\mathcal{F}(x) = 1$. Siis iga $m \in M_\alpha$ korral $\neg\mathcal{F}(m) = 1$ ehk $\mathcal{F}(m) = 0$. Järelikult ei leidu sellist hulga M_α elementi m, mille korral $\mathcal{F}(m) = 1$. Valemi tõeväärtuse definitsiooni põhjal $\exists x\mathcal{F}(x) = 0$ ehk $\neg\exists x\mathcal{F}(x) = 1$. Sellega oleme tõestanud, et $\forall x\neg\mathcal{F}(x) \models \neg\exists x\mathcal{F}(x)$.

PS2a. Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral $\forall x\,(\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}(x)) = 1$. Siis hulga M_α iga elemendi m korral $\mathcal{F}(m) \,\&\, \mathcal{G}(m) = 1$, kust konjunktsiooni definitsiooni abil saame, et $\mathcal{F}(m) = 1$ ja $\mathcal{G}(m) = 1$. Vastavalt valemi tõeväärtuse definitsioonile tähendab see, et $\forall x\,\mathcal{F}(x) = 1$ ja samuti $\forall x\,\mathcal{G}(x) = 1$. Definitsiooni 1.57 punkt 3 annab meile, et siis ka $\forall x\,\mathcal{F}(x) \,\&\, \forall x\,\mathcal{G}(x) = 1$. Sellega oleme tõestanud, et $\forall x\,(\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}(x)) \models \forall x\,\mathcal{F}(x) \,\&\, \forall x\,\mathcal{G}(x)$.

Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral kehtib $\forall x\,\mathcal{F}(x) \,\&\, \forall x\,\mathcal{G}(x) = 1$. Siis $\forall x\,\mathcal{F}(x) = 1$ ja $\forall x\,\mathcal{G}(x) = 1$. Olgu nüüd $m \in M_\alpha$ suvaline element. Siis valemi tõeväärtuse definitsioonist järeldub, et $\mathcal{F}(m) = 1$ ja $\mathcal{G}(m) = 1$, seega ka $\mathcal{F}(m) \,\&\, \mathcal{G}(m) = 1$. Kuna viimane võrdus kehtib iga $m \in M_\alpha$ korral, siis $\forall x\,(\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}(x)) = 1$. Sellega oleme tõestanud, et $\forall x\,\mathcal{F}(x) \,\&\, \forall x\,\mathcal{G}(x) \models \forall x\,(\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}(x))$.

PS2b. Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral $\exists x\,(\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x)) = 1$. Siis leidub selline $m_0 \in M_\alpha$, et $\mathcal{F}(m_0) \vee \mathcal{G}(m_0) = 1$. Disjunktsiooni definitsiooni tõttu $\mathcal{F}(m_0) = 1$ või $\mathcal{G}(m_0) = 1$. Vastavalt valemi tõeväärtuse definitsioonile esimesel juhul $\exists x\, \mathcal{F}(x) = 1$ ja teisel juhul $\exists x\, \mathcal{G}(x) = 1$. Järelikult ka $\exists x\, \mathcal{F}(x) \vee \exists x\, \mathcal{G}(x) = 1$. Sellega oleme tõestanud, et $\exists x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x)) \models \exists x\, \mathcal{F}(x) \vee \exists x\, \mathcal{G}(x)$.

Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral kehtib $\exists x\, \mathcal{F}(x) \vee \exists x\, \mathcal{G}(x) = 1$. Siis on kaks võimalust.

1) $\exists x\, \mathcal{F}(x) = 1$. Siis leidub selline $m_0 \in M_\alpha$, et $\mathcal{F}(m_0) = 1$, Järelikult võib öelda, et ka $\mathcal{F}(m_0) \vee \mathcal{G}(m_0) = 1$ ja $\exists x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x)) = 1$.

2) $\exists x\, \mathcal{G}(x) = 1$. Siis leidub selline $m_0 \in M_\alpha$, et $\mathcal{G}(m_0) = 1$. Järelikult võib öelda, et ka $\mathcal{F}(m_0) \vee \mathcal{G}(m_0) = 1$ ja $\exists x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x)) = 1$.

Sellega oleme tõestanud, et $\exists x\, \mathcal{F}(x) \vee \exists x\, \mathcal{G}(x) \models \exists x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x))$.

PS3a. Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}) = 1$. Siis iga $m \in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m) \,\&\, \mathcal{G} = 1$, kust $\mathcal{F}(m) = 1$ ja $\mathcal{G} = 1$. Järelikult $\forall x\, \mathcal{F}(x) = 1$ ja samuti $\forall x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G} = 1$. Sellega oleme tõestanud, et $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}) \models \forall x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}$.

Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral kehtib $\forall x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G} = 1$. Definitsiooni 1.57 punkti 3 põhjal $\forall x\, \mathcal{F}(x) = 1$ ja $\mathcal{G} = 1$. Siis iga $m \in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m) = 1$. Seega iga $m \in M_\alpha$ korral ka $\mathcal{F}(m) \,\&\, \mathcal{G} = 1$, kust valemi tõeväärtuse definitsiooni abil saame, et $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}) = 1$. Sellega oleme tõestanud, et $\forall x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G} \models \forall x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G})$.

PS3b. Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral $\exists x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}) = 1$. Siis leidub selline $m \in M_\alpha$, et $\mathcal{F}(m) \,\&\, \mathcal{G} = 1$. Järelikult ka $\mathcal{F}(m) = 1$ ja $\mathcal{G} = 1$. Valemi tõeväärtuse definitsiooni põhjal $\exists x\, \mathcal{F}(x) = 1$ ja kuna $\mathcal{G} = 1$, siis ka $\exists x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G} = 1$. Sellega oleme tõestanud, et $\exists x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}) \models \exists x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}$.

Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral kehtib $\exists x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G} = 1$. Definitsiooni 1.57 punkti 3 põhjal $\exists x\, \mathcal{F}(x) = 1$ ja $\mathcal{G} = 1$. Seega leidub selline $m \in M_\alpha$, et $\mathcal{F}(m) = 1$. Järelikult $\mathcal{F}(m) \,\&\, \mathcal{G} = 1$ ja samuti $\exists x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}) = 1$. Sellega oleme tõestanud, et $\exists x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G} \models \exists x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G})$.

PS3c. Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}) = 1$. Siis iga $m \in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m) \vee \mathcal{G} = 1$. On kaks võimalust.

1) $\mathcal{G} = 1$. Siis ka $\forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G} = 1$.

2) $\mathcal{G} = 0$. Siis peab iga $m \in M_\alpha$ korral $1 = \mathcal{F}(m) \vee \mathcal{G} = \mathcal{F}(m)$. Järelikult $\forall x\, \mathcal{F}(x) = 1$ ja $\forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G} = 1$.

Sellega oleme tõestanud, et $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}) \models \forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}$.

Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral kehtib $\forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G} = 1$. Siis on kaks võimalust

1) $\mathcal{G} = 1$. Siis iga $m \in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m) \vee \mathcal{G} = 1$ ja seega $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}) = 1$.

2) $\forall x\, \mathcal{F}(x) = 1$. Siis iga $m \in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m) = 1$ ja seega ka $\mathcal{F}(m) \vee \mathcal{G} = 1$. Järelikult $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}) = 1$.

Sellega oleme tõestanud, et $\forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G} \models \forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G})$.

PS3d. Selle tõestuse jätame lugejale iseseisvaks läbimõtlemiseks.

PS4a. Selle samaväärsuse tõestamiseks on kaks võimalust: teha seda otse (nii nagu eelmiste samaväärsuste tõestamisel) või kasutada juba varem tõestatud omadusi. Demonstreerime siin teist võimalust:

$$\begin{aligned}\forall x\,(\mathcal{F}(x)\Rightarrow\mathcal{G}) &\equiv \forall x\,(\neg\mathcal{F}(x)\vee\mathcal{G}) && \text{(LS14)}\\ &\equiv \forall x\,\neg\mathcal{F}(x)\vee\mathcal{G} && \text{(PS3b)}\\ &\equiv \neg\exists x\,\mathcal{F}(x)\vee\mathcal{G} && \text{(PS1b)}\\ &\equiv \exists x\,\mathcal{F}(x)\Rightarrow\mathcal{G}. && \text{(LS14)}\end{aligned}$$

Tänu seose $\equiv$ transitiivsusele võime kirjutada, et $\forall x\,(\mathcal{F}(x)\Rightarrow\mathcal{G})\equiv\exists x\,\mathcal{F}(x)\Rightarrow\mathcal{G}$.

PS4b. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}\exists x\,(\mathcal{F}(x)\Rightarrow\mathcal{G}) &\equiv \exists x\,(\neg\mathcal{F}(x)\vee\mathcal{G}) && \text{(LS14)}\\ &\equiv \exists x\,\neg\mathcal{F}(x)\vee\mathcal{G} && \text{(PS3d)}\\ &\equiv \neg\forall x\,\mathcal{F}(x)\vee\mathcal{G} && \text{(PS1a)}\\ &\equiv \forall x\,\mathcal{F}(x)\Rightarrow\mathcal{G}. && \text{(LS14)}\end{aligned}$$

PS4c ja **PS4d**. Need saab tõestada analoogiliselt kahe eelnevaga.

PS5a ja **PS5b**. Nii $\forall x\,\mathcal{F}(x)=1$ kui ka $\forall y\,\mathcal{F}(y)=1$ kehtivad parajasti siis, kui iga $m\in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m)=1$. Seega on need kaks valemit samaväärsed. Analoogiliselt $\exists x\,\mathcal{F}(x)\equiv\exists y\,\mathcal{F}(y)$.

PS6a ja **PS6b**. Need samaväärsused järelduvad vahetult kvantorite definitsioonidest. □

Vaatleme ühte näidet sellest, kus me n.ö. igapäevaelus neid samaväärsusi kasutame.

Näide 1.84 Vaatleme signatuuri $\sigma=\langle e;\ *;\ =\rangle$ interpretatsiooni, mille kandja on teist järku reaalarvuliste elementidega ruutmaatriksite hulk $M=Mat_2(\mathbb{R})$ ning interpreteerime sümbolit e ühikmaatriksina ja sümbolit $*$ maatriksite korrutamistehtena. Olgu meil valem

$$\mathcal{F}(x)=\exists y((x*y=e)\,\&\,(y*x=e)),$$

mis sisaldab vaba muutujat x. Siis

$$\begin{aligned}\neg\forall x\mathcal{F}(x) &= \text{“Ei ole nii, et kõik maatriksid on pööratavad”},\\ \exists x\neg\mathcal{F}(x) &= \text{“Leidub maatriks, millel ei ole pöördmaatriksit”}.\end{aligned}$$

Tänu teoreemi 1.83 punktile 1 teame, et need kaks väidet on samaväärsed.

Tekib loomulik küsimus, et kas teoreemi 1.83 punktis 2 võib konjunktsiooni asendada disjunktsiooniga ja vastupidi. Osutub, et vastus on eitav.

Lause 1.85 *Predikaatarvutuse valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ korral*

$$\forall x\,\mathcal{F}(x)\vee\forall x\,\mathcal{G}(x)\models\forall x\,(\mathcal{F}(x)\vee\mathcal{G}(x)),$$

kuid vastupidine järeldumine üldjuhul ei kehti.

TÕESTUS. Eeldame, et fikseeritud interpretatsiooni α ja vabade muutujate väärtuste korral $\forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \forall x\, \mathcal{G}(x) = 1$. Siis on kaks võimalust.

1) $\forall x\, \mathcal{F}(x) = 1$. See tähendab, et iga $m \in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m) = 1$. Järelikult iga $m \in M_\alpha$ korral ka $\mathcal{F}(m) \vee \mathcal{G}(m) = 1$. Seega $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x)) = 1$.

2) $\forall x\, \mathcal{G}(x) = 1$. Sellisel juhul saame analoogiliselt, et $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x)) = 1$.

Sellega oleme tõestanud, et $\forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \forall x\, \mathcal{G}(x) \models \forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x))$.

Veendume, et vastupidine järeldumine ei kehti. Selleks tuleb konstrueerida mingi interpretatsioon. Vaatleme näiteks signatuuri $\sigma = \langle\ ;\ \ ;\ P, Q\rangle$ interpretatsiooni, kus M on kõigi inimeste hulk ja

$$P(x) = \text{“}x \text{ on naissoost”},$$
$$Q(x) = \text{“}x \text{ on meessoost”}.$$

Olgu $\mathcal{F}(x) = P(x)$ ja $\mathcal{G}(x) = Q(x)$. Siis $\forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x)) = 1$ (iga inimene on kas naissoost või meessoost), kuid $\forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \forall x\, \mathcal{G}(x) = 0$, sest $\forall x\, \mathcal{F}(x) = 0$ ja $\forall x\, \mathcal{G}(x) = 0$ (ei ole nii, et kõik inimesed on naissoost või et kõik inimesed on meessoost). Seega

$$\forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}(x)) \not\models \forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \forall x\, \mathcal{G}(x).$$

□

Ülesanne 1.86 Näidata, et

$$\exists x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}(x)) \models \exists x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \exists x\, \mathcal{G}(x),$$

kuid vastupidine järeldumine üldjuhul ei kehti.

Teoreemi 1.83 punktis 6 nägime, et samaliigilisi kvantoreid võib ära vahetada. Kuidas on olukord eriliigiliste kvantoritega?

Lause 1.87 *Predikaatarvutuse valemi $\mathcal{F}$ korral*

$$\exists x\, \forall y\, \mathcal{F}(x, y) \models \forall y\, \exists x\, \mathcal{F}(x, y),$$

kuid vastupidine järeldumine üldjuhul ei kehti.

TÕESTUS. Oletame, et interpretatsioonis α ja vabade muutujate fikseeritud väärtuste korral on valem $\exists x\, \forall y\, \mathcal{F}(x, y)$ tõene. Siis leidub selline $m_0 \in M_\alpha$, et iga $n \in M_\alpha$ korral $\mathcal{F}(m_0, n) = 1$. Kui nüüd muutujal y on suvaline väärtus $n \in M_\alpha$, siis andes muutujale x väärtuse m_0 näeme, et $\mathcal{F}(m_0, n) = 1$. See tähendab, et valem $\forall y\, \exists x\, \mathcal{F}(x, y)$ on tõene.

Järeldumine

$$\forall y\, \exists x\, \mathcal{F}(x, y) \models \exists x\, \forall y\, \mathcal{F}(x, y)$$

aga ei kehti. Selle näitamiseks interpreteerime signatuuri $\langle\ ;\ ;\ <\rangle$ standardsel viisil hulgal $\mathbb{N}$ ja vaatleme valemit $\mathcal{F}(x, y) = (y < x)$. Siis valem $\forall y\, \exists x\, \mathcal{F}(x, y)$ on tõene selles interpretatsioonis, kuid valem $\exists x\, \forall y\, \mathcal{F}(x, y)$ ei ole tõene, sest ei leidu suurimat naturaalarvu. □

Märkus 1.88 Seotud muutujate ümbernimetamist võib kasutada näiteks järgmises olukorras:

$$\forall x\,(P(x) \vee Q(x,z)) \Rightarrow R(x) \equiv \forall y\,(P(y) \vee Q(y,z)) \Rightarrow R(x).$$

Esimeses valemis esineb x predikaatide P ja Q argumendina seotult, aga R argumendina vabalt. Segaduste vältimiseks võib olla otstarbekas tema seotud esinemised asendada muutujaga y.

Märkus 1.89 Kommenteerime veel vabade muutujate keelamise nõuet samaväärsustes PS3 ja PS4. Nimelt nende lubamisel me ei saa enam samaväärsusi. Demonstreerime seda samaväärsuse PS3a näitel.

Näitame, et

$$\forall x P(x) \,\&\, Q(x) \not\models \forall x(P(x) \,\&\, Q(x)),$$

kus P ja Q on ühekohalised predikaatsümbolid. Paneme tähele, et parempoolses valemis ei ole vabu muutujaid, aga vasakpoolses esineb x predikaadi Q argumendina vabalt. Vaatleme järgmist interpretatsiooni:

- põhihulk M on Eesti kõigi ülikoolide hulk,
- $P(x) =$ "x-is õpetatakse üliõpilasi",
- $Q(x) =$ "x on on üle 300 aasta vana".

Anname valemis $\forall x P(x) \,\&\, Q(x)$ predikaadi Q argumendina vabalt esinevale muutujale x väärtuseks "Tartu Ülikool". Siis $\forall x P(x) \,\&\, Q(\text{Tartu Ülikool}) = 1$. Samas valemi $\forall x(P(x) \,\&\, Q(x))$ tõeväärtus selles interpretatsioonis on 0, sest mitte kõik Eesti ülikoolid ei ole üle 300 aasta vanad.

Lõpuks vaatame veel ühte näidet tõesuspuude ja põhisamaväärsuste kasutamise kohta.

Näide 1.90 Olgu J ühekohaline predikaatsümbol. Näitame tõesuspuu abil, et valem

$$\exists x\,(J(x) \Rightarrow \forall y\, J(y)) \tag{1.1}$$

on samaselt tõene. Tõepoolest:

$$\begin{array}{lcl}
1. & \exists x\,(J(x) \Rightarrow \forall y\, J(y)) = 0 & \\
2. & J(a) \Rightarrow \forall y\, J(y) = 0 \checkmark & /1/ \\
3. & J(a) = 1 & /2/ \\
4. & \forall y\, J(y) = 0 \checkmark & /2/ \\
5. & J(b) = 0 & /4/ \\
6. & J(b) \Rightarrow \forall y\, J(y) = 0 & /1/ \\
7. & J(b) = 1\,. & /6/ \\
 & \times &
\end{array}$$

Vaatleme nüüd interpretatsiooni, kus M on kõigi inimeste hulk ja $J(x)$ = "x joob". Siis valem (1.1) tundub väitvat midagi üsna kummalist: leidub inimene, kelle joomisest järeldub, et kõik joovad. Uurime seda valemit pisut põhjalikumalt. Teisendame kasutades põhisamaväärsusi:

$$\begin{aligned} \exists x\,(J(x) \Rightarrow \forall y\, J(y)) &\equiv \exists x\,(\neg J(x) \vee \forall y\, J(y)) && \text{(LS14)} \\ &\equiv \exists x\, \neg J(x) \vee \forall y\, J(y)\,. && \text{(PS3)} \end{aligned}$$

Viimane valem ütleb, et kas kõik joovad või leidub inimene, kes ei joo. Selle väite tõesuses pole põhjust kahelda.

See kuulus näide on pärit Raymond Smullyanilt[11]. Valem (1.1) on tuntud kui Smullyani joomise valem.

1.2.8 Valemi prefikskuju

Nii nagu lausearvutuses võib rääkida valemi normaalkujudest (disjunktiivsest ja konjunktiivsest), nii ka predikaatarvutuses on otstarbekas kasutada teatud normaalkuju, mida kutsutakse prefikskujuks. Prefikskujus on kõik kvantorid valemi alguses. Näiteks algoritmid, mida kasutatakse teoreemide automaattõestamiseks, eeldavad tihti, et valem on sellisel kujul.

Definitsioon 1.91 Öeldakse, et predikaatarvutuse valem $\mathcal{F}$ on **prefikskujul**, kui ta ei sisalda kvantoreid või kui

$$\mathcal{F} = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \mathcal{F}',$$

kus $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ on kvantorid, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on indiviidmuutujad ja $\mathcal{F}'$ on kvantoriteta valem, mida kutsutakse valemi $\mathcal{F}$ **maatriksiks**.

Näide 1.92 Valem

$$\forall y \exists x\,(f(x) = y)$$

on prefikskujul, kusjuures tema maatriks on valem $f(x) = y$ (sobivas signatuuris). Valemid

$$\neg\forall x \exists y\, P(x,y,z) \quad \text{ja} \quad \exists x \forall y \neg P(x,y,z) \vee \forall x \exists y\, Q(x,y,z)$$

aga ei ole prefikskujul.

Teoreem 1.93 *Iga valemi jaoks leidub temaga samaväärne prefikskujul olev valem.*

TÕESTUS. Vastavalt definitsioonile 1.46 saadakse predikaatarvutuse valemid atomaarsetest valemitest lausearvutuse tehete ja kvantorite abil. Tõestame induktsiooniga valemi struktuuri järgi, et iga selline valem on samaväärne prefikskujul oleva valemiga.

Induktsiooni alus. Atomaarsed valemid on kujul $P(t_1, \ldots, t_n)$, kus P on n-kohaline predikaatsümbol ja $t_1, \ldots, t_n$ on termid. Sellistes valemites kvantorid puuduvad ning seega on nad prefikskujul.

[11]Raymond Smullyan (1919–2017) — ameerika matemaatik, mustkunstnik ja filosoof

Induktsiooni samm. Eeldame, et valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed prefikskujul olevate valemitega ning näitame, et iga valem, mis on neist saadud lausearvutuse tehte või kvantori rakendamise abil, on samuti samaväärne prefikskujul oleva valemiga. Niisiis olgu

$$\mathcal{F} \equiv Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\mathcal{F}_1, \qquad \mathcal{G} \equiv Q'_1y_1Q'_2y_2\ldots Q'_my_m\mathcal{G}_1,$$

kus $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{G}_1$ on kvantoriteta valemid. (Juhtumid, kus $\mathcal{F}$ või $\mathcal{G}$ või mõlemad on kvantoriteta, on lihtsamad ning need jätame läbimõtlemiseks lugejale.) Kasutades seotud muutujate ümbernimetamise reeglit PS5 võime eeldada, et $\{x_1\ldots,x_n\}\cap\{y_1,\ldots,y_m\}=\emptyset$, ja et ükski muutuja ei esine neis valemeis korraga seotult ja vabalt.

$\neg$. Iga $i \in \{1,\ldots,n\}$ korral tähistame

$$\overline{Q_i} := \begin{cases} \exists, & \text{kui } Q_i = \forall, \\ \forall, & \text{kui } Q_i = \exists. \end{cases}$$

Kasutades kvantori ja eituse vahetamisseadusi PS1 n korda saame, et

$$\neg\mathcal{F} \equiv \neg(Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\mathcal{F}_1) \equiv \overline{Q_1}x_1\overline{Q_2}x_2\ldots\overline{Q_n}x_n\neg\mathcal{F}_1,$$

kus valemis $\neg\mathcal{F}_1$ ei ole kvantoreid ja seega valem $\overline{Q_1}x_1\overline{Q_2}x_2\ldots\overline{Q_n}x_n\neg\mathcal{F}_1$ on prefikskujul.

&. Kasutades põhisamaväärsusi saame, et

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\,\&\,\mathcal{G} &\equiv Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\mathcal{F}_1\,\&\,\mathcal{G} \\
&\equiv Q_1x_1(Q_2x_2\ldots Q_nx_n\mathcal{F}_1\,\&\,\mathcal{G}) && \text{(PS3)} \\
&\equiv Q_1x_1Q_2x_2(Q_3x_3\ldots Q_nx_n\mathcal{F}_1\,\&\,\mathcal{G}) && \text{(PS3)} \\
&\ldots \\
&\equiv Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n(\mathcal{F}_1\,\&\,\mathcal{G}) && \text{(PS3)} \\
&\equiv Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n(\mathcal{G}\,\&\,\mathcal{F}_1) && \text{(LS3)} \\
&\equiv Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n(Q'_1y_1Q'_2y_2\ldots Q'_my_m\mathcal{G}_1\,\&\,\mathcal{F}_1) \\
&\equiv Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nQ'_1y_1Q'_2y_2\ldots Q'_my_m(\mathcal{G}_1\,\&\,\mathcal{F}_1). && \text{(PS3)}
\end{aligned}$$

Viimane valem on prefikskujul, sest valem $\mathcal{G}_1\,\&\,\mathcal{F}_1$ on kvantoriteta.

$\vee$. Teame, et

$$\mathcal{F}\vee\mathcal{G} \equiv \neg\neg(\mathcal{F}\vee\mathcal{G}) \equiv \neg(\neg\mathcal{F}\,\&\,\neg\mathcal{G}).$$

Tänu kahele eespool vaadeldud juhule võime öelda, et valem $\neg(\neg\mathcal{F}\,\&\,\neg\mathcal{G})$ (ja seega ka valem $\mathcal{F}\vee\mathcal{G}$) on samaväärne prefikskujul oleva valemiga.

$\Rightarrow$. Kuna $\mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{G}\equiv\neg\mathcal{F}\vee\mathcal{G}$, siis ka see juhtum taandub eespool vaadeldud juhtudele.

$\Leftrightarrow$. Et $\mathcal{F}\Leftrightarrow\mathcal{G}\equiv\mathcal{F}\,\&\,\mathcal{G}\vee\neg\mathcal{F}\,\&\,\neg\mathcal{G}$, siis ka siin saame kasutada juba tõestatut.

$\forall,\exists$. On selge, et valemitega $\forall x\,\mathcal{F}$ ja $\exists x\,\mathcal{F}$ samaväärsed valemid

$$\forall x\,Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\mathcal{F}_1 \ \text{ ja } \ \exists x\,Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\mathcal{F}_1$$

on prefikskujul.

$\square$

Valemi prefikskujule viimise all peame silmas temaga samaväärse prefikskujul oleva valemi leidmist. Seda on võimalik teha mitmel viisil. Esitame siin ühe võimaluse.

Predikaatarvutuse valemi prefikskujule viimise algoritm.

Olgu antud predikaatarvutuse valem $\mathcal{H}$, mis on vaja prefikskujule viia.

1. Elimineerime implikatsioonid ja ekvivalentsid kasutades samaväärsusi
$$\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}, \qquad \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv \mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G} \vee \neg\mathcal{F} \,\&\, \neg\mathcal{G}.$$
2. Viime eitused kvantorite alla kasutades De Morgani seadusi ja samaväärsusi
$$\neg\forall x\, \mathcal{F}(x) \equiv \exists x\, \neg\mathcal{F}(x) \qquad \neg\exists x\, \mathcal{F}(x) \equiv \forall x\, \neg\mathcal{F}(x).$$
Kahekordsed eitused jätame ära.
3. Nimetame seotud muutujad ümber nii, et iga kvantor seoks erinevat muutujat ja et ükski kvantor ei seoks muutujat, mis esineb kuskil vabalt.
4. Toome kvantorid osavalemite eest valemi ette kasutades samaväärsusi
$$\begin{aligned} \forall x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}) &\equiv \forall x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}, & \exists x\, (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}) &\equiv \exists x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}, \\ \forall x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}) &\equiv \forall x\, \mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}, & \exists x\, (\mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G}) &\equiv \exists x\, \mathcal{F}(x) \vee \mathcal{G} \end{aligned}$$
ja vajaduse korral ka konjunktsiooni ja disjunktsiooni kommutatiivsust.

Näide 1.94 Viime prefikskujule valemi
$$\mathcal{F}(z) = \neg(\forall x \exists y\, P(x, y, z) \vee \exists x \forall y\, \neg Q(x, y, z)),$$
mis sisaldab vaba muutujat z. Kasutades eelnevat algoritmi saame
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &\equiv \neg\forall x \exists y\, P(x, y, z) \,\&\, \neg\exists x \forall y\, \neg Q(x, y, z) && \text{(samm 2, LS12)} \\ &\equiv \exists x \forall y\, \neg P(x, y, z) \,\&\, \forall x \exists y\, \neg\neg Q(x, y, z) && \text{(samm 2, PS1)} \\ &\equiv \exists x \forall y\, \neg P(x, y, z) \,\&\, \forall x \exists y\, Q(x, y, z) && \text{(samm 2, LS23)} \\ &\equiv \exists x \forall y\, \neg P(x, y, z) \,\&\, \forall u \exists v\, Q(u, v, z) && \text{(samm 3, PS5)} \\ &\equiv \exists x \forall y\, (\neg P(x, y, z) \,\&\, \forall u \exists v\, Q(u, v, z)) && \text{(samm 4, PS3)} \\ &\equiv \exists x \forall y\, (\forall u \exists v\, Q(u, v, z) \,\&\, \neg P(x, y, z)) && \text{(samm 4, LS3)} \\ &\equiv \exists x \forall y \forall u \exists v\, (Q(u, v, z) \,\&\, \neg P(x, y, z)). && \text{(samm 4, PS3)} \end{aligned}$$
Viimane valem on prefikskujul.

Predikaatarvutuse valemi prefikskuju ei ole üheselt määratud.

Näide 1.95 Vaatleme valemit
$$\forall x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \forall x\, \mathcal{G}(x).$$
Rakendades algoritmi saame
$$\forall x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \forall x\, \mathcal{G}(x) \equiv \forall x\, \mathcal{F}(x) \,\&\, \forall y\, \mathcal{G}(y) \equiv \forall x \forall y (\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}(y)).$$
Samas teame, et ka valem $\forall x(\mathcal{F}(x) \,\&\, \mathcal{G}(x))$ on esialgse valemiga samaväärne. Seega oleme esialgsele valemile saanud kaks erinevat prefikskuju.

1.3 Aksiomaatilised teooriad

1.3.1 Aksiomaatilise teooria üldskeem

Mitteformaalne aksiomaatiline teooria ehitatakse üles järgmise skeemi kohaselt.

1. Fikseeritakse mingi hulk antud teoorias uuritavaid objekte, nendel defineeritud seoseid ja funktsioone ning sümboolika nende tähistamiseks.

2. Teatud hulk väiteid loetakse tõeseks ilma tõestuseta. Neid väiteid nimetatakse selle teooria **aksioomideks**.

3. Teooria arendamine seisneb teoreemide tõestamises. **Teoreemideks** loetakse väiteid, mida saab tõestada lähtudes aksioomidest. Selleks, et uusi teoreeme oleks mugavam sõnastada, võidakse olemasolevate mõistete abil defineerida uusi mõisteid ja tuua sisse uusi tähistusi.

Teooria aksiomaatiline ülesehitus annab igale soovijale võimaluse ise kontrollida, kas mingi teoreem ikka kehtib või mitte. Selleks tuleks veenduda, et aksioomidest lähtudes on kõik tõestussammud tehtud korrektselt.

Tänapäeval on enamus matemaatilisi teooriaid üles ehitatud aksiomaatiliselt. Muuhulgas näiteks

- eukleidiline geomeetria,
- naturaalarvude aritmeetika (Peano aksiomaatika),
- hulgateooria (näiteks Zermelo-Fraenkeli aksiomaatika),
- algebraliste struktuuride (rühmad, vektorruumid jne.) teooriad,
- matemaatiline analüüs ja funktsionaalanalüüs.

Ajalooliselt lõi esimese aksiomaatilise teooria vanakreeka matemaatik Eukleides (elas umbes aastatel 325–270 e.m.a.). Oma kuulsa teose "Elemendid" alguses sõnastas ta järgmised viis tasandi geomeetria aksioomi, millest lähtudes tõestas mitmeid teoreeme tasandi geomeetria kohta.

1. Igast punktist iga teise punktini saab tõmmata sirglõigu.

2. Iga sirglõigu saab pikendada sirgeks.

3. Saab joonistada mistahes raadiuse ja keskpunktiga ringjooni.

4. Kõik täisnurgad on omavahel võrdsed.

5. Kui mingi sirge lõikab kahte sirget nii, et samal pool tekkivad sisenurgad annavad kokku vähem kui kaks täisnurka, siis need kaks sirget lõikuvad samal pool, kus on need kaks sisenurka, mis annavad kokku vähem kui kaks täisnurka.

Mitteformaalse aksiomaatilise teooria puhul võivad tekkida küsimused: milliseid väiteid võib lugeda aksioomideks ja milliseid samme võib tõestamisel teha? Mitmetimõistetavuse vähendamiseks tuleks neid asju täpsustada ja seda saab teha formaalsete aksiomaatiliste teooriate abil.

Formaalne aksiomaatiline teooria ehitatakse üles järgmise skeemi kohaselt.

1. Fikseeritakse tähestik (sümbolite hulk) ja antakse valemi definitsioon.

2. Teatud hulk valemeid loetakse aksioomideks. Neid ei ole selles teoorias vaja tõestada.

3. Fikseeritakse lõplik hulk tuletusreegleid kujul

$$\frac{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n}{\mathcal{G}},$$

   mis lubavad valemitest $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ vahetult tuletada valemi $\mathcal{G}$.

Definitsioon 1.96 **Tuletuseks** ehk **formaalseks tõestuseks** nimetatakse valemite jada $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$, kus iga valem on kas aksioom või saadud mingi tuletusreegli abil mingitest talle eelnevatest valemitest.

Valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse **tuletatavaks**, kui leidub tuletus, mille viimane liige on valem $\mathcal{F}$.

Näide 1.97 Vaatleme järgmist formaalset aksiomaatilist teooriat.

1. Tähestik on $\{\mathrm{I}, \Box\}$. Valemiteks loeme sellised tähestiku sümbolite järjendid, milles sümbol $\Box$ sisaldub täpselt ühe korra.

2. Ainuke aksioom on valem $\Box$.

3. Ainuke tuletusreegel on

$$\frac{*}{\mathrm{I} * \mathrm{I}},$$

   kus $*$ on suvaline valem tähestiku $\{\mathrm{I}, \Box\}$ sümbolitest.

Selles teoorias on tuletatavd parajasti need valemid, mis sisaldavad sümbolist $\Box$ mõlemal pool võrdse arvu sümboleid I. Seega tuletatavad on valemid $\Box, \mathrm{I}\Box\mathrm{I}, \mathrm{II}\Box\mathrm{II}, \mathrm{III}\Box\mathrm{III}, \ldots$. Näiteks valem $\mathrm{I}\Box\mathrm{II}$ ei ole tuletatav ja sümbolite järjend IIII ei ole üldse valem selles teoorias.

Näide 1.98 Vaatleme järgmist formaalset aksiomaatilist teooriat.

1. Tähestik on $\{0, 1\}$. Valemiteks loeme kõikvõimalikud nullide ja ühtede järjendid.

2. Ainuke aksioom on valem 0.

3. Ainuke tuletusreegel on
$$\frac{x_1 \dots x_n}{x_1 \dots x_n \overline{x_1} \dots \overline{x_n}},$$
kus $x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$ ja
$$\overline{x_i} := \begin{cases} 1, & \text{kui } x_i = 0, \\ 0, & \text{kui } x_i = 1. \end{cases}$$

Selles teoorias saab konstrueerida näiteks tuletuse

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{0}{01}}{0110}}{01101001}}{0110100110010110}.$$

Selles teoorias on tuletatavateks valemiteks kuulsa Thue-Morse jada prefiksid pikkusega 2^n. Sarnaseid lõpmatuid jadasid uuritakse diskreetse matemaatika ühes harus, mida tuntakse *sõnade kombinatoorika* nime all ja mille üheks rajajaks loetakse Axel Thuet[12].

Niisiis valem on teatud sümbolite järjend. Nii nagu lause- ja predikaatarvutuseski võib valemile anda erinevaid tähendusi ehk semantikaid, mis ei pruugi üksteisega kuidagi seotud olla. Järgnevas vaatleme ainult selliseid semantikaid, mis lubavad rääkida valemi tõeväärtusest.

Definitsioon 1.99 Formaalset aksiomaatilist teooriat $\mathcal{T}$ nimetatakse semantika $\mathcal{S}$ suhtes

- **korrektseks**, kui iga teoorias $\mathcal{T}$ tuletatav valem on semantikas $\mathcal{S}$ tõene;
- **täielikuks**, kui iga semantikas $\mathcal{S}$ tõene valem on teoorias $\mathcal{T}$ tuletatav.

Näide 1.100 Vaatleme jälle näites 1.97 defineeritud teooriat. Toome sisse kolm erinevat semantikat. Neis kõigis tõlgendame n sümbolist I koosnevat järjendit naturaalarvuna n (näiteks järjendit I, I, I, I tõlgendame kui naturaalarvu neli). Sümboli $\square$ tähendus on igas semantikas erinev.

- Semantikas $\mathcal{S}_1$ tähendab $m \square n$ seda, et $m = n$.
- Semantikas $\mathcal{S}_2$ tähendab $m \square n$ seda, et $m \leqslant n$.
- Semantikas $\mathcal{S}_3$ tähendab $m \square n$ seda, et $m < n$.

Siis võime öelda järgmist.

- Vaadeldav teooria on semantika $\mathcal{S}_1$ suhtes korrektne ja täielik.
- Vaadeldav teooria on semantika $\mathcal{S}_2$ suhtes korrektne, kuid mitte täielik.
- Vaadeldav teooria ei ole semantika $\mathcal{S}_3$ suhtes ei korrektne ega täielik.

[12] Axel Thue (1863–1922) — norra matemaatik

1.3.2 Sekventsiaalne lausearvutus

Hakkame vaatlema lausearvutuse aksiomatiseerimise võimalusi. Neid on mitmeid, kuid kaheks olulisemaks on niinimetatud Hilberti tüüpi süsteemid ja Gentzeni tüüpi süsteemid. Kui Hilberti tüüpi süsteemides on palju aksioome ja vähe tuletusreegleid, siis Gentzeni tüüpi süsteemides on olukord vastupidine. Käesolevas kursuses tutvume põgusalt vaid ühe süsteemiga, mille saksa matemaatik Gerhard Gentzen võttis kasutusele aastal 1935.

Definitsioon 1.101 **Sekventsideks** nimetatakse sümbolite järjendeid kujul $\vdash \mathcal{G}$ ja

$$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}\,,$$

kus $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n, \mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid, mis ei sisalda ekvivalentsitehet. Valemite järjendit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ nimetatakse sekventsi **eesliikmeks** ehk **antetsedendiks** ja valemit $\mathcal{G}$ selle sekventsi **tagaliikmeks** ehk **suktsedendiks**.

Eesliiget ja tagaliiget eraldaval sümbolil $\vdash$ ei ole eesti keeles välja kujunenud kindlat nime. Inglise keeles on selle nimeks “turnstile”. Parema puudumisel võime selle kohta öelda *link*, sest ta natuke meenutab ukselinki. Sekventse võib lugeda ka järgmiselt: “kehtib $\mathcal{G}$” ja “valemitest $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$”.

Niisiis lausearvutuse aksiomaatilise teooria võib üles ehitada järgmiselt.

1. Tähestik koosneb lausemuutujatest, loogikatehetest $\neg, \&, \vee, \Rightarrow$ (lihtsuse mõttes on välja jäetud $\Leftrightarrow$), komast ja sümbolist $\vdash$. Tuletatavateks objektideks on sekventsid.

2. Aksioomid on sekventsid
$$\Gamma, \mathcal{F}, \Delta \vdash \mathcal{F},$$
kus Γ ja Δ tähistavad suvalisi lausearvutuse valemite järjendeid (mis võivad ka tühjad olla)

3. Tuletusreeglid on järgmised. Nendes $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ tähistavad lausearvutuse valemeid ja Γ, Δ suvalisi lausearvutuse valemite järjendeid.

paremale sissetoomine	vasakule sissetoomine või paremalt eemaldamine
$\dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{F} \qquad \Gamma \vdash \mathcal{G}}{\Gamma \vdash \mathcal{F}\&\mathcal{G}}\ (\vdash \&)$	$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F}\&\mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}\ (\& \vdash)$
$\dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{F}}{\Gamma \vdash \mathcal{F} \vee \mathcal{G}} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{G}}{\Gamma \vdash \mathcal{F} \vee \mathcal{G}}\ (\vdash \vee)$	$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{H} \qquad \Gamma, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F} \vee \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}\ (\vee \vdash)$
$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\Gamma \vdash \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}}\ (\vdash\Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{F} \qquad \Gamma \vdash \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}}{\Gamma \vdash \mathcal{G}}\ (\vdash\not\Rightarrow)$
$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \qquad \Gamma, \mathcal{F} \vdash \neg\mathcal{G}}{\Gamma \vdash \neg\mathcal{F}}\ (\vdash \neg)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\mathcal{F}}{\Gamma \vdash \mathcal{F}}\ (\vdash \not\neg)$

Lisaks neile on veel kaks n.ö. struktuurset reeglit

$$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{F}}{\Gamma, \mathcal{G} \vdash \mathcal{F}}\ (S\ +) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \Delta, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\Gamma, \mathcal{F}, \Delta \vdash \mathcal{G}}\ (S\ \sim)$$

valemite lisamiseks vasakule ja vasakul valemite järjekorra vahetamiseks.

Vaadeldava teooria semantika defineeritakse järgmiselt. Sekventsi $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ mõistetakse väitena, et valemitest $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$, s.t. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \models \mathcal{G}$ (vaata definitsiooni 1.17).

Antud aksiomaatikas kasutatavad tuletusreeglid vastavad üsna hästi nendele tõestusvõtetele, mida matemaatikud oma igapäevases töös kasutavad. Näiteks reegel $(\vdash \&)$ vastab mõttekäigule, et kui oleme tõestanud, et Γ-st järeldub $\mathcal{F}$ ja Γ-st järeldub $\mathcal{G}$, siis Γ-st järeldub ka $\mathcal{F}\&\mathcal{G}$. Kui aga parasjagu tegeleme tõestuse otsimisega, siis võib asja vaadata nii: näitamaks, et Γ-st järeldub $\mathcal{F}\ \&\ \mathcal{G}$, piisab, kui suudame tõestada, et Γ-st järeldub $\mathcal{F}$ ja Γ-st järeldub $\mathcal{G}$.

Vaatleme mõningaid näiteid sekventside tuletamise kohta.

Näide 1.102 Näitame, et selles aksiomaatilises teoorias on sekvents

$$A\&B \vdash B\&A$$

tuletatav. Tuletus konstrueeritakse niiöelda alt üles ja esitatakse puu kujul, mille juureks on tuletatav sekvents ja lehtedeks aksioomid. Vastupidine on väga raske kui mitte võimatu — meil ei ole harilikult mingit infot selle kohta, millistest aksioomidest peaks alustama.

Niisiis sekvents $A\&B \vdash B\&A$ on võimalik saada sekventsidest $A\&B \vdash B$ ja $A\&B \vdash A$ konjunktsiooni paremale sissetoomise reegli $(\vdash \&)$ abil:

$$\frac{A\&B \vdash B \qquad A\&B \vdash A}{A\&B \vdash B\&A}\ (\vdash \&)\,.$$

Vaatleme nüüd selle puu vasakpoolset haru. Kuna see ei ole veel aksioom, siis üritame leida reeglit, mida saaks siin rakendada. Sobib konjunktsiooni vasakule sissetoomise reegel $(\& \vdash)$:

$$\frac{\dfrac{\overline{\overline{A, B \vdash B}}}{A\&B \vdash B}\ (\& \vdash) \qquad A\&B \vdash A}{A\&B \vdash B\&A}\ (\vdash \&)\,.$$

Näeme, et sekvents $A, B \vdash B$ on aksioom (siin $\Gamma = A$, $\mathcal{F} = B$ ja Δ on tühi), selle rõhutamiseks tõmbame sekventsi kohale topeltjoone. Seda haru rohkem vaatlema ei pea. Ka paremapoolses harus saame kasutada reeglit $(\& \vdash)$:

$$\frac{\dfrac{\overline{\overline{A, B \vdash B}}}{A\&B \vdash B}\ (\& \vdash) \qquad \dfrac{\overline{\overline{A, B \vdash A}}}{A\&B \vdash A}\ (\& \vdash)}{A\&B \vdash B\&A}\ (\vdash \&)\,.$$

Oleme kõigis harudes jõudnud aksioomideni, seega ongi meil olemas tuletuspuu.

Konstrueeritud tuletuse saaks esitada ka sekventside järjendina

$$A, B \vdash B,\ A\&B \vdash B,\ A, B \vdash A,\ A\&B \vdash A,\ A\&B \vdash B\&A\,,$$

kuid puukujuline esitus on palju ülevaatlikum ja edaspidi me kasutame puid. Tuletuspuude kirjapanekul märgime iga horisontaalse joone juurde, millist tuletusreeglit (või tuletusreegleid) oleme kasutanud. Aksioomide kohale märgime topeltjoone.

Rõhutame veel, et sekventsi võib harilikult tuletada mitmetel erinevatel viisidel, s.t. tuletuspuu ei ole üheselt määratud. Lisaks sellele nõuab tuletuspuu konstrueerimine teatud leidlikkust. Näiteks reeglit $(\vdash \neg)$ altpoolt üles kasutades on valemi $\mathcal{G}$ valikuks lõpmata palju võimalusi, me peame (ideaalis) valima sellise $\mathcal{G}$, mis viib meid kõige kiiremini sihini. Järgmises näites on valitud $\mathcal{G} = A$.

Näide 1.103 Tuletada sekvents $A, \neg A \vdash B$.

Saame konstrueerida järgmise tuletuspuu:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{A, \neg A, \neg B \vdash A}} \qquad \overline{\overline{A, \neg A, \neg B \vdash \neg A}}}{A, \neg A \vdash \neg\neg B}\,(\vdash \neg)}{A, \neg A \vdash B}\,(\vdash \not\neg)\,.$$

Näide 1.104 Tuletada sekvents $\neg A\&\neg B \vdash \neg(A \vee B)$.

Tuletuspuu on selline:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{\neg A, \neg B, A \vdash A}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{\neg B, B, \neg A \vdash B}} \qquad \overline{\overline{\neg B, B, \neg A \vdash \neg B}}}{\neg B, B \vdash \neg\neg A}\,(\vdash \neg)}{\neg B, B \vdash A}\,(\vdash \not\neg)}{\neg A, \neg B, B \vdash A}\,(S\sim, S+)}{\neg A, \neg B, A \vee B \vdash A}\,(\vee \vdash) \qquad \overline{\overline{\neg A, \neg B, A \vee B \vdash \neg A}}}{\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)}\,(\vdash \neg)}{\neg A\&\neg B \vdash \neg(A \vee B)}\,(\& \vdash)\,.$$

1.3.3 Sekventsiaalse lausearvutuse korrektsus ja täielikkus

Nii nagu iga aksiomaatilise teooria puhul huvitab meid ka sekventsiaalse lausearvutuse puhul, millised valemid on tuletatavad ja millised mitte. Tuleb välja, et tuletatavad sekventsid on parajasti sellised, millele vastav lausearvutuse valem on samaselt tõene. Järgmine definitsioon täpsustab, mida me mõtleme sekventsile vastava valemi all.

Definitsioon 1.105 Sekventsi $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ **valemkujuks** nimetatakse lausearvutuse valemit $\mathcal{F}_1\&\mathcal{F}_2\&\ldots\&\mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$. Sekventsi $\vdash \mathcal{G}$ **valemkujuks** nimetatakse lausearvutuse valemit $\mathcal{G}$.

Meenutame (vt. teoreemi 1.18), et valem $\mathcal{F}_1\&\mathcal{F}_2\&\ldots\&\mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene parajasti siis, kui kehtib järeldumine $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \models \mathcal{G}$.

Teoreem 1.106 (Korrektsuse teoreem) *Kui sekvents $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ on tuletatav, siis tema valemkuju on samaselt tõene.*

TÕESTUS. Sekventsi tuletatavus tähendab, et me saame tema jaoks konstrueerida lõpliku tuletuspuu, mille lehtedeks (s.t. tippudeks, millest enam ülespoole harusid ei lähe) on aksioomid. Tõestame väite induktsiooniga tuletuspuu struktuuri järgi.

Induktsiooni alus. Aksioomi $\Gamma, \mathcal{F}, \Delta \vdash \mathcal{F}$ valemkuju on

$$\mathcal{F}_1 \& \ldots \& \mathcal{F}_{i-1} \& \mathcal{F} \& \mathcal{F}_{i+1} \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{F}$$

ning selline valem on samaselt tõene (s.t. tõene antud valemites esinevate lausemuutujate mistahes väärtustuse korral).

Induktsiooni samm. Iga tuletusreegli jaoks tuleb näidata, et kui reeglis esinevates valemites esinevate lausemuutujate mingi väärtustuse korral on joone kohal olevate sekventside valemkujud tõesed, siis on ka joone all oleva sekventsi valemkuju tõene sellel väärtustusel. Kui oleme seda näidanud, siis on selge, et iga väärtustuse korral levib valemkuju tõesus alates aksioomidest mööda tuletuspuud alla kuni tuletatava valemini.

1) Implikatsiooni paremalt eemaldamise reegel ($\vdash \not\Rightarrow$). Vaatleme kahte juhtu.

Kui Γ on tühi järjend, siis joone kohal olevate sekventside valemkujud on

$$\mathcal{F} \quad \text{ja} \quad \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}\,.$$

Kui need on mingil väärtustusel tõesed, siis implikatsiooni definitsiooni tõttu on ka $\mathcal{G}$ tõene, kusjuures $\mathcal{G}$ on joone all oleva sekventsi valemkuju.

Olgu nüüd $\Gamma = \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$. Oletame vastuväiteliselt, et mingi väärtustuse korral on ülemiste sekventside valemkujud

$$\mathcal{F}_1 \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{F} \quad \text{ja} \quad \mathcal{F}_1 \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})\,.$$

tõesed, aga alumise sekventsi valemkuju

$$\mathcal{F}_1 \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$$

väär. Siis $\mathcal{F}_1 \& \ldots \& \mathcal{F}_n$ peab olema tõene ja $\mathcal{G}$ väär. Implikatsiooni $\mathcal{F}_1 \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{F}$ tõesuse tõttu peab ka $\mathcal{F}$ olema tõene. Kuna eeldasime, et ka $\mathcal{F}_1 \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})$ on tõene, siis peab $\mathcal{G}$ olema tõene, vastuolu. Seega ülemiste sekventside valemkujude tõesusest peab järelduma alumiste sekventside valemkuju tõesus.

2) Konjunktsiooni paremale sissetoomise reegel ($\vdash \&$). Juhtumi, kus Γ on tühi, jätame läbimõtlemiseks lugejale. Olgu $\Gamma = \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ ja oletame vastuväiteliselt, et ülemiste sekventside valemkujud

$$\mathcal{F}_1 \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{F} \quad \text{ja} \quad \mathcal{F}_1 \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}\,. \tag{1.2}$$

on mingil väärtustusel tõesed, aga alumise sekventsi valemkuju

$$\mathcal{F}_1 \& \ldots \& \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{F} \& \mathcal{G}$$

on väär. Siis $\mathcal{F}_1 \& \dots \& \mathcal{F}_n$ on tõene ja $\mathcal{F} \& \mathcal{G}$ on väär. Järelikult vähemalt üks valemitest $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on väär, mis tähendab, et ka vähemalt üks implikatsioonidest (1.2) on väär, vastuolu.

Kõigi ülejäänud reeglite korral jätame üksikasjade läbimõtlemise lugeja hooleks. □

Lausearvutuse korrektsuse teoreem ütleb, et kui meil õnnestub mingi lausearvutuse valemi $\mathcal{F}$ jaoks konstrueerida tuletuspuu sekventsile $\vdash \mathcal{F}$, siis see valem on samaselt tõene. See annab veel ühe võimaluse (lisaks tõeväärtutabelile ja täieliku disjunktiivse normaalkuju leidmisele) valemi samaselt tõesuse näitamiseks.

Teoreem 1.107 (Mittevasturääkivuse teoreem) *Ei leidu sellist lausearvutuse valemit $\mathcal{F}$, mille korral oleks sekventsid $\vdash \mathcal{F}$ ja $\vdash \neg\mathcal{F}$ tuletatavad.*

TÕESTUS. Oletame vastuväiteliselt, et leidub selline valem $\mathcal{F}$, mille korral nii $\vdash \mathcal{F}$ kui ka $\vdash \neg\mathcal{F}$ on tuletatavad. Siis korrektsuse teoreemi põhjal on nende valemkujud $\mathcal{F}$ ja $\neg\mathcal{F}$ samaselt tõesed. Viimane on ilmselgelt võimatu. □

Teoreem 1.108 (Täielikkuse teoreem) *Kui sekventsi $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ valemkuju on samaselt tõene, siis on see sekvents tuletatav.*

Seda teoreemi me antud kursuses ei tõesta. Tõestuse võib leida õpikust [9], lk. 96.

Järeldus 1.109 *Sekventsiaalses lausearvutuses on tuletatavad parajasti need sekventsid, mille valemkuju on samaselt tõene.*

Märkus 1.110 Lausearvutuse aksiomatiseerimisel Gentzeni stiilis võib tuletusreeglite komplekti fikseerida paljudel erinevatel viisidel ja erinevates raamatutes seda ka tehakse. Tuletusreeglite valimisel lähtutakse enamasti sellest, et a) reeglite arv oleks väike (s.t. süsteem ei sisalda üleliigseid reegleid) ja b) tuletatavad oleks parajasti need sekventsid, mille valemkuju on samaselt tõene.

Niisiis oleme näinud, et sekventsiaalse lausearvutuse aksiomaatikaga (nii nagu see on formuleeritud selles konspektis) on kõik hästi: see on korrektne ja täielik valemite samaselt tõesuse semantika suhtes. Samas näites 1.100 nägime, et mitte iga aksiomaatilise teooria ja semantika korral ei pruugi see nii olla. On selge, et mitte kõik teooriad ja semantikad ei ole samavõrra olulised (näiteks mainitud näite teooria on liiga triviaalne). Seega mõistlik küsimusepüstitus on järgmine: kas matemaatika seisukohalt olulised teooriad on võimalik aksiomatiseerida nii, et traditsioonilises semantikas oleks nad korrektsed ja täielikud. Oluliseks tulemuseks siin oli Kurt Gödeli poolt 1931. aastal tõestatud *aritmeetika mittetäielikkuse teoreem*: kui naturaalarvude aritmeetika aksiomaatiline teooria on mittevasturääkiv, siis leidub samaselt tõene valem, mis ei ole tuletatav selles teoorias.

Kui aksiomaatilise teooria korrektsus ja täielikkus ei ole korraga saavutatavad, siis ilmselt tuleb leppida mittetäielikkusega, sest me ei taha loobuda korrektsusest (ei taha, et saaks teoorias tuletada vääraid valemeid). Niisiis selles olukorras püütakse aksioomid ja tuletusreeglid valida nii, et tuletatavate valemitega oleks hõlmatud kõige olulisem osa vastava teooria sisust. Naturaalarvude puhul võetakse nendeks aksioomideks reeglina Peano aksioomid, millega tutvume järgmises paragrahvis.

1.3.4 Peano aritmeetika

Selles paragrahvis vaatleme küsimust, kuidas defineerida naturaalarvud ja tehted nendega.

Naturaalarvude aritmeetika aksiomaatiliseks käsitlemiseks vaatleme signatuuri

$$\sigma = \langle 0;\ ', +, \cdot;\ = \rangle,$$

kus 0 on konstantsümbol, $'$ on ühekohaline funktsionaalsümbol (seda tõlgendame kui "järgmise" elemendi leidmise operatsiooni) ning $+$ ja $\cdot$ on kahekohalised funktsionaalsümbolid. **Peano aritmeetika** aksioomid on järgmised:

P1. $\forall x\, \neg(x' = 0)$;

P2. $\forall x \forall y (x' = y' \Rightarrow x = y)$;

P3. $\forall x (x + 0 = x)$;

P4. $\forall x \forall y (x + y' = (x + y)')$;

P5. $\forall x (x \cdot 0 = 0)$;

P6. $\forall x \forall y (x \cdot y' = x \cdot y + x)$;

P7. kõik valemid kujul $\mathcal{F}(0)\, \&\, \forall x (\mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{F}(x')) \Rightarrow \forall x \mathcal{F}(x)$, kus $\mathcal{F}(x)$ on suvaline valem signatuuris σ.

Märkus. Valemite kirjapanekul Peano aritmeetika signatuuris loeme nagu koolimatemaatikaski, et korrutamistehte prioriteet on kõrgem kui liitmistehte oma. See aitab vähendada sulgude arvu valemites. Nii näiteks aksioomis P6 esinevas avaldises $x \cdot y + x$ tuleb enne sooritada korrutamistehe ja siis liitmistehe.

Märkus 1.111 Me võime vaadelda hulka

$$\{0, 0', 0'', 0''', 0'''', \ldots\}$$

Osutub, et kõik selle hulga elemendid on erinevad. Aksioomi P1 tõttu on 0 erinev kõigist teistest selle hulga elementidest. Kui näiteks oletaksime, et $0' = 0''$, siis aksioomi P2 tõttu $0 = 0'$, mis on vastuolus aksioomiga P1. Seega $0'$ ja $0''$ on erinevad. Analoogiliselt saaksime mistahes kahe elemendi korral näidata, et nad on erinevad.

Märkus 1.112 Induktsiooniaksioom P7 annab ühe võimaluse, mille abil saab Peano aritmeetikas tõestada väiteid kujul $\forall x\, \mathcal{F}(x)$. Vastavalt implikatsiooni definitsioonile piisab sellise väite tõesuse näitamiseks sellest, kui veendume, et

1) $\mathcal{F}(0)$ on tõene (induktsiooni alus ehk baas),

2) $\forall x (\mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{F}(x'))$ on tõene (induktsiooni samm).

Kas me saaksime defineerida naturaalarvude hulga, kui aksioomide P1–P7 mudeli? Tekib küsimus, et kas valemitest P1–P7 koosneval hulgal leidub üldse mõni mudel? Kui jah, siis milline see võiks olla?

Hulgateooria aksioomide põhjal (mida me selles kursuses küll ei käsitle) on olemas hulgad $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ jne., kusjuures need on kõik paarikaupa erinevad. Tähistame

$$\begin{aligned}
&0 := \emptyset, \\
&1 := \{0\} = \{\emptyset\}, \\
&2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
&3 := \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\ \ \ldots
\end{aligned}$$

Nagu näha,

$$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n\},$$

s.t. selle jada iga järgmise hulga elementideks on kõik talle eelnevad hulgad. Hulgateooria aksioomidest lähtudes saab tõestada, et kehtib järgmine tulemus (tõestuse võib leida näiteks raamtust [4], teoreem 3.1.1).

Teoreem. *Leidub täpselt üks hulk* $\mathbb{N}$, *mis rahuldab järgmisi tingimusi:*

1. $\emptyset \in \mathbb{N}$*;*
2. $\forall x\, (x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cup \{x\} \in \mathbb{N})$*;*
3. *kui* K *on selline hulk, et*

$$(\emptyset \in K)\, \&\, \forall x\, ((x \in K) \Rightarrow (x \cup \{x\} \in K)),$$

siis $\mathbb{N} \subseteq K$.

Selle teoreemi 3. tingimus ütleb, et $\mathbb{N}$ on vähim hulk, mis sisaldab 0 ja mis koos iga hulgaga n sisaldab ka hulga $n \cup \{n\}$. See tähendab, et $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Selle hulga elemente hakkame nimetama **naturaalarvudeks**.

Interpreteerime nüüd signatuuri σ järgnevalt. Põhihulgaks olgu hulk $\mathbb{N}$. Funktsiooni $' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defineerime võrdusega

$$n' := n \cup \{n\} = n + 1.$$

Kahekohalised funktsioonid (ehk kahekohalised algebralised tehted) $+$ ja $\cdot$ hulgal $\mathbb{N}$ defineerime võrdustega

$$n + 0 := n, \quad n + m' := (n + m)',$$

$$n \cdot 0 := 0, \quad n \cdot m' := n \cdot m + n.$$

On võimalik näidata, et selline interpretatsioon on aksioomide P1–P7 mudeliks. Seda mudelit nimetame Peano aritmeetika **standardseks mudeliks**.

Tuleb välja, et Peano aritmeetikal on olemas ka mittestandardseid mudeleid. Selliste mudelite leidumist võimaldab asjaolu, et mudeli kandja M peab küll sisaldama elemente $0, 0', 0'', 0''', \ldots$, aga aksioomid P1–P7 ei ütle midagi selle kohta, kas see kandja võib sisaldada ka mingeid teisi elemente. Mittestandardsete mudelite konstruktsioonid on üsna keerulised ja selles kursuses me neid ei käsitle.

1.3.5 Naturaalarvude omadused

Niisiis naturaalarvud (nagu ka mittestandardsed mudelid) rahuldavad Peano aksioome. Tuleb välja, et väga suure osa naturaalarvude aritmeetika kohta käivatest teoreemidest (kuid mitte kõik) saab tõestada lähtudes Peano aksioomidest. Tõestame mõned sellised teoreemid.

Kui tahaksime seda teha formaalselt, siis peaksime sisse tooma tuletusreeglid kvantoritega valemite jaoks. Selles kursuses me ei hakka seda siiski tegema ja tõestame teoreemid mitteformaalselt — nii nagu seda harilikult matemaatilistes tekstides tehakse. Selle juures kasutame ühte matemaatikas laialt tarvitatavat tõestamistaktikat: kui soovime näidata, et väide $\forall x\, \mathcal{F}(x)$ on tõene, siis võtame põhihulga (antud juhul hulga $\mathbb{N}$) suvalise elemendi a ja näitame, et kehtib $\mathcal{F}(a)$. Kui see õnnestub, siis peabki väide kehtima põhihulga kõigi elementide korral, sest a oli valitud vabalt.

Teoreem 1.113 *Naturaalarvudel on omadus*

$$\forall x\, (0 + x = x)\,.$$

Tõestus. Tõestatav teoreem on kujul $\forall x\, \mathcal{F}(x)$, kus

$$\mathcal{F}(x) = (0 + x = x)\,.$$

Tõestamiseks kasutame induktsiooniaksioomi P7.
Induktsiooni alus. $\mathcal{F}(0)$ on tõene, sest aksioomi P3 põhjal $0 + 0 = 0$.
Induktsiooni samm. Peame näitama, et valem

$$\forall x\, (0 + x = x \Rightarrow 0 + x' = x')$$

on tõene. Olgu a suvaline naturaalarv ja eeldame, et $0 + a = a$. Peame näitama, et $0 + a' = a'$. Kasutades aksioomi P4 ja tehtud eeldust saamegi, et $0 + a' = (0 + a)' = a'$.

Tänu aksioomile P7 saame nüüd järeldada, et $\forall x\, \mathcal{F}(x)$ on tõene. □

Teoreem 1.114 *Naturaalarvude liitmine on assotsiatiivne:*

$$\forall x \forall y \forall z\, ((x + y) + z = x + (y + z))\,.$$

Tõestus. Tähistagu a ja b suvalisi naturaalarve. Teoreemi tõestamiseks piisab, kui näitame, et

$$\forall z\, ((a + b) + z = a + (b + z)).$$

Selleks kasutame aksioomi P7 olukorras, kus

$$\mathcal{F}(z) = ((a + b) + z = a + (b + z)).$$

Induktsiooni alus. Veendume, et $\mathcal{F}(0)$ on tõene. Tänu aksioomile P3

$$(a+b)+0 = a+b \quad \text{ja} \quad a+(b+0) = a+b.$$

Järelikult

$$(a+b)+0 = a+(b+0).$$

Induktsiooni samm. Peame näitama, et valem

$$\forall z\,((a+b)+z = a+(b+z) \;\Rightarrow\; (a+b)+z' = a+(b+z')) \tag{1.3}$$

on tõene. Selleks tähistagu c suvalist naturaalarvu ja eeldame, et

$$(a+b)+c = a+(b+c) \tag{1.4}$$

on tõene. Siis

$$\begin{aligned}
(a+b)+c' &= ((a+b)+c)' && \text{(P4)}\\
&= (a+(b+c))' && \text{(eeldus (1.4))}\\
&= a+(b+c)' && \text{(P4)}\\
&= a+(b+c'). && \text{(P4)}
\end{aligned}$$

Järelikult $(a+b)+c' = a+(b+c')$ ja sellega oleme näidanud, et valem (1.3) on tõene. □

Teoreem 1.115 *Naturaalarvude liitmine on kommutatiivne:*

$$\forall x \forall y\,(x+y = y+x).$$

TÕESTUS. Vaatleme valemit

$$\mathcal{F}(x) = \forall y\,(x+y = y+x).$$

Teoreemi tõestamiseks tõestame induktsiooniga, et valem $\forall x\,\mathcal{F}(x)$ on tõene.

Alus. Näitame, et valem

$$\forall y\,(0+y = y+0)$$

on tõene. Ka selleks kasutame induktsiooni. Täpsemalt öeldes näitame, et $\forall y\,\mathcal{G}(y)$ on tõene, kus $\mathcal{G}(y) = (0+y = y+0)$.

Alus. On ilmne, et $0+0 = 0+0$.

Samm. Näitame, et

$$\forall y\,(0+y = y+0 \;\Rightarrow\; 0+y' = y'+0)$$

on tõene. Tähistagu a suvalist naturaalarvu. Piisab tõestada, et

$$0+a = a+0 \;\Rightarrow\; 0+a' = a'+0 \tag{1.5}$$

on tõene. Eeldame, et $0 + a = a + 0$ on tõene. Siis

$$\begin{aligned} 0 + a' &= (0 + a)' && \text{(P4)} \\ &= (a + 0)' && \text{(eeldus)} \\ &= a' && \text{(P3)} \\ &= a' + 0. && \text{(P3)} \end{aligned}$$

Seega $0 + a' = a' + 0$ ja oleme tõestanud, et valem (1.5) on tõene.

Samm. Peame näitama, et

$$\forall x\, (\forall y\, (x + y = y + x) \ \Rightarrow\ \forall y\, (x' + y = y + x'))$$

on tõene. Tähistagu b suvalist naturaalarvu. Siis piisab tõestada, et

$$\forall y\, (b + y = y + b) \ \Rightarrow\ \forall y\, (b' + y = y + b')$$

on tõene. Selleks eeldame, et

$$\forall y\, (b + y = y + b) \tag{1.6}$$

on tõene. Vaja on näidata, et

$$\forall y\, (b' + y = y + b')$$

on tõene. Teeme seda induktsiooniga y järgi.

Alus. Kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} b' + 0 &= b' && \text{(P3)} \\ &= (b + 0)' && \text{(P3)} \\ &= (0 + b)' && \text{(eeldus (1.6))} \\ &= 0 + b'. && \text{(P4)} \end{aligned}$$

Samm. Peame tõestama, et

$$\forall y\, ((b' + y = y + b') \Rightarrow (b' + y' = y' + b'))$$

on tõene. Tähistagu c suvalist naturaalarvu. Piisab, kui tõestame, et

$$(b' + c = c + b') \Rightarrow (b' + c' = c' + b')$$

on tõene. Selleks eeldame, et

$$b' + c = c + b' \tag{1.7}$$

on tõene. Siis

$$\begin{aligned}
b' + c' &= (b' + c)' && \text{(P4)}\\
&= (c + b')' && \text{(eeldus (1.7))}\\
&= (c + b)'' && \text{(P4)}\\
&= (b + c)'' && \text{(eeldus (1.6))}\\
&= (b + c')' && \text{(P4)}\\
&= (c' + b)' && \text{(eeldus (1.6))}\\
&= c' + b'. && \text{(P4)}
\end{aligned}$$

Seega $b' + c' = c' + b'$, mida oligi tarvis tõestada.

□

Teoreem 1.116 *Naturaalarvude puhul kehtib järgmine distributiivsuse seadus:*

$$\forall x \forall y \forall z\, (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z).$$

Tõestus. Tähistagu a ja b suvalisi naturaalarve. Piisab, kui tõestame, et

$$\forall z\, (a \cdot (b + z) = a \cdot b + a \cdot z)$$

on tõene. Selle tõestamiseks kasutame induktsiooni z järgi.

Alus. Näitame, et $a \cdot (b + 0) = a \cdot b + a \cdot 0$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}
a \cdot (b + 0) &= a \cdot b && \text{(P3)}\\
&= a \cdot b + 0 && \text{(P3)}\\
&= a \cdot b + a \cdot 0. && \text{(P5)}
\end{aligned}$$

Samm. Tõestame, et

$$\forall z\, (a \cdot (b + z) = a \cdot b + a \cdot z \;\Rightarrow\; a \cdot (b + z') = a \cdot b + a \cdot z')$$

on tõene. Tähistagu c suvalist naturaalarvu. Piisab tõestada, et

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \;\Rightarrow\; a \cdot (b + c') = a \cdot b + a \cdot c'$$

on tõene. Selleks eeldame, et

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{1.8}$$

on tõene. Siis

$$\begin{aligned}
a \cdot (b + c') &= a \cdot (b + c)' && \text{(P4)}\\
&= a \cdot (b + c) + a && \text{(P6)}\\
&= (a \cdot b + a \cdot c) + a && \text{(eeldus (1.8))}\\
&= a \cdot b + (a \cdot c + a) && \text{(teoreem 1.114)}\\
&= a \cdot b + a \cdot c'. && \text{(P6)}
\end{aligned}$$

□

Teoreem 1.117 *Naturaalarvudel on järgmine omadus:*

$$\forall x \forall y \forall z\,(x+z=y+z \;\Rightarrow\; x=y).$$

Tõestus. Tähistagu a ja b suvalisi naturaalarve. Teoreemi tõestamiseks piisab, kui tõestame, et

$$\forall z\,(a+z=b+z \;\Rightarrow\; a=b)$$

on tõene. Selleks kasutame aksioomi P7 olukorras, kus

$$\mathcal{F}(z) = (a+z=b+z \;\Rightarrow\; a=b).$$

Induktsiooni alus. Veendume, et $\mathcal{F}(0)$ on tõene. Olgu $a+0=b+0$. Tänu aksioonile P3 saame võrduse $a=b$.
Induktsiooni samm. Tähistagu c suvalist naturaalarvu. Eeldame, et valem

$$a+c=b+c \;\Rightarrow\; a=b \tag{1.9}$$

on tõene. Oletame, et kehtib võrdus $a+c'=b+c'$. Siis aksioomi P4 põhjal $(a+c)'=(b+c)'$, kust aksioomi P2 abil saame võrduse $a+c=b+c$. Eeldust (1.9) kasutades saame, et $a=b$. Sellega oleme tõestanud, et

$$\forall z\,(\mathcal{F}(z) \Rightarrow \mathcal{F}(z'))$$

on tõene ning järelikult on tõene ka $\forall z\,\mathcal{F}(z)$. □

Ülesanne 1.118 Näidata, et naturaalarvudel on järgmised omadused:

- $\forall x \forall y \forall z\,((x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\,((x\cdot y)\cdot z = x\cdot (y\cdot z))$;
- $\forall x \forall y\,(x\cdot y = y\cdot x)$;
- $\forall x\,(x\cdot 1 = x)$.

Loomulikult ei pea naturaalarvude käsitlemisel piirduma ainult liitmis- ja korrutamistehte ning võrdusseosega. Võib defineerida ka uusi tehteid, seoseid ja mõisteid. Näiteks võime defineerida kahekohalise seose $\leqslant$ järgmiselt:

$$\forall x \forall y\,(x \leqslant y \Leftrightarrow \exists z(x+z=y)).$$

Teoreem 1.119 *Seos $\leqslant$ on järjestusseos naturaalarvude hulgal.*

TÕESTUS. Refleksiivsus. Tähistagu a suvalist naturaalarvu. Aksioomi P3 põhjal $a+0=a$. Järelikult $\exists z\,(a+z=a)$ on tõene. See tähendab, et kehtib ka $a \leqslant a$.

Antisümmeetria. Peame näitama, et

$$\forall x \forall y\,((x \leqslant y) \,\&\, (y \leqslant x) \Rightarrow (x=y)).$$

Tähistagu a, b suvalisi naturaalarve ning eeldame, et $a \leqslant b$ ja $b \leqslant a$. Siis leiduvad naturaalarvud c ja d nii, et $a+c=b$ ja $b+d=a$. Järelikult

$$(c+d)+a=a+(c+d)=(a+c)+d=b+d=a=0+a.$$

Teoreemi 1.117 põhjal saame, et $c+d=0$. Oletame vastuväiteliselt, et $d \neq 0$. Siis leidub selline e, et $d=e'$. Järelikult

$$0=c+d=c+e'=(c+e)',$$

mis on vastuolus aksioomiga P1. Seega $d=0$ ja võrdusest $b+d=a$ saame, et $b=a$.

Transitiivsus. Peame näitama, et

$$\forall x \forall y \forall z\,((x \leqslant y) \,\&\, (y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)).$$

Tähistagu a, b, c suvalisi naturaalarve ning kehtigu võrratused $a \leqslant b$ ja $b \leqslant c$. Siis leiduvad naturaalarvud u ja v nii, et $a+u=b$ ja $b+v=c$. Järelikult

$$c=b+v=(a+u)+v=a+(u+v),$$

kust seose $\leqslant$ definitsiooni tõttu $a \leqslant c$. $\square$

Ülesanne 1.120 Tõestada, et naturaalarvude järjestusseos $\leqslant$ on kooskõlas liitmise ja korrutamisega, s.t.

$$\forall x \forall y \forall z\,(x \leqslant y \;\Rightarrow\; x+z \leqslant y+z),$$
$$\forall x \forall y \forall z\,(x \leqslant y \;\Rightarrow\; x \cdot z \leqslant y \cdot z)\,.$$

Ülesanne 1.121 Tõestada, et naturaalavudel on omadus

$$\forall x\,(x \leqslant x \cdot x)\,.$$

Peatükk 2

Graafiteooria

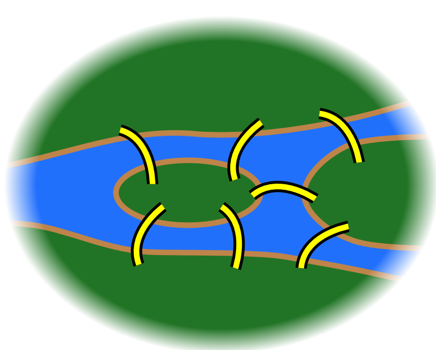
2.1 Graafi mõiste

Selle kursuse teises osas käsitleme graafiteooriat. See on diskreetse matemaatika üks oluline haru, millel leidub ka palju praktilisi rakendusi. Loengukonspekti koostamisel on põhiliselt kasutatud raamatuid [10], [3] ja [2].

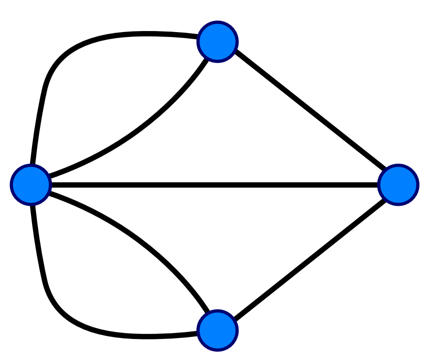
Graafiteooria on üks väheseid matemaatika harusid, mille puhul matemaatikud on ühel meelel küsimuses, et millal see alguse sai. Teooria alguseks loetakse Königsbergi sildade probleemi lahendust šveitsi matemaatiku Leonhard Euleri (1707-1783) poolt. Königsbergi linn (tänapäeval tuntakse seda Kaliningradi nime all) asus Pregeli jõe ääres ja kahel suurel jões asuval saarel: Kneiphofil ja Lomsel. Saari ja jõe kaldaid ühendas seitse silda, nii nagu näidatud alloleval joonisel. Linna elanikke vaevas küsimus: kas on võimalik teha linnas selline jalutuskäik, et iga silda oleks ületatud täpselt üks kord?

Euler andis sellele küsimusele eitava vastuse. Selleks kasutas ta matemaatilist mudelit, mida me tänapäeval tunneme graafi nime all. Parempoolsel joonisel on graaf, mis vastab Königsbergi sildade paigutusele. Täppidega on märgitud jõe kaldad ja kaks saart ning sildu tähistavad jooned.

Probleemi lahenduse kandis Euler ette Peterburi Teaduste Akadeemias (Euler elas ja töötas pikka aega Peterburis) 26. augustil 1735 ja publitseeris ajakirjas *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* aastal 1741. Sisuliselt tõestas Euler järelduse 2.63 tarvilikkuse osa.



Königsbergi sillad ...



... ja vastav graaf.

Paljude teistegi päriselus esinevate olukordade modelleerimiseks on kasulik kasutada diagramme, millel on punktide abil ära märgitud teatud objektid ja punktidevaheliste joonte abil on välja toodud objektidevahelised seosed. Näiteks maanteede kaart (punktid – asulad, jooned – maanteed) või sugupuu (punktid – inimesed, jooned – sugulussidemed). Sedasorti diagrammide matemaatiliseks käsitlemiseks on kasutusele võetud graafi mõiste.

Definitsioon 2.1 **Graaf** on paar $G = (V, E)$, kus V on mittetühi hulk ja E on hulk, mille elementideks on hulga V mingid kaheelemendilised alamhulgad. Hulga V elemente nimetatakse graafi G **tippudeks** ja hulga E elemente selle graafi **servadeks**.

Mõnikord on otstarbekas tähistada graafi G tippude hulka $V(G)$ ja servade hulka $E(G)$.

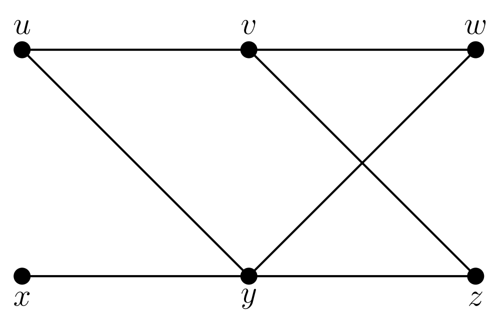
Serva tippude u ja v vahel tähistatakse $\{u, v\}$ asemel tihti ka lihtsalt uv.

Antud definitsiooni mõttes ei tohi graafil olla silmuseid (servi, mille otspunktid langevad kokku) ega kordseid servi (s.t. kahe tipu vahel on ülimalt üks serv). Samuti ei ole oluline servade suund (suunatud graafe vaatleme selles kursuses hiljem). Mõnikord nimetatakse selliseid graafe **lihtgraafideks**.

Põhimõtteliselt võib graafis olla ka lõpmata palju tippe ja servi, aga **käesolevas kursuses käsitleme ainult lõplikke graafe**. Kui tekib vajadus rääkida lõpmatutest graafidest, siis juhime sellele eraldi tähelepanu.

Definitsioon 2.2 Kui graafi tipp v kuulub servale e, siis öeldakse, et tipp v ja serv e on **intsidentsed**. Iga serv on intsidentne täpselt kahe tipuga, mida kutsutakse selle serva **otstippudeks**. Kahte tippu nimetatakse **naabertippudeks**, kui nad on servaga ühendatud. Kahte serva nimetatakse **naaberservadeks**, kui neil leidub ühine otstipp.

Näide 2.3 Graafe esitatakse tihti jooniste abil, kus täppidena on märgitud graafi tipud ja kaks tippu on ühendatud joonega parajasti siis, kui nende vahel on serv. Näiteks võime vaadelda järgmist kuuetipulist graafi:



Selle graafi puhul

$$V = \{u, v, w, x, y, z\}$$
$$E = \{uv, uy, vw, vz, wy, xy, yz\}.$$

Selles graafis näiteks u ja y on naabertipud, aga u ja z ei ole. Servad uy ja wy on naaberservad, sest neil on ühine otspunkt y.

Graafide esitamisel ja uurimisel saab kasutada maatriksite abi. Graafidega seotud maatriksite defineerimiseks on oluline fikseerida tippude ja servade järjekord.

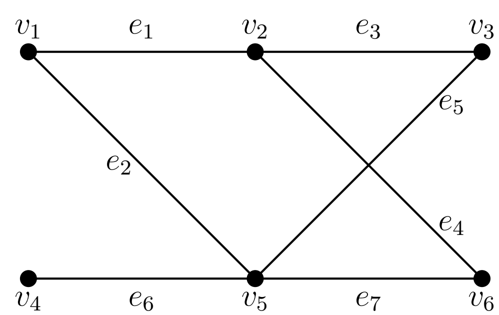
Definitsioon 2.4 Olgu $G = (V, E)$ graaf tippude hulgaga $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Graafi G **naabrusmaatriksiks** nimetatakse $n \times n$-maatriksit $A = (a_{ij})$, kus

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } v_i v_j \in E, \\ 0, & \text{kui } v_i v_j \notin E. \end{cases}$$

Definitsioon 2.5 Olgu $G = (V, E)$ graaf tippude hulgaga $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ja servade hulgaga $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Graafi G **intsidentsusmaatriksiks** nimetatakse $n \times m$-maatriksit $B = (b_{ij})$, kus

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } v_i \text{ on serva } e_j \text{ otstipp}, \\ 0, & \text{kui } v_i \text{ ei ole serva } e_j \text{ otstipp}. \end{cases}$$

Näide 2.6 Vaatleme graafi



Selle graafi naabrusmaatriks on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ja intsidentsusmaatriks on

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definitsioon 2.7 **Täisgraaf** on graaf, mille iga kahe erineva tipu vahel on serv. n-tipulist täisgraafi tähistatakse sümboliga K_n.

Definitsioon 2.8 **Nullgraaf** on graaf, milles puuduvad servad. n-tipulist nullgraafi tähistatakse sümboliga O_n.

Näide 2.9 Neljatipuline täisgraaf ja nullgraaf:

K_4 O_4

Märkus 2.10 Graafil K_n on servi sama palju kui on n-elemendilisel hulgal 2-elementilisi alamhulki. Seega on tema servade arv

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Näide 2.11 (Graafid kui mudelid) Vaatleme signatuuri, milles on üks kahekohaline predikaatsümbol R ja võrdussümbol $=$. Siis graafi $G = (V, E)$ võib vaadelda selle signatuuri interpretatsioonina põhihulgaga V, kus sümbolit R interpreteerime tippude naabrusseosena:

$$R(v_i, v_j) = a_{ij},$$

kus $A = (a_{ij})$ on graafi naabrusmaatriks. See interpretatsioon on valemite hulga

$$\{\forall x\, \neg R(x,x),\ \forall x \forall y\, (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))\}$$

mudeliks. Täisgraaf on veel valemi

$$\forall x \forall y\, (\neg(x = y) \Rightarrow R(x,y))$$

mudeliks. Nullgraaf on valemi

$$\forall x \forall y\, \neg R(x,y)$$

mudeliks.

Definitsioon 2.12 Graafi G **täiendgraaf** ehk **täiend** on graaf $\overline{G}$, mille tippude hulk on sama, mis G tippude hulk, aga servaga on ühendatud parajasti need tipud, mille vahel graafis G serv puudub.

Näide 2.13 Lihtne on aru saada, et

$$\overline{K_n} = O_n \quad \text{ja} \quad \overline{O_n} = K_n\,.$$

Näide 2.14 Järgmised graafid on teineteise täiendgraafid:

Graafidega tegeldes on meil aeg-ajalt vaja konstrueerida uusi graafe lähtudes olemasolevatest. Täiendgraafi moodustamine on üheks selliseks konstruktsiooniks. Lisaks sellele kasutame järgmisi operatsioone:

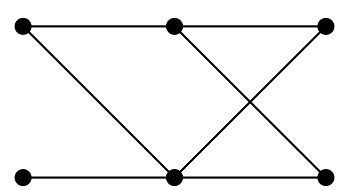
- serva kustutamine,
- serva lisamine kahe seniühendamata tipu vahele,
- tipu kustutamine koos kõigi temaga intsidentsete servadega,
- tipu lisamine koos servadega uue tipu ja teatava hulga (see hulk võib olla ka tühi) seniste tippude vahele.

Definitsioon 2.15 Graafi $G' = (V', E')$ nimetatakse graafi $G = (V, E)$ **alamgraafiks**, kui $V' \subseteq V$ ja $E' \subseteq E$.

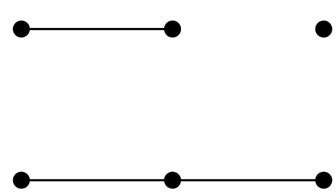
Teiste sõnadega: alamgraaf saadakse esialgsest graafist teatud hulga tippude ja servade kustutamisel.

Näide 2.16

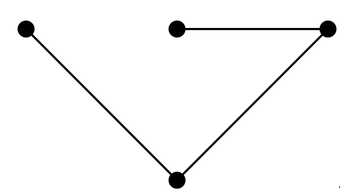
1. Iga graaf on iseenda alamgraaf.
2. Nullgraaf O_n on iga n-tipulise graafi alamgraaf.
3. Graafi



alamgraafideks on näiteks graafid



ja



.

Definitsioon 2.17 Graafi tipu v **astmeks** ehk **valentsiks** nimetatakse selle tipuga intsidentsete servade arvu. Tipu v astet tähistatakse sümboliga $d(v)$.

Kui graafis on n tippu, siis iga tipu v korral $d(v) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Definitsioon 2.18 Tippu, mille aste on 0, nimetatakse **isoleeritud tipuks**. Tippu, mille aste on 1, nimetatakse **rippuvaks tipuks**.

Näide 2.19 Näites 2.3 vaadeldud graafi tippude astmed on

$$d(u) = d(w) = d(z) = 2, \quad d(v) = 3, \quad d(x) = 1, \quad d(y) = 4.$$

Selles graafis on üks rippuv tipp x ja mitte ühtegi isoleeritud tippu.

Teoreem 2.20 (Tipuastmete teoreem) *Igas graafis on kõigi tippude astmete summa võrdne servade arvu kahekordsega.*

TÕESTUS. Olgu $G = (V, E)$ graaf. Me peame näitama, et

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|.$$

Selle summa leidmisel vaatleme ühekaupa kõiki graafi tippe ja loeme kokku selle tipuga intsidentsed servad. Nii tehes oleme iga serva arvesse võtnud kaks korda: üks kord ühe otstipu juures ja teine kord teise otstipu juures. Seega peab tippude astmete summa olema kaks korda suurem kui servade arv. □

Järeldus 2.21 *Igas graafis on paaritu astmega tippe paarisarv.*

TÕESTUS. Kui paaritu astmega tippe oleks paaritu arv, siis summa

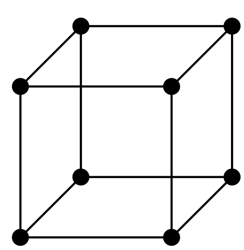
$$\sum_{v \in V} d(v)$$

oleks paaritu arv, mis on vastuolus teoreemiga 2.20. Järelikult peab paaritu astmega tippe olema paarisarv. □

Definitsioon 2.22 Graafi nimetatakse **regulaarseks**, kui tema kõigi tippude astmed on võrdsed. Kui kõigi tippude astmed on võrdsed naturaalarvuga k, siis öeldakse, et graaf on **k-regulaarne**.

Näide 2.23

1. Täisgraaf K_n on $(n-1)$-regulaarne.
2. Nullgraaf O_n on 0-regulaarne.
3. Näide 3-regulaarsest graafist:



Järeldus 2.24 *n-tipulises k-regulaarses graafis on $\frac{nk}{2}$ serva.*

TÕESTUS. Olgu $G = (V, E)$ k-regulaarne graaf. Teoreemi 2.20 põhjal

$$|E| = \left(\sum_{v \in V} d(v) \right) / 2 = \frac{nk}{2}.$$

□

Ülesanne 2.25 Kas leidub 5-tipuline 3-regulaarne graaf? Miks?

2.2 Ahelad ja tsüklid

Definitsioon 2.26 **Ahel** graafis G on selline tippude järjend $v_0, v_1, \ldots, v_k$, kus iga kaks järjestikust tippu on ühendatud servaga. Tippe v_0 ja v_k nimetatakse ahela **otstippudeks**, ülejäänud tipud on ahela **sisetipud**. Ahela $v_0, v_1, \ldots, v_k$ **pikkuseks** loetakse arv k.

Niisiis, ahela pikkus on võrdne servade arvuga (mitte tippude arvuga!) selles ahelas. Muuhulgas on olemas ka ahel pikkusega 0 (see sisaldab ainult ühte tippu v_0). Tihti kirjutatakse $v_0, v_1, \ldots, v_k$ asemel lihtsalt $v_0 v_1 \ldots v_k$.

Kui meil on ahel $v_0, v_1, \ldots, v_k$, siis öeldakse, et see ahel **läbib** tippe $v_0, v_1, \ldots, v_k$ ja servi $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k$.

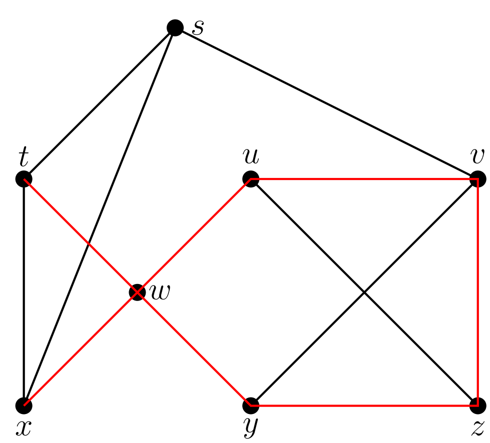
Ahelas võib mõni tipp või isegi mõni serv esineda mitu korda.

Definitsioon 2.27 **Lihtahel** on ahel, mille kõik tipud on erinevad.

Kuna lihtahelas ei saa tipud korduda, siis on selge, et lihtahelas ei saa ka ükski serv esineda mitu korda.

Märkus 2.28 Graafide puhul on erinevates keeltes ja erinevates raamatutes kasutusel üsna erinev terminoloogia, seetõttu tuleb hoolega jälgida, mida mingi termin mingis allikas tähendab. Siin oleme ära toonud mõnede terminite ingliskeelsed vasted, nii nagu neid on kasutatud raamatus [2].

Näide 2.29 Graafis



on ahel t, w, y, z, v, u, w, x (märgitud punasega) pikkusega 7 tippude t ja x vahel. See ahel ei ole lihtahel.

Teoreem 2.30 *Kui graafis G leidub tippude u ja v vahel ahel, siis leidub nende vahel ka lihtahel.*

TÕESTUS. Eeldame, et tippude u ja v vahel leidub ahel

$$u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k = v.$$

Oletame, et selles ahelas esineb mingi tipp w vähemalt kaks korda. Otsime üles selle tipu esimese ja viimase esinemise ahelas:

$$v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_k.$$

Siis

$$v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_k. \tag{2.1}$$

on ahel, milles tipp w esineb ainult ühe korra. Kui ahelas (2.1) esineb mõni tipp vähemalt kaks korda, siis toimime selle tipuga samamoodi nagu enne tegime tipuga w. Pärast lõplikku arvu selliseid samme saame tulemuseks ahela, kus ükski tipp ei esine mitu korda, s.t. tippe u ja v ühendava lihtahela. □

Näide 2.31 Näites 2.29 vaadeldud graafis leidub tippude t ja x vahel lihtahel t, w, x. Aga leidub ka ühest servast koosnev lihtahel t, x.

Nagu nägime, graafis võib kahe tipu vahel leiduda mitmeid ja erineva pikkusega lihtahelaid.

Definitsioon 2.32 Graafi tippude u ja v, kus $u \neq v$, vaheliseks **kauguseks** loetakse miinimumi nende tippude vaheliste lihtahelate pikkustest. Kui nende tippude vahel ahelaid ei leidu, siis loetakse kokkuleppeliselt, et u ja v vaheline kaugus on lõpmatus. Tipu kaugus iseendast on 0.

Definitsioon 2.33 **Kinnine ahel** on ahel, mille esimene ja viimane tipp langevad kokku. **Kinnise ahela pikkus** on tema servade arv.

Definitsioon 2.34 Kinnist ahelat, milles on vähemalt kolm serva ja mis ei läbi ühtegi tippu mitu korda, kutsutakse **tsükliks**.

Niisiis, tsükkel on ahel $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0$, kus $k \geqslant 3$ ja tipud $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ on paarikaupa erinevad. Tipu v_0 teistkordset esinemist järjendis $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0$ ei loeta selle tipu teistkordseks läbimiseks.

Tsükli (ja kinnise ahela) puhul ei ole oluline, millisest tipust me alustame selle kirja panemist. Seega näiteks $uvwu$, $vwuv$ ja $wuvw$ tähistavad ühte ja sama tsüklit.

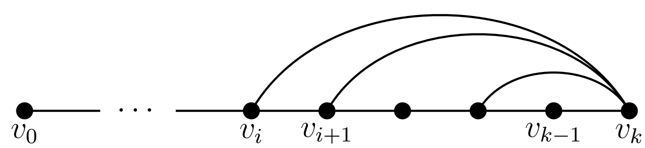
Näide 2.35 Näites 2.3 vaadeldud graafis on 6 tippu ja 7 serva. Selles leidub näiteks tsükkel $uvzyu$ pikkusega 4. Lisaks sellele on selles graafis $uvwyzvu$ kinnine ahel, mis ei ole lihtahel ega tsükkel, ning $uvwyz$ on lihtahel, mis ei ole kinnine.

Teoreem 2.36 *Kui $l \geqslant 2$ on naturaalarv ja graafi iga tipu aste on vähemalt l, siis selles graafis leidub*

1. *lihtahel, mille pikkus on vähemalt l,*

2. *tsükkel, mille pikkus on vähemalt $l + 1$.*

TÕESTUS. 1. Eeldame, et graafi G iga tipu aste on vähemalt l, kus $l \geqslant 2$. Olgu $v_0, v_1, \ldots, v_k$ selline lihtahel graafis G, mille pikkus on maksimaalne (s.t. pikemaid lihtahelaid ei leidu). Siis tipu v_k kõik naabertipud peavad ka kuuluma sellesse ahelasse, sest muidu saaksime neid v_k järele lisades ahelat pikendada (vt. joonist). Kuna v_k naabertippe on vähemalt l, siis ka $k \geqslant l$, s.t. vaadeldava lihtahela pikkus on vähemalt l.



2. Olgu v_i selline tipu v_k naaber, mis on tipule v_0 kõige lähemal (s.t. mille korral i on võimalikult väike). Siis $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_i$ on tsükkel, kusjuures tema pikkus on vähemalt $l + 1$, sest ta sisaldab tippu v_k ja kõiki v_k naabertippe. □

Järeldus 2.37 *Kui graafis on servi vähemalt sama palju kui tippe, siis selles graafis leidub tsükkel.*

TÕESTUS. Paneme tähele, et kui graafis $G = (V, E)$ kehtib $|E| \geqslant |V|$, siis $|V| \geqslant 3$, sest 1- ja 2-tipulises graafis on servi vähem kui tippe. Vähim graaf, milles on servi vähemalt sama palju kui tippe, on 3-tipuline täisgraaf K_3.

Olgu nüüd $G = (V, E)$ suvaline graaf, kus $|E| \geqslant |V| \geqslant 3$. Kustutame sellest graafist ühekaupa isoleeritud ja rippuvaid tippe koos intsidentse servaga, niikaua kuni neid leidub (ka neid, mis selle protsessi käigus juurde tekivad). Selle protsessi käigus kustutame igal sammul 1 tipu ja 0 või 1 serva. Seega pärast iga sammu jääb järele graaf, kus servi on vähemalt sama palju kui tippe. Kui kustutamise käigus jõuame 3-tipulise graafini, siis peab see olema K_3 ja selles graafis enam isoleeritud ja rippuvaid tippe ei ole. Aga isoleeritud ja rippuvad tipud võivad otsa saada ka mõne suurema tippude arvuga alamgraafi juures.

Niisiis lõpuks jääb järele graafi G alamgraaf $G' = (V', E')$, kus $|E'| \geqslant |V'| \geqslant 3$ ja G' iga tipu aste on vähemalt 2. Teoreemi 2.36 põhjal leidub graafis G' tsükkel, mille pikkus on vähemalt 3. Sama tsükkel esineb ka graafis G. □

2.3 Graafi sidusus

Definitsioon 2.38 Graafi nimetatakse **sidusaks**, kui selle iga kahe tipu vahel leidub ahel.

Märkus 2.39 1. Muuhulgas loetakse ka ühetipuline graaf sidusaks.

2. Sidusas graafis saab mistahes tipust liikuda servipidi mistahes teise tippu.

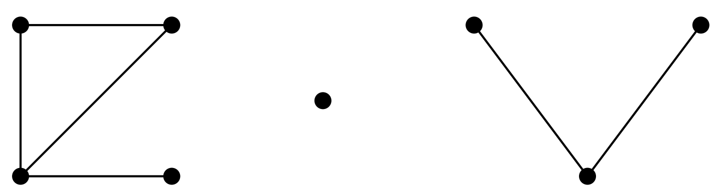
3. Kui u ja v on sidusa graafi kaks erinevat tippu, siis tänu teoreemile 2.30 leidub u ja v vahel lihtahel.

Kui graaf ei ole sidus, siis ta jaguneb sidusate alamgraafide lõikumatuks ühendiks.

Definitsioon 2.40 Graafi **sidususkomponentideks** ehk **sidusateks komponentideks** nimetatakse selle graafi maksimaalseid sidusaid alamgraafe.

Maksimaalsus selles definitsioonis tähendab seda, et antud sidus alamgraaf ei sisaldu üheski suurema tippude või servade arvuga sidusas alamgraafis. Graaf on sidus parajasti siis, kui tal on üks sidususkomponent.

Näide 2.41 Järgmisel graafil on kolm sidususkomponenti:

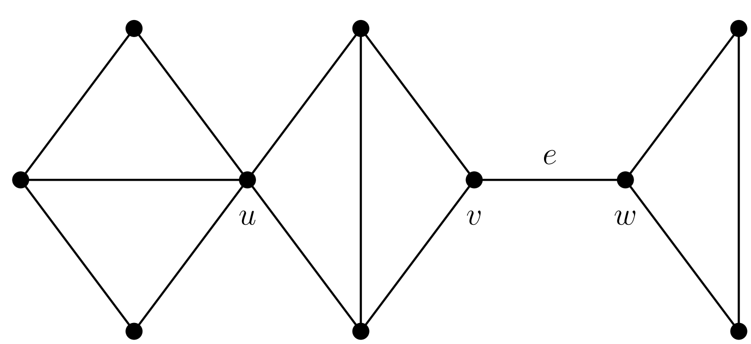


Definitsioon 2.42 Graafi serva nimetatakse **sillaks**, kui tema eemaldamisel graafist sidususkomponentide arv suureneb.

On selge, et serv uv on sild parajasti siis, kui pärast tema eemaldamist on otstipud u ja v erinevates sidususkomponentides.

Definitsioon 2.43 Kui tipu u ja temaga intsidentsete servade eemaldamisel graafi sidususkomponentide arv suureneb, siis öeldakse, et u on **eraldav tipp**.

Näide 2.44 1. Graafis



on üks sild e ja kolm eraldavat tippu u, v ja w.

2. Eesti maanteede graafis on Muhu saart Saaremaaga ühendav maanteelõik sillaks. Selles graafis moodustavad Hiiumaa, Vormsi ja teised saared omaette sidususkomponendid.

Anname nüüd tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et graafi serv oleks sild.

Teoreem 2.45 *Graafi serv on sild parajasti siis, kui ta ei kuulu ühessegi tsüklisse.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu serv uv sild. Oletame vastuväiteliselt, et leidub tsükkel C, mis sisaldab serva uv. Siis serva uv eemaldamisel on ikkagi võimalik tsükli C ülejäänud servi pidi liikuda tipust u tippu v. Seega u ja v on uues graafis samas sidususkomponendis, mis on vastuolus sellega, et uv oli sild. Järelikult uv ei kuulu tsüklitesse.
PIISAVUS. Eeldame, et serv uv ei sisaldu üheski tsüklis. Siis iga ahel tipust u tippu v peab sisaldama serva uv, sest muidu sellele ahelale serva uv lisades saaksime kinnise ahela, millest saab välja eraldada tsükli kasutades samasugust mõttekäiku nagu teoreemi 2.30 tõestuses. Kui nüüd serv uv eemaldada, siis ei jää enam ühtegi ahelat u ja v vahele. Seega u ja v on erinevates sidususkomponentides ning järelikult on serv uv sild. □

Järgmine teoreem annab seosed graafi tippude, servade ja sidususkomponentide arvude vahel.

Teoreem 2.46 *Kui n-tipulisel graafil on m serva ja k sidususkomponenti, siis kehtivad võrratused*

$$n-k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

TÕESTUS. 1. Tõestame võrratuse $n-k \leqslant m$. Teeme seda matemaatilise induktsiooniga graafi servade arvu järgi. Täpsemalt öeldes tõestame, et iga naturaalarvu m ja iga m-servalise graafi G korral ei ületa tippude arvu ja sidususkomponentide arvu vahe servade arvu m.

Alus. Olgu $m = 0$. Siis on tegemist nullgraafiga O_n, milles sidususkomponente on n tükki. Võrratus on kujul $n - n \leqslant 0$ ja see kehtib.

Samm. Olgu $m > 0$, olgu graafis G n tippu ja k sidususkomponenti ning eeldame, et väide kehtib kõigi graafide korral, kus on vähem kui m serva. Valime graafis G välja ühe serva e (see leidub, sest $m > 0$) ning kustutame selle ära, nii et tulemuseks saadav graaf on G'. On kaks võimalust.

a) e on sild. Siis graafis G' on n tippu, $m-1$ serva ja $k+1$ sidususkomponenti. Kasutades induktsiooni eeldust G' jaoks saame võrratuse $n-(k+1) \leqslant m-1$, kust $n-k \leqslant m$.

b) e ei ole sild. Siis graafis G' on n tippu, $m-1$ serva ja k sidususkomponenti ning induktsiooni eelduse põhjal $n-k \leqslant m-1$. Siis aga ka $n-k \leqslant m$.

2. Tõestame võrratuse

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}. \tag{2.2}$$

Selleks uurime, mitu serva saab maksimaalselt olla n-tipulisel graafil k sidususkomponendiga. Ilmselt peavad sellisel juhul kõik sidususkomponendid olema täisgraafid. Oletame, et meie m-servalisel graafil G on mitu täisgraafist sidususkomponenti, milles on rohkem kui 1 tipp. Teeme selle graafiga läbi järgmise konstruktsiooni.

- Jättes välja ühetipulised komponendid valime välja ühe minimaalse tippude arvuga komponendi,
- valime sellest komponendist välja ühe tipu v,
- kustutame ära kõik servad tipust v tema komponendi teistesse tippudesse,
- lisame tipust v servad mingi maksimaalse tippude arvuga sidususkomponendi kõigisse tippudesse.

Selle konstruktsiooni tulemusena saame uue graafi G_1, millel on

- graafiga G sama palju tippe ja sidususkomponente (paneme tähele, et tipu v kustutamisel jääb tema "vanast" sidususkomponendist järele 1 võrra väiksema tippude arvuga täisgraaf),
- servade arv m_1 on suurem kui graafi G servade arv: $m < m_1$.

Kordame graafiga G_1 sama mõttekäiku ja teeme seda seni kuni jõuame pärast lõplikku arvu samme graafini G^*, milles on

1. $k-1$ ühetipulist sidususkomponenti,
2. üks $(n-k+1)$-tipuline täisgraafist sidususkomponent.

Märkuse 2.10 põhjal on sellise graafi servade arv

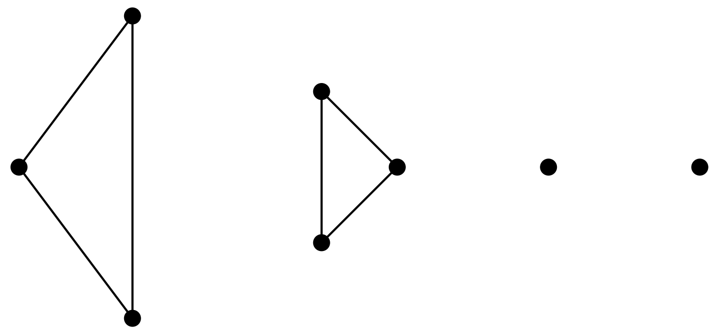
$$m^* = \frac{(n-k+1)(n-k+1-1)}{2} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Vastavalt meie arutluskäigule, kui meil on suvaline n-tipuline graaf m serva ja k sidususkomponendiga, siis $m \leqslant m^*$, mida oligi tarvis tõestada. □

Näide 2.47 Võrratuse (2.2) tõestamisel kasutatud konstruktsiooni illustreerib järgmine näide.

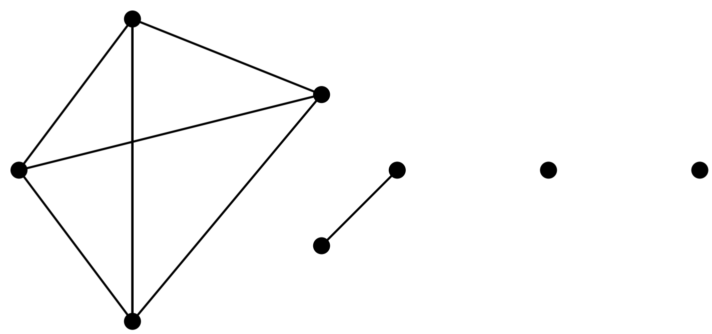
G

$m = 6$



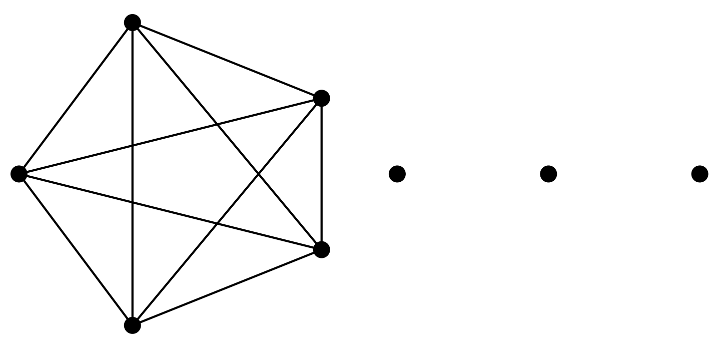
G_1

$m_1 = 7$



G^*

m^*=10



Teeme mõned järeldused teoreemist 2.46.

Järeldus 2.48 *Kui n-tipulisel graafil on vähem kui $n - 1$ serva, siis see graaf on mittesidus.*

Tõestus. Olgu n-tipulisel graafil k sidususkomponenti ja m serva, kusjuures $m < n - 1$. Teoreemi 2.46 põhjal $n - k \leqslant m < n - 1$, kust $n - k < n - 1$ ja seega $1 < k$. Kuna sidususkomponente on rohkem kui 1, siis on graaf mittesidus. □

Järeldus 2.49 *Kui n-tipulisel graafil on rohkem kui $(n-1)(n-2)/2$ serva, siis see graaf on sidus.*

TÕESTUS. Kui $n = 1$, siis graaf on sidus. Kui $n = 2$, siis peab graafil olema rohkem kui 0 serva ja seega on ta sidus. Edasises eeldame, et $n \geqslant 3$. Kui servade arv on m ja

$$m > \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

siis teoreemi 2.46 tõttu

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} < \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Järelikult

$$n^2 - 3n + 2 < n^2 - kn + n - kn + k^2 - k,$$

kust

$$k^2 - (2n+1)k + 4n - 2 > 0.$$

Vaadeldes seda ruutvõrratusena k suhtes ja leides vastava ruutvõrrandi lahendid 2 ja $2n - 1$ saame võrratuse

$$(k-2)(k-2n+1) > 0.$$

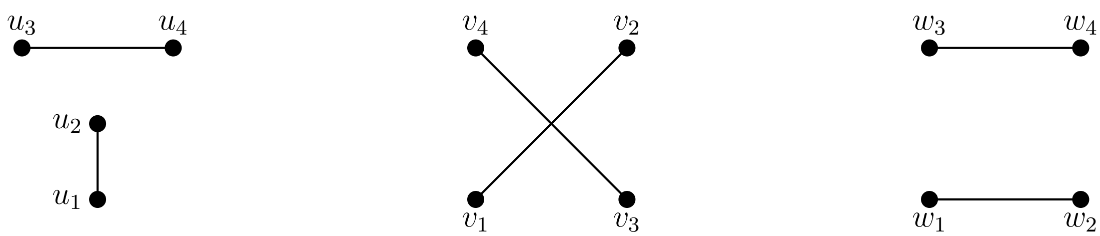
Arvestades võrratust $2 < 2n - 1$ (sest $n \geqslant 3$) ja ruutparabooli omadusi peab $k < 2$ või $k > 2n-1$. Kui $k > 2n-1$, siis $k > n+n-1 > n$, mis ei ole võimalik (sidususkomponente ei saa olla rohkem kui tippe). Seega $k < 2$ ehk $k = 1$. Seda oligi tarvis tõestada. $\square$

2.4 Graafide isomorfism

Definitsioon 2.50 Graafe $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ nimetatakse **isomorfseteks**, kui leidub selline bijektiivne kujutus $\varphi : V \to V'$ tipuhulkade vahel, et

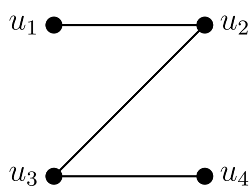
$$uv \in E \ \text{ parajasti siis, kui } \ \varphi(u)\varphi(v) \in E'.$$

Näide 2.51 Graafid

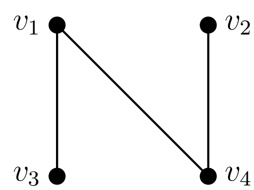


on omavahel isomorfsed. Ükski neist graafidest ei ole isomorfne graafiga O_4 ega K_4.

Näide 2.52 Järgmised graafid on isomorfsed:



ja



Üheks bijektiivseks kujutuseks, mis realiseerib isomorfismi, on näiteks

$$\varphi : \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \to \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad u_1 \mapsto v_3,\ u_2 \mapsto v_1,\ u_3 \mapsto v_4,\ u_4 \mapsto v_2\,.$$

Piltlikult öeldes tähendab graafide isomorfism seda, et liigutades graafi tippe tasandil nii, et olemasolevad servad liiguvad kaasa (võibolla pikemaks venides või lühenedes, aga neid ei tule juurde ega kao ära), on võimalik tõsta üks graaf teise peale nii et nad kattuvad. Näiteks mistahes kaks n-nurka (nii nagu neid mõistetakse koolimatemaatikas) on graafidena isomorfsed. Samas ükski kolmnurk ei ole graafina isomorfne ühegi nelinurgaga, sest nende tippude hulgad ei ole üksüheses vastavuses.

Graafide isomorfismi tõestamiseks tuleb konstrueerida üks sobiv kujutus tipuhulkade vahel (nii nagu tegime seda eelmises näites). Kui on vaja näidata, et kaks graafi ei ole isomorfsed, siis definitsiooni järgi peaks näitama, et ükski kujutus $V \to V'$ ei rahulda definitsiooni tingimusi. Neid kujutusi võib aga olla väga palju ja see kontroll väga ajamahukas (ka arvuti jaoks). Harilikult on lihtsam näidata, et ühel graafidest on mingi omadus, mis isomorfismi all säilib, aga teisel seda ei ole. (Selliseid omadusi nimetatakse mõnikord **invariantideks**.) Toome siin kaks näidet sellistest omadusest.

Lause 2.53 *Kui kaks graafi on isomorfsed, siis on neil sama palju servi.*

TÕESTUS. Olgu φ isomorfism graafide $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ vahel. Siis võime vaadelda kujutust $\psi : E \to E'$, mis on defineeritud võrdusega

$$\psi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$$

iga $uv \in E$ korral. Näitame, et ψ on injektiivne. Selleks oletame, et $\psi(uv) = \psi(u'v')$. Siis $\varphi(u)\varphi(v) = \varphi(u')\varphi(v')$ ehk $\{\varphi(u), \varphi(v)\} = \{\varphi(u'), \varphi(v')\}$. On kaks võimalust.
a) $\varphi(u) = \varphi(u')$ ja $\varphi(v) = \varphi(v')$. Siis φ injektiivsuse tõttu $u = u'$ ja $v = v'$, kust $uv = u'v'$.
b) $\varphi(u) = \varphi(v')$ ja $\varphi(v) = \varphi(u')$. Siis $u = v'$ ja $v = u'$, kust $uv = v'u' = u'v'$.
Sellega on näidatud, et ψ on injektiivne.

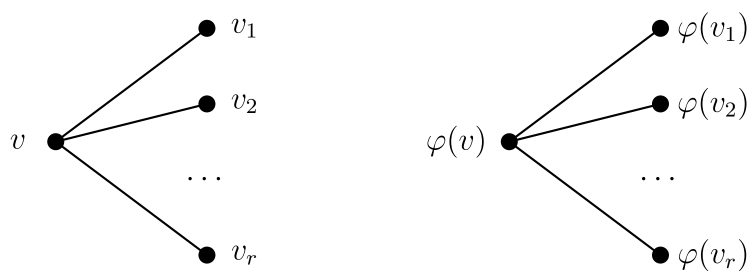
Veendume, et ψ on sürjektiivne. Olgu $xy \in E'$. Tänu φ sürjektiivsusele leiduvad tipud $u, v \in V$ nii, et $x = \varphi(u)$ ja $y = \varphi(v)$. Kuna $\varphi(u)\varphi(v) \in E'$, siis $uv \in E$. Järelikult $\psi(uv) = \varphi(u)\varphi(v) = xy$. See tähendab, et ψ on sürjektiivne.

Kuna kujutus ψ on bijektiivne, siis on graafides G ja G' sama palju servi. $\square$

Muidugi peab kahel isomorfsel graafil olema ka sama palju tippe.

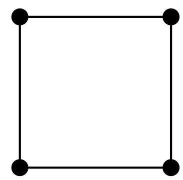
Lause 2.54 *Kui graafid $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ on isomorfsed ja graafis G leidub tipp, mille aste on r, siis ka graafis G' leidub tipp, mille aste on r.*

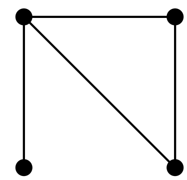
TÕESTUS. Olgu $v \in V$ ja $d(v) = r$. Eelduse põhjal leidub isomorfism φ graafist G graafi G'. Kui v naabertipud on $v_1, \ldots, v_r$, siis $\varphi(v)\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v)\varphi(v_r) \in E'$. Tänu φ injektiivsusele on tipud $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_r) \in V'$ paarikaupa erinevad. Seega $d(\varphi(v)) \geqslant r$.



Kui oletada, et veel ka $\varphi(v)x \in E'$, kus $x \in V'$ ja $x \notin \{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_r)\}$, siis tänu φ sürjektiivsusele leidub tipp $v_0 \in V$ nii, et $x = \varphi(v_0)$. Kuna $\varphi(v)\varphi(v_0) \in E'$, siis ka $vv_0 \in E$. Järelikult leidub selline $i \in \{1, \ldots, r\}$, et $v_0 = v_i$. Siis aga $x = \varphi(v_0) = \varphi(v_i) \in \{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_r)\}$, vastuolu. Sellega oleme näidanud, et $\varphi(v)$ ainsad naabertipud graafis G' on $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_r)$. Järelikult $d(\varphi(v)) = r$. $\square$

Näide 2.55 Graafid





ei ole isomorfsed, sest teises graafis leidub tipp astmega 1, aga esimeses mitte.

Lisaks kahele tõestatud lausele saab veel näidata, et isomorfsetel graafidel on

- sama palju sidususkomponente,
- samasugune tipuastmete mittekasvav järjend,
- sama lühima tsükli pikkus,
- sama pikima tsükli pikkus,
- jne.

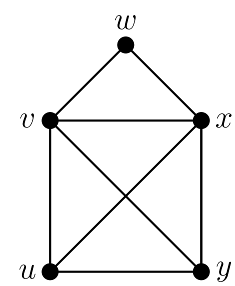
2.5 Euleri ja Hamiltoni graafid

Definitsioon 2.56 **Euleri ahel** on ahel, mis sisaldab graafi iga serva täpselt ühe korra. **Kinnine Euleri ahel** on Euleri ahel, mille esimene ja viimane tipp langevad kokku.

Definitsioon 2.57 **Euleri graaf** on sidus graaf, milles leidub kinnine Euleri ahel.

Märkus 2.58 "Kinnise Euleri ahela" asemel öeldakse mõnikord "Euleri tsükkel". Selle kursuse terminoloogias ei pruugi Euleri tsükkel olla tsükkel, sest selles võivad tipud korduda. Seetõttu me väldime termini "Euleri tsükkel" kasutamist.

Näide 2.59 Graafis



leidub Euleri ahel $uvyuxvwxy$.

Euleri ahela leidmise vajadus tekib praktikas näiteks siis, kui on vaja lumest puhastada teed mingis piirkonnas või laiali kanda post mingis linnas nii, et iga tänavat läbitaks üks kord.

Millistes graafides leidub kinnine Euleri ahel? Sellele küsimusele annab vastuse järgmine teoreem, mille tõestas Leonhard Euler 1736. aastal.

Teoreem 2.60 *Graaf on Euleri graaf parajasti siis, kui ta on sidus ja tema iga tipu aste on paarisarv.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu G Euleri graaf. Siis ta on sidus ja sisaldab kinnist Euleri ahelat. Olgu v selle graafi suvaline tipp. Iga kord kui ahel läbib seda tippu, kasutab ta ära kaks selle tipuga intsidentset serva (ühe sisenemiseks, teise väljumiseks). Et ahel saaks ära kasutada kõik tipu v juures olevad servad, peab tipu v aste olema paarisarv.

PIISAVUS. Tõestame, et kui sidusa graafi tippude astmed on paarisarvud, siis on see graaf Euleri graaf. Teeme seda induktsiooniga graafi servade arvu järgi.

Induktsiooni alus. Vaatleme juhtu, kus graafis on 0 serva. Sidususe tõttu tähendab see, et graafis on üksainus tipp v ja sobivaks kinniseks Euleri ahelaks on sellest ainsast tipust koosnev ahel, milles on 0 serva.

Induktsiooni samm. Olgu $G = (V, E)$ sidus graaf, mille tippude astmed on paarisarvud, ning olgu $|E| > 0$. Eeldame, et tõestatav väide kehtib kõigi graafide puhul, mille servade arv on väiksem kui $|E|$.

Graafi G ühegi tipu aste ei ole 0, sest muidu poleks ta sidus. Seega iga tipu aste on vähemalt 2. Teoreemi 2.36 põhjal sisaldab G mingit tsüklit C. Kui C sisaldab kõiki graafi G servi, siis ongi ta ise kinnine Euleri ahel ja tõestus on lõppenud.

Vastasel juhul vaatleme graafi G alamgraafi $G' = (V, E')$, mis on saadud kõigi tsüklisse C kuuluvate servade kustutamisel. Graafis G' on vähem servi kui graafis G. Samuti on G' kõigi tippude astmed paarisarvud, sest kustutades tsüklisse C kuuluvaid servi vähendame G iga tipu astet 0 või 2 võrra. Graaf G' ei pruugi olla sidus, küll aga on seda tema sidususkomponendid. Induktsiooni eelduse põhjal leidub G' iga sidususkomponendi jaoks kinnine Euleri ahel.

Konstrueerime nüüd G jaoks kinnise Euleri ahela järgmiselt. Hakkame liikuma mööda tsükli C servi. Kui jõuame tipuni v_1, mille aste graafis G' ei ole 0 (s.t. mille aste graafis G on vähemalt 4), siis läbime tippu v_1 sisaldavas G' sidususkomponendis leiduva kinnise Euleri ahela ning jõuame lõpuks tippu v_1 tagasi. Siis jätkame tsükli C läbimist kohast, kus see pooleli jäi, kuni jõuame järgmise tipuni v_2, mille juures on veel läbimata G' servi. Tippu v_2 sisaldavas G' sidususkomponendis läbime jällegi kinnise Euleri ahela ja jõuame tagasi tippu v_2. Protseduuri korrates läbime niimoodi tsükli C. Tulemuseks on kinnine Euleri ahel G jaoks. □

Järeldus 2.61 *Täisgraaf K_n on Euleri graaf parajasti siis, kui n on paaritu arv.*

TÕESTUS. Täisgraafis K_n on iga tipu aste $n - 1$, mis on paarisarv parajasti siis, kui n on paaritu. □

Märkus 2.62 Eelmise teoreemi tõestus läheb läbi ka siis, kui graafis võib kahe tipu vahel olla mitu serva (selliseid graafe kutsutakse mõnikord **multigraafideks**). Paneme tähele, et selles tõestuses me kasutame teoreemi 2.36, mille tõestus läheb samuti multigraafide korral läbi, kui selle sõnastuses asendada fraas "iga tipu aste on vähemalt l" fraasiga "igal tipul on vähemalt l naabertippu". Multigraafis võib tipu aste (s.t. intsidentsete servade arv) olla suurem kui naabertippude arv.

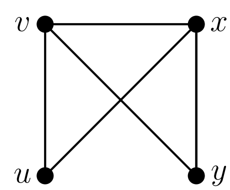
Järeldus 2.63 *Sidusas graafis leidub Euleri ahel tipust u tippu v parajasti siis, kui u ja v on selle graafi ainsad paaritu astmega tipud.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. See on sarnane teoreemi 2.60 tarvilikkuse tõestusega.
PIISAVUS. Eeldame, et u ja v on ainsad paaritu astmega tipud. Lisame nende vahele serva (tulemusena võib tekkida multigraaf). Saadud graafis on kõigi tippude astmed paarisarvud. Seega teoreemi 2.60 tõttu leidub selles graafis kinnine Euleri ahel. Jättes sellest ahelast välja u ja v vahele lisatud serva saame Euleri ahela esialgses graafis. □

Näide 2.64 Kuna Königsbergi sildade graafis on kõigi nelja tipu astmed paaritud, siis ei saa selles graafis Euleri ahelat leiduda.

Definitsioon 2.65 Tsüklit, mis läbib graafi kõiki tippe täpselt ühe korra, nimetatakse **Hamiltoni**[1] **tsükliks**. **Hamiltoni graaf** on graaf, milles leidub Hamiltoni tsükkel.

Näide 2.66 Graafis



leidub Hamiltoni tsükkel $vuxyv$. Seega on tegemist Hamiltoni graafiga.

Järgmine, Diraci[2] poolt tõestatud teoreem annab piisava tingimuse Hamiltoni tsükli leidumiseks graafis.

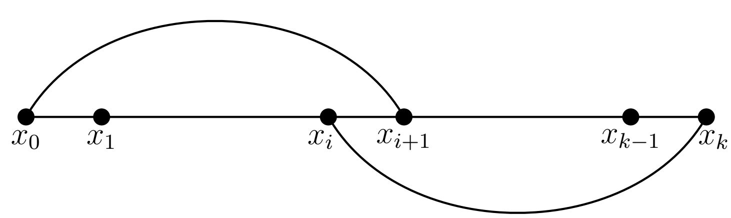
Teoreem 2.67 (Diraci teoreem) *Olgu G n-tipuline graaf, kus $n \geqslant 3$ ja iga tipu aste on vähemalt $\frac{n}{2}$. Siis G on Hamiltoni graaf.*

Tõestus. Rahuldagu graaf $G = (V, E)$ teoreemi eeldusi. Oletame, et G ei ole sidus. Siis on temas vähemalt kaks sidususkomponenti ja minimaalse tippude arvuga sidususkomponendis on tippude arv $\leqslant \frac{n}{2}$, mistõttu iga tipu aste on $< \frac{n}{2}$. See on vastuolus eeldusega. Järelikult G on sidus graaf.

Olgu $P = x_0x_1 \ldots x_k$ maksimaalse pikkusega lihtahel graafis G (s.t. pikemaid lihtahelaid ei leidu). Kui oletaksime, et $k = 0$, siis graafis G pole servi ja seega sidususe tõttu $n = 1$, vastuolu. Kui $k = 1$, siis G ühegi tipu aste ei saa olla 2. Sidususe tõttu $G = K_2$ ja $n = 2$, vastuolu. Seega peab kehtima võrratus $k \geq 2$.

Paneme tähele, et kõik x_0 naabertipud ja kõik x_k naabertipud asuvad ahelal P, sest muidu saaksime ahelat pikendada. Seega $x_0, \ldots, x_{k-1}$ hulgas on vähemalt $\frac{n}{2}$ tipu x_k naabertippu ja $x_1, \ldots, x_k$ hulgas on vähemalt $\frac{n}{2}$ tipu x_0 naabertippu. Näitame, et

$$(\exists i \in \{0, 1, \ldots, k-1\})(x_ix_k \in E \ \text{ ja } \ x_0x_{i+1} \in E).$$



Oletame vastuväiteliselt, et see tingimus ei kehti. Siis leidub ahelal P vähemalt $d(x_0)$ tippu, mis ei ole x_k naabrid (need on x_0 naabritele eelnevad tipud ja võib-olla veel mõned

[1]William Rowan Hamilton (1805–1865) — iiri matemaatik, astronoom ja füüsik
[2]Gabriel Andrew Dirac (1925–1984) — ungari-briti matemaatik

tipud). Lisaks sellele on ahelal P kõik $d(x_k)$ tipu x_k naabrit ja tipp x_k ise ka. Seega peaks ahelal olema vähemalt $d(x_0) + d(x_k) + 1$ tippu. Aga

$$d(x_0) + d(x_k) + 1 \geqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1 = n + 1,$$

mis ei ole võimalik, sest graafil on n tippu ja ahela P tipud on kõik erinevad.

Vaatleme nüüd kinnist ahelat

$$C = x_0 x_{i+1} x_{i+2} \dots x_{k-1} x_k x_i x_{i-1} \dots x_1 x_0.$$

Paneme tähele, et selles kinnises ahelas on $k+1$ tippu (tipud $x_0, x_1, \dots, x_k$), kusjuures iga tippu läbitakse üks kord. Järelikult on ahelas C ka $k + 1 \geq 3$ (sest $k \geq 2$) serva ning tegemist on tsükliga. Oletame vastuväiteliselt, et C ei ole Hamiltoni tsükkel. Siis hulk $V \setminus \{x_0, \dots, x_k\}$ on mittetühi. Kuna G on sidus, siis hulgas $V \setminus \{x_0, \dots, x_k\}$ peab leiduma mingi tipp v, mis on serva abil ühendatud mingi tipuga x_j, kus $j \in \{0, 1, \dots, k\}$. Siis aga läbides serva vx_j ning seejärel alustades tipust x_j kõik tsükli C servad peale viimase saaksime lihtahela pikkusega $k + 1$. See on vastuolus P maksimaalsusega. Järelikult C peab sisaldama kõiki G tippe ja olema Hamiltoni tsükkel. □

Hamiltoni tsüklid on seotud järgmise tuntud matemaatilise probleemiga.

Rändkaupmehe ülesanne. *On antud n linna koos nende vahel eksisteerivate teede ja nende pikkustega. Leida lühim marsruut, mis läbib kõiki linnu täpselt ühe korra ja jõuab alguspunkti tagasi.*

Sellise ülesande lahendamiseks vaadeldakse graafi, mille tippudeks on linnad, servadeks nendevahelised teed ja igale servale on omistatud kaal, mida väljendab vastava tee pikkus. Ülesande lahendamiseks tuleb leida selles graafis Hamiltoni tsükkel, mille puhul on servade kaalude summa vähim. Arvutuslikult loetakse selline ülesanne raskeks.

2.6 Puud

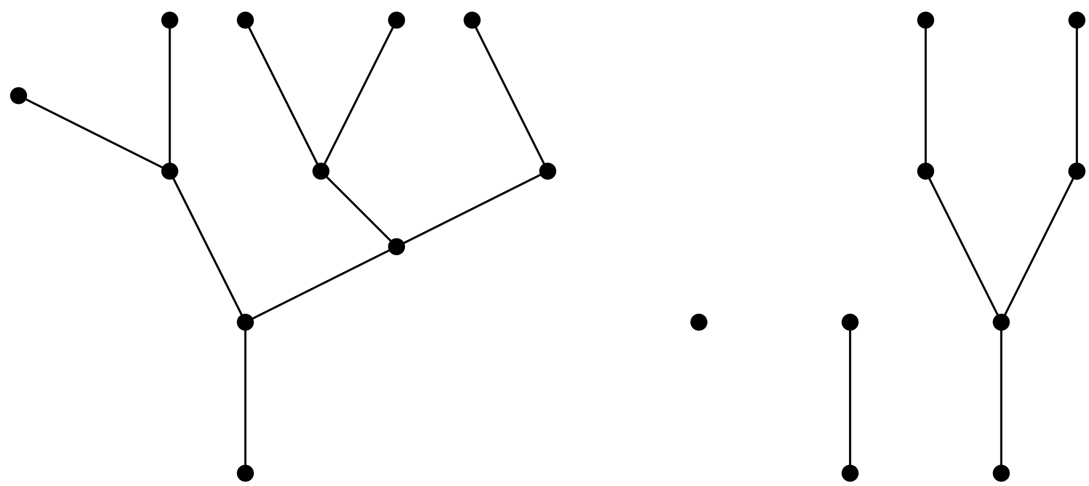
2.6.1 Puude põhiomadused

Puud moodustavad ühe olulise graafide klassi, millel on iseäranis palju rakendusi arvutiteaduses (näiteks andmestruktuuridena). Ka loogika osas vaadeldud tõesuspuud ja tuletuspuud on puud graafiteoreetilises mõttes.

Definitsioon 2.68 Graafi nimetatakse **puuks**, kui ta on sidus ja ei sisalda tsükleid.

Definitsioon 2.69 **Mets** on graaf, mille kõik sidususkomponendid on puud.

Näide 2.70 Järgneval joonisel on mets, mis koosneb neljast puust:



Meenutame, et rippuvad tipud on need, mille aste on 1.

Definitsioon 2.71 Puu rippuvaid tippe nimetatakse **lehtedeks** ja mitterippuvaid tippe nimetatakse **sisetippudeks**.

Teoreem 2.72 *Vähemalt kahetipulisel puul on vähemalt kaks lehte.*

TÕESTUS. Olgu meil antud n-tipuline puu, kus $n \geqslant 2$. Valime graafis välja suvalise tipu, olgu see v_1, ja hakkame sellest tipust servi mööda liikuma nii, et me ei läbiks ühtegi tippu kaks korda. Tekkiv lihtahel peab kindlasti lõppema tipus, mille aste on 1. Kui see nii ei oleks, siis jõuaksime mingil sammul tipuni v_k, millest ei leidu enam serva ühtegi läbimata tippu, aga mille aste on vähemalt 2. Järelikult peab tipust v_k leiduma serv juba mõnda läbitud tippu v_i, kus $i \neq k-1$. See aga tähendab, et graaf sisaldab tsüklit, mis on vastuolus eeldusega. Seega graafis leidub vähemalt üks tipp v, mille aste on üks.

Võtame nüüd selle tipu v ja korrates sama mõttekäiku konstrueerime lihtahela alates temast. Ka see peab lõppema mingis tipus u, mille aste on 1. Järelikult on vaadeldavas puus vähemalt kaks lehte. □

Leidub kuitahes suure tippude arvuga puid, millel ongi ainult kaks lehte, nendeks on n-tipulised ahelad.

Teoreem 2.73 *Igal n-tipulisel puul on $n-1$ serva.*

Seda teoreemi on võimalik tõestada vähemalt kahel viisil. Annamegi siin kaks erinevat tõestust.

TÕESTUS. Järelduse 2.48 põhjal ei saa puul olla vähem kui $n-1$ serva. Järelduse 2.37 tõttu ei saa puul olla rohkem kui $n-1$ serva. Seega peab puul olema $n-1$ serva. □

TÕESTUS. Tõestame väite induktsiooniga puu tippude arvu järgi.
Alus. Kui $n=1$, siis on tegemist puuga, mille servade arv on 0.
Samm. Olgu $n \geq 1$ naturaalarv ja eeldame, et väide kehtib kõigi puude korral, millel on n tippu. Olgu G puu, millel on $n+1$ tippu. Kuna graafil G on vähemalt kaks tippu, siis teoreemi 2.72 põhjal leidub tal leht. Kustutame selle ära koos intsidentse servaga. Järele jäävale n-tipulisele graafile saame rakendada induktsiooni eeldust, seega on temas $n-1$ serva. Järelikult graafis G on n serva. □

Teoreem 2.74 *Graafi G puhul on järgmised väited samaväärsed:*

1. *G on puu;*
2. *G on sidus, kuid ükskõik millise olemasoleva serva kustutamisel muutub mittesidusaks;*
3. *G ei sisalda tsükleid, kuid ükskõik millise serva lisamisel tekib tsükkel.*

TÕESTUS. $1 \Rightarrow 2$. Eeldame, et G on puu. Siis on ta definitsiooni tõttu sidus. Oletame vastuväiteliselt, et mingi serva e kustutamise järel jääb G sidusaks. Siis serv e ei ole sild. Teoreemi 2.45 põhjal kuulub e mingisse tsüklisse. See on aga vastuolus eeldusega. Järelikult pärast mistahes serva kustutamist muutub G mittesidusaks.

$2 \Rightarrow 3$. Eeldame, et G rahuldab tingimust 2. Oletame, et G sisaldab mingit tsüklit. Siis sellest tsüklist ühe serva kustutamisel sidusus ei kao, mis on vastuolus eeldusega. Järelikult G ei saa sisaldada tsükleid.

Olgu u ja v graafi G suvalised tipud, mille vahel pole serva (seega nende vahele on võimalik serva lisada). Sidususe tõttu peab leiduma lihtahel tippude u ja v vahel. Selle lihtahela pikkus on vähemalt 2. Nüüd serva uv lisamisel tekib tsükkel.

$3 \Rightarrow 1$. Eeldame, et G rahuldab tingimust 3. Siis ta ei sisalda tsükleid. Oletame vastuväiteliselt, et G ei ole sidus. Siis leiduvad tipud u ja v, mis asuvad erinevates sidususkomponentides. Serva uv lisamisel tsüklit tekkida ei saa, mis on vastuolus eeldusega. Järelikult G peab olema sidus. Sidusa tsükliteta graafina on ta puu. □

Järeldus 2.75 *Graafi G puhul, millel on n tippu ja m serva, on järgmised väited samaväärsed:*

1. *G on puu;*
2. *G on sidus ja $m = n-1$;*
3. *G ei sisalda tsükleid ja $m = n-1$.*

TÕESTUS. Kui G on puu, siis teoreemi 2.73 põhjal $m = n - 1$. Seega $1 \Rightarrow 2$ ja $1 \Rightarrow 3$.

$2 \Rightarrow 1$. Eeldame, et G on sidus ja $m = n-1$. Siis järelduse 2.48 põhjal saame mistahes serva kustutamisel mittesidusa graafi. Kuna G rahuldab teoreemi 2.74 tingimust 2, siis peab ta olema puu.

$3 \Rightarrow 1$. Eeldame, et G ei sisalda tsükleid ja $m = n - 1$. Siis mistahes serva lisamisel saame graafi, milles on servi vähemalt sama palju kui tippe. Vastavalt järeldusele 2.37 peab selline graaf sisaldama tsüklit. Kuna G rahuldab teoreemi 2.74 tingimust 3, siis peab ta olema puu. □

Teoreem 2.76 *Graaf G on puu parajasti siis, kui tema iga kahte erinevat tippu ühendab täpselt üks lihtahel.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu G puu ja u, v selle kaks erinevat tippu. Sidususe tõttu leidub u ja v vahel vähemalt üks lihtahel. Oletame vastuväiteliselt, et leidub kaks erinevat lihtahelat u ja v vahel:

$$u = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = v,$$
$$u = y_0, y_1, \ldots, y_{l-1}, y_l = v.$$

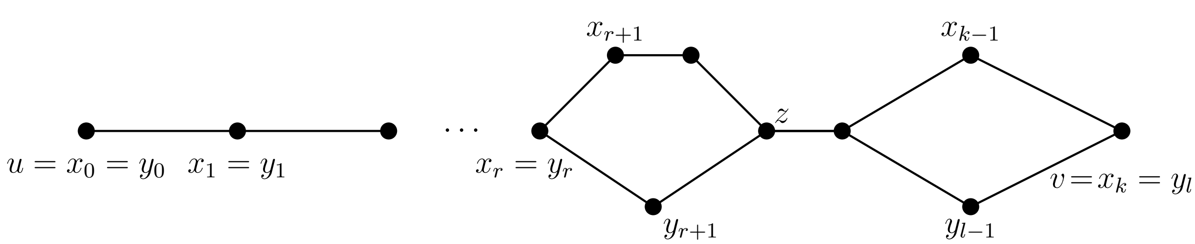
Üldisust kitsendamata eeldame, et $k \leqslant l$ (kui $k \geqslant l$, siis on tõestus analoogiline). Tõestuse lõpetamiseks näitame, et graafis G leidub sellisel juhul tsükkel, mis annab vastuolu eeldusega, et G on puu.

Mingi arv tippe nende kahe lihtahela alguses võib kokku langeda (me teame, et kindlasti vähemalt esimene tipp u on neil sama). Olgu r suurim indeks, mille korral

$$x_0 = y_0, \quad x_1 = y_1, \quad \ldots, \quad x_r = y_r.$$

Veendume, et $r < k$. Oletame vastuväiteliselt, et $r = k$. Siis $k < l$, sest kui kehtiks võrdus $k = l$, siis langeksid ahelad kokku, aga me eeldasime, et nad on erinevad. Järelikult teist ahelat läbides peame tipust $y_k = x_k = v$ edasi liikuma ja lõpuks jõudma uuesti tagasi tippu $y_l = v$. Seega tipp v esineb teises ahelas kaks korda, mis on vastuolus eeldusega, et tegemist on lihtahelaga.

Niisiis peab kehtima võrratus $r < k$. See tähendab, et ahelates leiduvad tipud x_{r+1} ja y_{r+1} ning nad on erinevad (vastavalt r valikule).



Liigume nüüd tipust x_r alustades mööda esimest ahelat, kuni jõuame esimese tipuni z, mis asub ka teisel ahelal (varem või hiljem peab see juhtuma, sest ahelad lõpevad samas tipus v). Tollest tipust liigume teist ahelat pidi tagasi tippu $x_r = y_r$. Nii oleme saanud graafis G tsükli, sest

a) meie kinnine ahel sisaldab vähemalt kolme erinevat tippu (x_r, x_{r+1} ja y_{r+1}) ning seega ka vähemalt kolme serva,

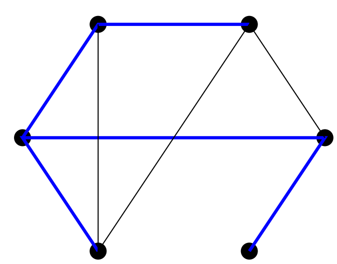
b) vastavalt konstruktsioonile me ei läbi ühtegi tippu kaks korda.

Piisavus. Eeldame, et graafi G iga kahte erinevat tippu ühendab täpselt üks lihtahel. Siis G on sidus. Oletame vastuväiteliselt, et graafis G leidub tsükkel ja valime selles tsüklis välja ühe serva uv. Siis tippe u ja v ühendab vähemalt kaks lihtahelat: servast uv koosnev lihtahel ja tsükli ülejäänud osast koosnev lihtahel. See on vastuolus eeldusega ning järelikult G ei saa sisaldada tsükleid. Seega on ta puu. □

2.6.2 Toespuud

Definitsioon 2.77 Sidusa graafi **toespuuks** ehk **aluspuuks** nimetatakse sellist alamgraafi, mis sisaldab kõiki tippe ja on puu.

Näide 2.78 Järgneval joonisel on üks graaf ja selle toespuu (toespuu servad on joonistatud paksema sinise joonega):



Lause 2.79 *Igal sidusal graafil leidub toespuu.*

Tõestus. Olgu G sidus graaf. Hakkame ühekaupa kustutama selle graafi servi nii, et graaf ei kaotaks sidusust. Selle protsessi lõpuks jääb meile alles alamgraaf T, mis

- sisaldab kõiki G tippe,
- on sidus,
- ükskõik millise serva kustutamisel muutub mittesidusaks.

Vastavalt teoreemile 2.74 on T puu ja vastavalt definitsioonile 2.77 on ta graafi G toespuu. □

Igal puul on ainult üks toespuu — see on ta ise. Kui sidus graaf ei ole puu, siis on tal mitu toespuud.

Toespuude leidmine on tihti kasulik sellises olukorras, kus graaf on kaalutud. Kaalutud graafi all peetakse silmas sellist graafi, mille igale servale on omistatud nn. kaal, mida väljendatakse harilikult positiivse reaalarvu abil. Formaalselt võib kaalutud graafi defineerida järgmiselt.

Definitsioon 2.80 **Kaalutud graafiks** nimetatakse kolmikut (V, E, ω), kus (V, E) on graaf ja $\omega : E \to \mathbb{R}^+$ on kujutus. Positiivset reaalarvu $\omega(e)$ nimetatakse serva e **kaaluks**.

Tüüpiline näide kaalutud graafist on maanteede kaart, kus tippudeks on linnad, servadeks linnade vahelised maanteed ja servade kaaludeks teede pikkused.

Kaalutud graafi esitamisel joonise abil märgitakse servade kaalud harilikult joonisele servade juurde.

Definitsioon 2.81 Kaalutud graafi G toespuu T **kaaluks** $\omega(T)$ loetakse tema servade kaalude summat. Öeldakse, et graafi G toespuu T on **minimaalse kaaluga**, kui G iga toespuu T' korral $\omega(T) \leqslant \omega(T')$.

Näide 2.82 Oletame, et riik tahab ehitada välja valguskaablivõrgu, mis jõuaks iga Eesti linna, alevi ja alevikuni. Võime vaadelda graafi, mille tippudeks on asulad, servaga on ühendatud need asulad, mille vahele on põhimõtteliselt võimalik mõistliku kuluga kaabel paigaldada, ja serva kaaluks on vastava kahe asula vahele kaabli paigaldamise maksumus eurodes. Minimaalse kaaluga toespuu annab kõige odavama ehituskuluga võrgu.

Analoogiline ülesande püstitus tekib siis, kui on vaja välja ehitada elektri kõrgepingeliinid, veevõrgud või kanalisatsioonitrassid.

Hulgaliselt näiteid toespuude rakenduste kohta võib leida ingliskeelse Vikipeedia artiklist *Minimum spanning tree*.

Igal sidusal kaalutud graafil leidub minimaalse kaaluga toespuu. Kuna vaadeldavad graafid on lõplikud, siis võime antud graafi puhul leida kõik tema toespuud, arvutada välja kõigi toespuude kaalud ja leida kaalude hulgast minimaalse. Selliseid minimaalse kaaluga toespuid võib graafil olla mitu.

Graafi kõigi toespuude leidmine on väga töömahukas ja arvutuslikult ebaefektiivne. Õnneks on olemas ka paremaid algoritme. Selles paragrahvis toome ära kaks algoritmi antud sidusa kaalutud graafi minimaalse kaaluga toespuu leidmiseks. Esimese neist pakkus välja Joseph Kruskal[3] 1956. aastal.

Kruskali algoritm.

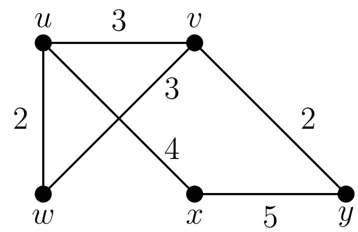
Antud: n-tipuline sidus kaalutud graaf $G = (V, E, \omega)$.
Leida: minimaalse kaaluga toespuu.
Idee: lisame minimaalse kaaluga servi nii, et ei tekiks tsükleid.

1. Vali servaks e_1 graafi G minimaalse kaaluga serv.
2. Iga $i = 2, 3, \ldots, n-1$ korral vali servaks e_i graafi G minimaalse kaaluga serv, mis erineb servadest $e_1, \ldots, e_{i-1}$ ja ei moodusta koos servadega $e_1, \ldots, e_{i-1}$ tsüklit.
3. Tagasta graaf $T = (V, \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\})$.

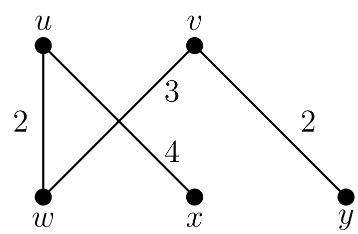
Märkus 2.83 Lause “Serv e_i koos servadega $e_1, \ldots, e_{i-1}$ ei moodusta tsüklit” all mõistame seda, et G alamgraaf, mis koosneb servadest $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i$ ja nende otstippudest, ei sisalda ühtegi tsüklit.

[3]Joseph Kruskal (1928–2010) — ameerika matemaatik

Näide 2.84 Leiame kaalutud graafi



minimaalse kaaluga toespuu Kruskali algoritmi abil. Selles graafis on kaks minimaalse kaaluga serva: uw ja vy. Esimesel sammul valime minimaalse kaaluga serva uw. Järgnevatel sammudel valime servad vy, vw, ux. Tulemuseks on toespuu



kaaluga $2 + 2 + 3 + 4 = 11$.

Tõestame, et Kruskali algoritm töötab korrektselt.

Teoreem 2.85 *Kui G on sidus kaalutud graaf, siis Kruskali algoritm leiab graafi G minimaalse kaaluga toespuu.*

TÕESTUS. Kõigepealt veendume, et sammul 2 on tõesti alati võimalik valida serv e_i, mis erineb varem valitud servadest $e_1, \ldots, e_{i-1}$ ja ei moodusta koos nendega tsüklit. Selleks vaatleme graafi G alamgraafi $G' = (V, \{e_1, \ldots, e_{i-1}\})$. Graafis G' on n tippu ja vähem kui $n - 1$ serva ($i - 1 < n - 1$). Vastavalt järeldusele 2.48 on graaf G' mittesidus. Järelikult peab tal leiduma vähemalt kaks sidususkomponenti. Võtame kaks tippu u ja v, mis asuvad G' erinevates sidususkomponentides. Kuna G on sidus, siis peab graafis G leiduma ahel u ja v vahel. See ahel peab sisaldama vähemalt ühte serva e_i, mille otstipud on erinevates komponentides. Selline serv e_i ei saa langeda kokku ühegagi servadest $e_1, \ldots, e_{i-1}$ ja samuti ei saa ta koos servadega $e_1, \ldots, e_{i-1}$ moodustada tsüklit.

Olgu graafi G alamgraaf $T = (V, \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\})$ leitud Kruskali algoritmi abil. Kuna T ei sisalda tsükleid ja tema servade arv on $n - 1$, siis järelduse 2.75 põhjal on T puu. Et ta sisaldab kõiki G tippe, siis on tegemist G toespuuga. Tuleb veel näidata, et T on minimaalse kaaluga toespuude hulgas.

Oletame vastuväiteliselt, et T ei ole minimaalse kaaluga toespuu. Siis leidub toespuid, mille kaal on väiksem kui puul T. Olgu T' graafi G toespuu, mis

- on minimaalse kaaluga ja
- omab minimaalse kaaluga toespuude hulgas puuga T maksimaalset arvu ühiseid servi.

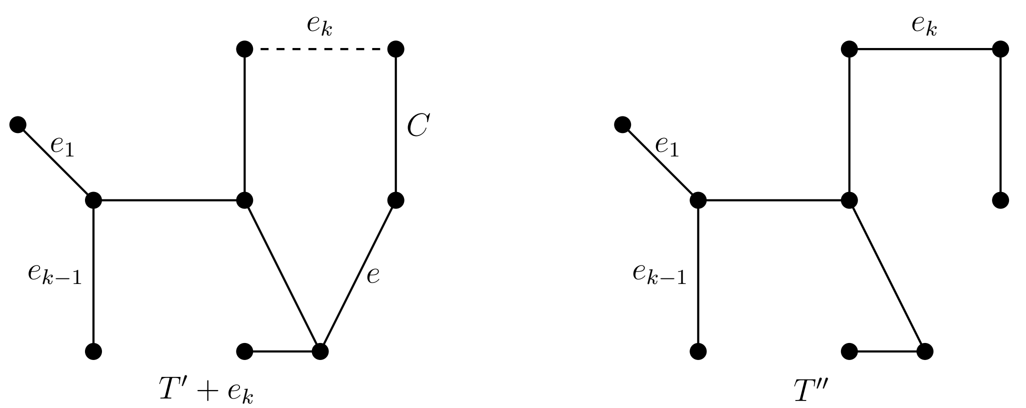
Siis $\omega(T') < \omega(T)$ ning järelikult ka $T' \neq T$. Olgu $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ vähim arv, mille korral serv e_k ei kuulu puusse T' (see leidub, sest $T' \neq T$). Niisiis

$$e_1, \ldots, e_{k-1}, e_k, \ldots, e_{n-1} \in E(T), \quad e_1, \ldots, e_{k-1} \in E(T') \text{ ja } e_k \notin E(T') \,.$$

Olgu S graafi G alamgraaf, mis saadakse serva e_k lisamisel puule T'. Siis vastavalt teoreemile 2.74 peab S sisaldama mingit tsüklit C. See tsükkel C peab sisaldama serva e_k, kuid ta peab sisaldama ka mingit serva e, mis ei kuulu puusse T (sest vastasel korral sisaldaks puu T tsüklit C). Kustutame graafist S serva e ja tähistame saadud graafi T''. Tinglikult võiks kirjutada

$$S = T' + e_k \quad \text{ja} \quad T'' = S - e = T' + e_k - e.$$

Konstruktsiooni illustreerib järgmine joonis.



Graaf T'' on ka G toespuu, sest ta on sidus ja temas on $n-1$ serva (vt. järeldust 2.75). Vastavalt k valikule kuuluvad servad $e_1, \ldots, e_{k-1}$ ka puusse T'. Serv e

- ei ole võrdne ühegagi servadest $e_1, \ldots, e_{k-1}$ (sest e ei kuulu puusse T) ja
- ei moodusta koos servadega $e_1, \ldots, e_{k-1}$ tsükleid (sest T' on puu ja $e_1, \ldots, e_{k-1}, e$ on tema servade hulgas).

Vastavalt serva e_k konstruktsioonile Kruskali algoritmi sammul 2 peab kehtima võrratus $\omega(e_k) \leqslant \omega(e)$. Kuna T'' on saadud puust T' serva e_k lisamisel ja serva e kustutamisel, siis

$$\omega(T'') = \omega(T') + \omega(e_k) - \omega(e) \leqslant \omega(T') \,.$$

Et T' oli minimaalse kaaluga toespuu, siis peab kehtima võrdus $\omega(T'') = \omega(T')$, mis tähendab, et ka T'' on minimaalse kaaluga toespuu. Samas puul T'' on puuga T rohkem ühiseid servi kui puul T' (lisaks servadele $e_1, \ldots, e_{k-1}$ ka serv e_k), mis on vastuolus T' valikuga. Saadud vastuolu näitab, et T peab olema minimaalse kaaluga toespuu. $\square$

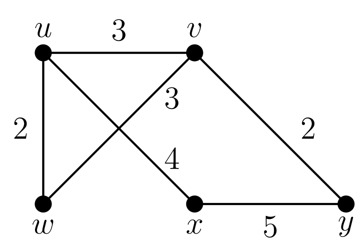
Tutvustame ka teist minimaalse toespuu leidmise algoritmi, mille töötas 1930. aastal välja tšehhi matemaatik Vojtěch Jarník. Hiljem taasavastasid selle algoritmi ameerika matemaatik ja arvutiteadlane Robert Prim (aastal 1957) ja hollandi arvutiteadlane Edsger Dijkstra (aastal 1959). Kuigi seda algoritmi oleks õigem kutsuda Jarníku algoritmiks, kasutame käesolevas kursuses rahvusvaheliselt enam levinud nimetust *Primi algoritm.*

Primi algoritm.

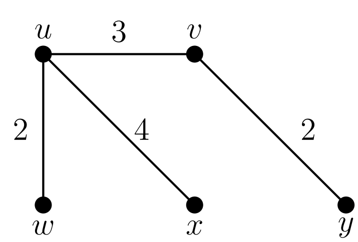
Antud: n-tipuline sidus kaalutud graaf $G = (V, E, \omega)$.
Leida: minimaalse kaaluga toespuu.
Idee: Konstrueerime alamgraafi T. Alustame suvalisest tipust ja ühendame puule järjest servi, mis viivad uude tippu (mis veel ei kuulu graafi T), valides igal sammul minimaalse kaaluga serva.

1. Vali graafist G välja suvaline tipp v. Olgu T_0 graaf ainsa tipuga v ja olgu $U := V \setminus \{v\}$.
2. Iga $i = 1, \ldots, n-1$ korral:
   (a) leia graafist G vähima kaaluga serv e_i, mis ühendab mingit graafi T_{i-1} tippu mingi U tipuga w_i;
   (b) lisa alamgraafile T_{i-1} serv e_i ja tema teine otstipp w_i, tähista saadud graafi T_i;
   (c) eemalda tipp w_i hulgast U.
3. Tagasta graaf T_{n-1}.

Näide 2.86 Vaatleme jälle kaalutud graafi



Leiame selle graafi minimaalse kaaluga toespuu Primi algoritmi abil. Esimesel sammul valime tipu v. Järgnevatel sammudel valime tipud y, u, w, x koos servadega vy, vu, uw, ux. Tulemuseks on toespuu



Paneme tähele, et selles näites ja näites 2.84 leitud minimaalse kaaluga toespuud on erinevad. Nende mõlema kaal on $2 + 2 + 3 + 4 = 11$.

Teoreem 2.87 *Kui G on sidus kaalutud graaf, siis Primi algoritm leiab graafi G minimaalse kaaluga toespuu.*

Tõestus. Kuna G on sidus, siis igal sammul leidub serv, mis ühendab alamgraafi T_{i-1} mõne hulka U kuuluva tipuga. Seega valikut sammul 2(a) on võimalik teha.

Olgu Primi algoritmi abil leitud servad $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Kuna ühelgi sammul ei saa serva e_i ja tipu w_i lisamisel tekkida tsükkel, siis kõik graafid T_i (servadega $e_1, \ldots, e_i$), kus $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on tsükliteta. Samas on nad konstruktsiooni tõttu sidusad. Järelikult T_i on puu iga $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ korral. Muuhulgas T_{n-1} on puu. Ta sisaldab ka kõiki G tippe ning seega on toespuu. Tõestame, et T_{n-1} on minimaalse kaaluga toespuude hulgas.

Kui T_{n-1} sisaldub alamgraafina mingis minimaalse kaaluga toespuus T', siis $T_{n-1} = T'$, sest nii toespuul T_{n-1} kui toespuul T' on $n-1$ serva. Seega T_{n-1} on ise minimaalse kaaluga toespuu, nii nagu vaja.

Oletame nüüd, et T_{n-1} ei sisaldu üheski minimaalse kaaluga toespuus. Olgu $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ maksimaalne arv, mille korral puu T_{k-1} sisaldub mingis minimaalse kaaluga toespuus T'. (Paneme tähele, et T_0 kindlasti sisaldub igas minimaalse kaaluga toespuus, seega on võimalik selline k leida.) Näitame, et sel juhul tekib vastuolu. Kuna T_{k-1} on T' alamgraaf, aga T_k enam ei ole, siis T' sisaldab servi $e_1, \ldots, e_{k-1}$, aga mitte serva e_k (vastavalt k maksimaalsusele). Lisame puule T' serva e_k. Saadud alamgraaf S sisaldab tänu teoreemile 2.74 mingit tsüklit C. See tsükkel peab aga sisaldama serva e_k. Tsükkel C peab sisaldama ka mingit serva, mis ei kuulu puusse T_k (sest T_k ei saa tsüklit C sisaldada). Olgu $e_k = u_k w_k$, siis vastavalt konstruktsioonile on tipp u_k alamgraafis T_{k-1} ja tipp w_k väljaspool seda.

Alustame tipust u_k liikumist mööda tsüklit C, aga mitte tipu w_k suunas, vaid vastupidises suunas. Kuna u_k on alamgraafis T_{k-1} aga w_k ei ole, siis varem või hiljem jõuame mingi servani e, mille üks otstipp on alamgraafis T_{k-1} ja teine väljaspool seda. Serv e ei saa kuuluda graafi T_k, sest

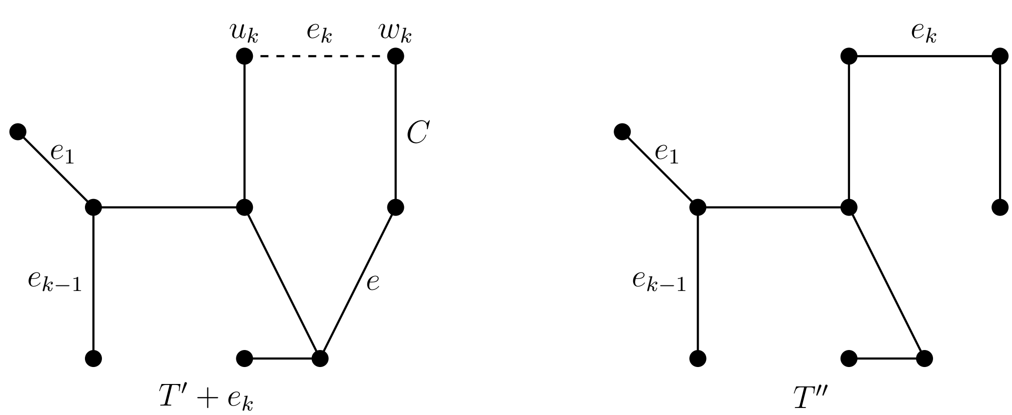
a) $e \notin \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ (kuna e ei kuulu graafi T_{k-1}),

b) $e \neq e_k$ (kuna me liigume tsüklil C serva e_k vältides).

Moodustame graafi T'' kustutades graafist S serva e. Tinglikult võime kirjutada

$$S = T' + e_k \quad \text{ja} \quad T'' = S - e = T' + e_k - e.$$

Konstruktsiooni illustreerib järgmine joonis.



Siis $\omega(e_k) \leqslant \omega(e)$, sest hetkel kui Primi algoritm valis serva e_k, oli valitavate servade hulgas ka e. Seega $\omega(T'') \leqslant \omega(T')$. Et T'' on sidus graaf $n-1$ servaga, siis järelduse 2.75 tõttu on ta puu. Samuti sisaldab ta kõiki G tippe ja on seega G toespuu. Kuna T' oli minimaalse kaaluga toespuu, siis $\omega(T'') = \omega(T')$ ja ka T'' on minimaalse kaaluga toespuu. Samas T'' sisaldab puud T_k, mis on vastuolus k valikuga. $\square$

2.7 Suunatud graafid

2.7.1 Suunatud graafide põhiomadused

Siiani oleme vaadelnud graafe, kus servade suund pole oluline, s.t. me ei ole teinud vahet, milline tipp on serva algtipp ja milline lõpptipp. Vaatleme nüüd graafe, mille servadel on suund.

Definitsioon 2.88 **Suunatud graaf** on järjestatud paar $G = (V, E)$, kus V on mittetühi hulk ja E on hulga $V \times V$ alamhulk.

Seega hulga E elementideks on järjestatud paarid (u, v), kus $u, v \in V$. Suunatud graafi puhul räägitakse servade asemel harilikult **kaartest** ning joonistel kujutatakse neid tavaliselt nooltena. Tippu u nimetatakse kaare (u, v) **algtipuks** ja tippu v selle kaare **lõpptipuks**. Öeldakse, et kaar (u, v) **väljub** tipust u ja **siseneb** tippu v.

Kui edaspidises tahame mingil hetkel rõhutada, et vaatleme graafi definitsiooni 2.1 mõttes, siis ütleme, et vaatleme suunamata graafi. Nii nagu suunamata juhulgi vaatleme selles kursuses ainult lõplikke suunatud graafe.

Märkus 2.89 Suunatud graafis võib definitsiooni järgi kahe tipu vahel olla kas 0, 1 või 2 kaart. Meie definitsiooni järgi on lubatud ka silmused, s.t. kaared kujul (v, v). (Mõnikord silmuseid suunatud graafi definitsioonis ei lubata.) Kui u ja v on erinevad tipud, siis kaared (u, v) ja (v, u) on erinevad. Mõnikord tähistatakse suunatud graafi kaarte hulka tähega A (sõnast *arc*, vt. näiteks monograafiat [1]).

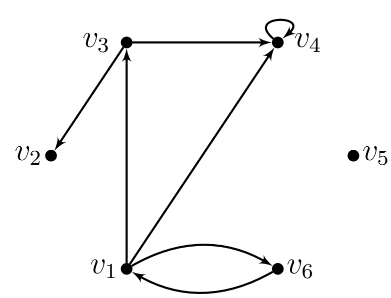
Märkus 2.90 Meenutame, et **binaarseteks seosteks** hulgal V nimetatakse hulga $V \times V$ alamhulki. Seega binaarne seos ja suunatud graaf on sisuliselt sama asi.

Näide 2.91 Olgu meil antud mingi linna tänavate kaart. Seda võib vaadelda suunatud graafina, mille tippudeks on ristmikud ja kahe ristmiku u ja v vahel on kaar (u, v), kui need on ühendatud tänavaga, millel on lubatud sõita ristmikult u ristmiku v suunas. Seega kahesuunalise liiklusega tänavad annavad graafi kaks kaart ja ühesuunalise liiklusega tänavad ühe.

Definitsioon 2.92 Olgu $G = (V, E)$ suunatud graaf tippude hulgaga $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Siis G **naabrusmaatriksiks** nimetatakse $n \times n$-maatriksit $A = (a_{ij})$, kus

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & \text{kui } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

Näide 2.93 Suunatud graafi



naabrusmaatriks on

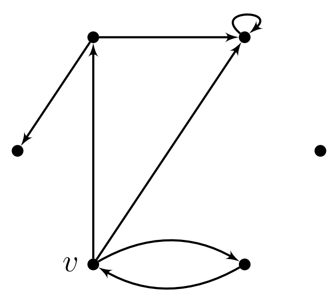
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nagu näha, suunatud graafi naabrusmaatriks ei pea olema sümmeetriline ning tema peadiagonaalil võib olla ühtesid.

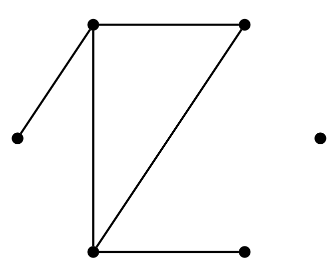
Kui asendame suunatud graafis kõik kaared suunamata servadega (nii-öelda unustame suuna ära), jätame välja kõik silmused ja kordsetest servadest jätame alles ühe, siis saame graafi, mida kutsutakse esialgse suunatud graafi **alusgraafiks**.

Definitsioon 2.94 Suunatud graafi tipu v **sisendastmeks** (tähistus $d_-(v)$) nimetatakse sellesse tippu sisenevate kaarte arvu ning **väljundastmeks** (tähistus $d_+(v)$) nimetatakse sellest tipust väljuvate kaarte arvu.

Näide 2.95 Suunatud graafis



on $d_-(v) = 1$ ja $d_+(v) = 3$. Selle graafi alusgraaf on



Teoreem 2.96 *Suunatud graafis on tippude sisendastmete summa võrdne tippude väljundastmete summaga:*

$$\sum_{v \in V} d_-(v) = \sum_{v \in V} d_+(v).$$

Tõestus. Tippude sisendastmete summa on võrdne graafi kaarte arvuga, sest selle summa leidmisel arvestame iga kaart ühe korra. Samamoodi on väljundastmete summa võrdne kaarte arvuga. Järelikult on need summad võrdsed. $\square$

Definitsioon 2.97 Suunatud graafi **sisend** on tipp, mis pole ühegi kaare lõpptipp.

Definitsioon 2.98 Suunatud graafi **väljund** on tipp, mis pole ühegi kaare algtipp.

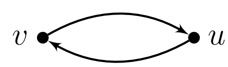
Näide 2.99 Näites 2.93 vaadeldud suunatud graafi sisendiks on tipp v_5 ning väljunditeks on tipud v_2 ja v_5.

Ülesanne 2.100 Kuidas saab naabrusmaatriksi abil kindlaks teha, kas suunatud graafi mingi tipp on sisend või väljund?

Definitsioon 2.101 Suunatud graafi tippude järjendit $v_0, v_1, \ldots, v_k$, kus iga kaks järjestikust tippu v_i ja v_{i+1} on ühendatud kaarega (v_i, v_{i+1}), nimetatakse **suunatud ahelaks**. Kui ükski tipp suunatud ahelas ei kordu, siis on tegemist **suunatud lihtahelaga**. **Kinnine suunatud ahel** on suunatud ahel, mille esimene ja viimane tipp langevad kokku.

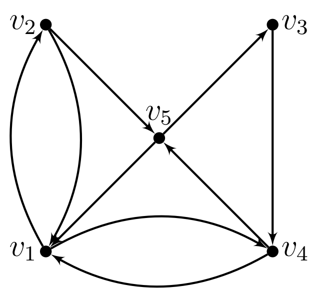
Definitsioon 2.102 **Suunatud tsükkel** on kinnine suunatud ahel, milles on vähemalt kaks kaart ja mis ei läbi ühtegi tippu kaks korda.

Märkus 2.103 Niisiis suunatud tsükkel on suunatud ahel $v_0, v_1, \ldots, v_k$, kus $k \geqslant 2$, $v_0 = v_k$ ja tipud $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ on erinevad. Definitsiooni järgi ei loe me silmuseid tsükliteks, kuid suunatud graafides võib olla kahest kaarest koosnevaid tsükleid kujul v, u, v:



Selline terminoloogia on kooskõlas raamatus [1] kasutatavaga (vt. lk. 11). Mõnes teises allikas võidakse lubada ka silmust suunatud tsüklina.

Näide 2.104 Vaatleme suunatud graafi



Selles graafis

- v_1, v_2, v_5, v_1, v_4 on suunatud ahel, mis ei ole suunatud lihtahel,
- $v_1, v_2, v_5, v_1, v_4, v_1$ on kinnine suunatud ahel,
- v_5, v_3, v_4, v_1, v_2 on suunatud lihtahel,
- v_5, v_3, v_4, v_5 on suunatud tsükkel.

Teoreem 2.105 *Kui suunatud graafis pole suunatud tsükleid ja silmuseid, siis leidub sellel graafil vähemalt üks sisend ja vähemalt üks väljund.*

TÕESTUS. Vaatleme suunatud graafi $G = (V, E)$, milles pole suunatud tsükleid ega silmuseid ja näitame, et selles graafis leidub väljund. Valime selles graafis välja ühe tipu v. Kui v on väljund, siis on vajalik tipp leitud. Vastasel korral leidub kaar, millele v on algtipuks. Kuna silmuseid ei ole, siis leidub tipp $v_1 \neq v$ nii, et $(v, v_1) \in E$. Kui v_1 on väljund, siis lõpetame. Vastasel korral peab leiduma mingi kaar (v_1, v_2), kus $v_2 \neq v_1$. Jätkame samamoodi. Paneme tähele, et ükski järgnev tipp v_i ei saa võrduda varem valitud tippudega $v, v_1, \ldots, v_{i-1}$, sest graaf ei sisalda suunatud tsükleid. Kuna graafis on lõplik arv tippe, siis pärast lõplikku arvu samme peame jõudma mingisse tippu u, kust ei välju ühtegi kaart. Seega u on väljund.

Sisendi leidmiseks saame kasutada analoogilist arutelu liikudes kaari pidi lõpptipu poolt algtipu poole. □

Definitsioon 2.106 Suunatud graafi nimetatakse **tugevalt sidusaks**, kui iga kahe tipu u ja v korral leidub suunatud ahel tipust u tippu v.

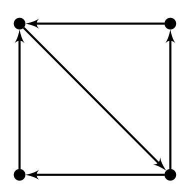
Ka ühetipuline suunatud graaf loetakse tugevalt sidusaks.

Definitsioon 2.107 Suunatud graafi nimetatakse **nõrgalt sidusaks**, kui tema alusgraaf on sidus.

Kui suunatud graaf G on tugevalt sidus, siis on ta ka nõrgalt sidus. Tõepoolest, kui mistahes tippude u ja v korral leidub suunatud ahel tipust u tippu v, siis ka G alusgraafis on u ja v ühendatud ahelaga.

Näide 2.108 Suunatud graaf

on nõrgalt sidus, kuid mitte tugevalt sidus. Suunatud graaf



on tugevalt sidus.

Näide 2.109 Vaatleme linnatänavate suunatud graafi näitest 2.91. Liikluse planeerimisel on loomulik nõuda, et see graaf oleks tugevalt sidus, sest liiklejad tahavad, et igalt ristmikult saaks liikluseeskirja rikkumata sõita igale teisele.

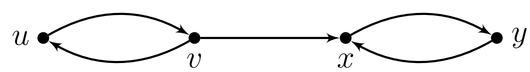
Lause 2.110 *Kui G on vähemalt kahetipuline tugevalt sidus graaf, siis tal ei ole sisendeid ega väljundeid.*

TÕESTUS. Olgu u graafi G mingi suvaline tipp. Valime veel ühe tipu v, mis erineb tipust u. Tugeva sidususe tõttu peavad leiduma suunatud ahelad tipust u tippu v ja tipust v tippu u. Järelikult peab leiduma nii tipust u väljuvaid kui ka tippu u sisenevaid kaari. See tähendab, et u ei saa olla ei sisend ega väljund. $\square$

Seega kui vähemalt kahetipulises suunatud graafis leidub sisend või väljund, siis see graaf ei saa olla tugevalt sidus.

Kui suunatud graafis puuduvad sisendid ja väljundid, siis sellest veel ei järeldu tugev sidusus.

Näide 2.111 Suunatud graafis



ei ole sisendeid ega väljundeid. See graaf ei ole tugevalt sidus, sest tipust x ei leidu suunatud ahelat tippu v.

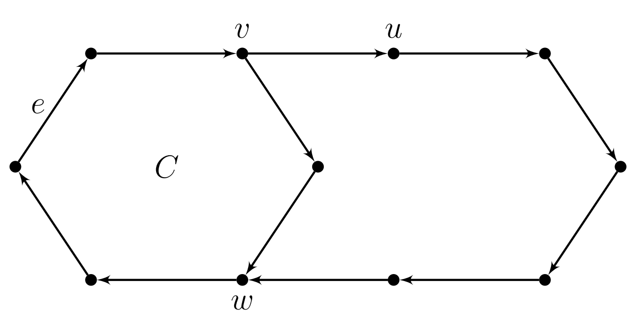
Teoreem 2.112 *Kui sidusas suunamata graafis ei leidu ühtegi silda, siis saab graafi servadele määrata suunad nii, et tekkinud suunatud graaf on tugevalt sidus.*

TÕESTUS. Ühetipulise graafi puhul on väide ilmne. Ainuke kahetipuline sidus suunamata graaf (isomorfismi täpsuseni) on

ja selle ainus serv on sild. Edasises vaatleme suvalist teoreemi eeldusi rahuldavat graafi G, milles on vähemalt kolm tippu. Kuna ükski serv pole sild, siis tänu teoreemile 2.45 peab iga serv sisalduma mingis tsüklis. Valime suvalise serva e (see leidub sidususe tõttu) ja vaatleme tsüklit C, mis seda serva sisaldab. Orienteerime selle tsükli kõik servad ühes suunas, siis saab igast tsükli tipust liikuda igasse teise. On kaks võimalust.

1) Kõik G tipud kuuluvad tsüklisse C. Võib juhtuda, et mõni G serv ei kuulu tsüklisse C. Siis võime talle määrata suvalise suuna. Saadud suunatud graaf on tugevalt sidus.

2) Mõni G tipp ei kuulu tsüklisse C. Siis leidub sidususe tõttu G serv, mis ühendab tsükli C mingit tippu v mingi tipuga u väljaspool tsüklit. Ka serv vu peab sisalduma mingis tsüklis ja seega peab lisaks ahelale v, u leiduma veel üks suunamata ahel tippude u ja v vahel.



Liigume seda pikemat ahelat pidi tipust u tippu v ja olgu w esimene ahela tipp, mis kuulub tsüklisse C (see peab leiduma, sest hiljemalt v kuulub tsüklisse C). Määrame ahela $v, u, \ldots, w$ servadele suuna tipu v poolt tipu w poole. Omavahel kaartega ühendatud tippude hulgas pääseb nüüd endiselt igast tipust igasse teise. Nii jätkame kuni kõik G tipud on ühendatud mingisse suunatud tsüklisse. Kui mõni G serv jääb protsessi käigus kasutamata, siis võime talle anda suvalise suuna, sest see tugevat sidusust ära ei kaota. □

Suunamata graafide korral saime rääkida sidususkomponentidest. Ka suunatud graafide korral on see võimalik, aga olukord on veidi keerulisem. Anname kõigepealt mõned definitsioonid.

Definitsioon 2.113 Suunatud graafi $G' = (V', E')$ nimetatakse suunatud graafi $G = (V, E)$ **alamgraafiks**, kui $V' \subseteq V$ ja $E' \subseteq E$.

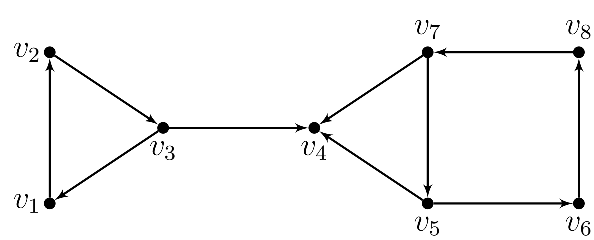
Definitsioon 2.114 Suunatud graafi **tugevalt sidus komponent** on maksimaalne tugevalt sidus alamgraaf.

Seega suunatud graafi $G = (V, E)$ tugevalt sidus alamgraaf $G' = (V', E')$ on selle graafi tugevalt sidus komponent, kui mistahes tugevalt sidusa alamgraafi $G'' = (V'', E'')$ korral

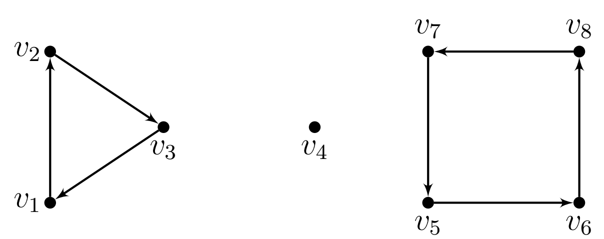
$$V' \subseteq V'' \ \& \ E' \subseteq E'' \Longrightarrow V' = V'' \ \& \ E' = E''.$$

Muuhulgas alamgraafile $G' = (V', E')$ mistahes tipu $v \in V \setminus V'$ ja seda tippu G' tippudega ühendavate G kaarte lisamisel saame alamgraafi, mis ei ole enam tugevalt sidus.

Näide 2.115 Suunatud graafi



tugevalt sidusad komponendid on



Olgu $G = (V, E)$ suunatud graaf. Kui tipust u leidub suunatud ahel tippu v, siis kirjutame $u \rightsquigarrow v$. Defineerime hulgal V binaarse seose $\equiv$ järgmiselt:

$$u \equiv v \Longleftrightarrow \quad u \rightsquigarrow v \text{ ja } v \rightsquigarrow u.$$

Lihtne on veenduda, et seos $\equiv$ on ekvivalentsiseos. Ekvivalentsiklassid selle seose järgi on tipuhulga V alamhulgad.

Definitsioon 2.116 Olgu $G = (V, E)$ suunatud graaf ja $U \subseteq V$. **Tippude hulga** U **poolt tekitatud** G **alamgraafiks** nimetatakse suunatud graafi $G_U = (U, E_U)$, kus

$$E_U = \{(x, y) \mid x, y \in U, (x, y) \in E\}.$$

Seega hulga U poolt tekitatud alamgraaf saadakse, kui kaarteks võetakse kõik kaared, mis hulka U kuuluvate tippude vahel graafis G olemas on.

Lause 2.117 *Ekvivalentsiklassid seose $\equiv$ järgi tekitavad suunatud graafi alamgraafid, mis on selle suunatud graafi tugevalt sidusateks komponentideks.*

TÕESTUS. Olgu $G = (V, E)$ suunatud graaf ja vaatleme suvalise tipu $u \in V$ ekvivalentsiklassi

$$K = \{v \in V \mid u \equiv v\}$$

poolt tekitatud alamgraafi $G_K = (K, E_K)$. See alamgraaf on tugevalt sidus, sest kui $v, v' \in K$, siis $u \equiv v$ ja $u \equiv v'$, kust seose $\equiv$ sümmeetria ja transitiivsuse tõttu $v \equiv v'$ ning järelikult tipust v leidub suunatud ahel tippu v' (ja vastupidi).

Näitame, et G_K on maksimaalne tugevalt sidus alamgraaf. Oletame vastuväiteliselt, et G_K ei ole seda. Siis G_K sisaldub mingis tugevalt sidusas alamgraafis $G' = (V', E')$, kusjuures $K \subset V'$ või $E_K \subset E'$. Kuna juhtum $K = V'$ ja $E_K \subset E'$ ei ole võimalik, siis $K \subset V'$ ja leidub tipp $v_0 \in V' \setminus K$. Et alamgraaf G' on tugevalt sidus ja $u \in K \subset V'$, siis $u \rightsquigarrow v_0$ ja $v_0 \rightsquigarrow u$. Järelikult $u \equiv v_0$, mis tähendab, et $v_0 \in K$, vastuolu.

Sellega oleme näidanud, et G_K on graafi G tugevalt sidus komponent. □

Kuna ekvivalentsiseos $\equiv$ tekitab tipuhulga V tükelduse, siis G tugevalt sidusad komponendid on lõikumatud ja G iga tipp peab kuuluma mingisse tugevalt sidusasse komponenti. Lisaks sellele võime öelda, et tugevalt sidusate komponentide arv on võrdne ekvivalentsiklasside arvuga seose $\equiv$ järgi.

Järeldus 2.118 *Suunatud graaf on tugevalt sidus parajasti siis, kui tal on üks tugevalt sidus komponent.*

TÕESTUS. Suunatud graaf on tugevalt sidus parajasti siis, kui seose $\equiv$ järgi on ainult üks ekvivalentsiklass, milleks on hulk V. Viimane on samaväärne sellega, et tugevalt sidusaid komponente on üksainus. □

Lause 2.117 tõestuse põhjal saab anda algoritmi tugevalt sidusate komponentide leidmiseks. Valime suunatud graafis G välja suvalise tipu u. Otsime üles kõik tipud v, mille korral $u \rightsquigarrow v$ ja $v \rightsquigarrow u$. Need tipud tekitavad G esimese tugevalt sidusa komponendi. Siis valime ülejäänud tippude hulgast suvalise ja kordame protsessi kuni see on võimalik.

Märkus 2.119 Suunatud graafi nimetatakse **Euleri graafiks**, kui leidub kinnine suunatud ahel, mis läbib kõiki selle graafi kaari täpselt ühe korra. Saab tõestada järgmise tulemuse:

Suunatud graaf on Euleri graaf parajasti siis, kui ta on tugevalt sidus ja iga tipu korral tema sisendaste võrdub väljundastmega.

2.7.2 Lühima tee leidmise ülesanne

Praktilistest ülesannetest tekkivates suunatud graafides on tihti kaartele omistatud mingid positiivse reaalarvuna väljendatavad kaalud.

Definitsioon 2.120 Kaalutud suunatud graafiks nimetatakse kolmikut (V, E, ω), kus (V, E) on suunatud graaf ja $\omega : E \to \mathbb{R}^+$ on kujutus. Positiivset reaalarvu $\omega(e)$ nimetatakse kaare e **kaaluks** ehk **pikkuseks**.

Definitsioon 2.121 Kaalutud suunatud graafi suunatud ahela **kaaluks** ehk **pikkuseks** nimetatakse selle ahela kaarte kaalude summat[4].

Kui $T = v_0, v_1, \ldots, v_k$ on mingi suunatud ahel, siis tema kaalu tähistame $\omega(T)$ või $\omega(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. Niisiis

$$\omega(T) = \sum_{i=1}^{k} \omega(v_{i-1}, v_i).$$

Lühima tee leidmise ülesanne seisneb selles, et antud kaalutud suunatud graafi G kahe tipu puhul leida minimaalse kaaluga suunatud ahel ühest tipust teise (juhul kui see olemas on).

Edasises ütleme "minimaalse kaaluga suunatud ahela" asemel lühidalt ka "lühim tee".

Niisiis tee T tipust u tippu v on lühim, kui iga tee T' korral tipust u tippu v kehtib võrratus $\omega(T) \leqslant \omega(T')$.

Definitsioon 2.122 Kaalutud suunatud graafi tippude u ja v vaheliseks **kauguseks** (tähistus $d(u, v)$) nimetatakse minimaalse kaaluga suunatud ahela pikkust tipust u tippu v, kui tipust u leidub suunatud ahelaid tippu v. Kui selliseid ahelaid ei leidu, siis loetakse, et $d(u, v) = \infty$.

Seega lühima tee leidmise ülesande lahendamise käigus leitakse graafi tippude vahelisi kaugusi.

Näide 2.123 1. Vaatleme jälle linnatänavate suunatud graafi näitest 2.91. Omistame selle graafi kaartele kaalud, mis näitavad, kui palju aega kulub keskmiselt ühelt ristmikult naaberristmikule jõudmiseks. Lühima tee leidmine tähendab sellisel juhul minimaalse ajakuluga marsruudi leidmist.

2. Olgu meil graafi tippudeks linnad, servadeks nendevahelised maanteed ja kaaludeks maanteede pikkused. Lühima tee leidmine tähendab sellisel juhul sõna otseses mõttes lühima tee leidmist linnast A linna B.

3. Olgu graafi tippudeks linnad ja servadeks ühistranspordiliinid. Kui servade kaaludeks on ajakulu, siis lühima tee leidmine tähendab minimaalse ajakuluga marsruudi leidmist. Kui aga servade kaaludeks on piletihinnad, siis lühima tee leidmine tähendab võimalikult odava marsruudi leidmist.

[4] Erinevalt suunamata graafide juhust ei tähenda suunatud ahela pikkus selle kaarte arvu. Loodetavasti siin segadust ei teki.

Lühima tee leidmise ülesannet võib sõltuvalt silmas peetavast rakendusest püstitada väga erinevatel viisidel. Konkreetsest püstitusest sõltub ka see, milline peaks olema ülesande lahendamiseks kasutatav algoritm. Ülesande püstitus võib sõltuda näiteks järgmistest asjaoludest.

- Kas graaf on suunatud või suunamata?
- Kas servade kaalud peavad olema positiivsed arvud või on lubatud ka negatiivsed kaalud?
- Kas tahame leida lühimat teed tipust a tippu z, tipust a kõigisse teistesse tippudesse, või hoopis kõigi tipupaaride vahel?
- Kas meid huvitab ainult lühima tee pikkus või ka sinna teesse kuuluvad tipud?
- Kas tahame leida ühe lühima tee või kõikvõimalikud lühimad teed kahe tipu vahel?

Enne algoritmide juurde minekut teeme mõned lihtsad tähelepanekud lühimate teede kohta.

Lemma 2.124 *n-tipulises kaalutud suunatud graafis kehtivad järgmised väited.*

1. *Lühim tee ei tohi sisaldada silmuseid ja peab olema suunatud lihtahel.*
2. *Lühim tee sisaldab ülimalt $n-1$ kaart.*
3. *Lühima tee iga osatee on ka lühim oma otspunktide vahel.*

Tõestus. 1. Ahelast silmuse välja jätmisel saame samuti ahela, mis ei ole pikem kui esialgne. Kui ahelas on korduvaid tippe, siis saame korduvate tippude vahele jääva osa välja jätta ning pikkus kahaneb.

2. Kuna lühim tee peab olema lihtahel, siis on temas ülimalt n tippu ning järelikult ülimalt $n-1$ kaart.

3. Vaatleme lühimat teed

$$T = u, \dots, x, \dots, y, \dots, v$$

tippude u ja v vahel. Kui osatee $x, \dots, y$ ei oleks minimaalse pikkusega tippude x ja y vahel, siis saaksime ta asendada lühema teega ning tulemuseks oleks ka u ja v vahel lühem tee kui T. □

Järgnevalt vaatleme kahte lühima tee leidmise algoritmi. Nendes algoritmides kasutame järgmisi kokkuleppeid.

- Eeldame, et kaalutud suunatud graafi G tippude hulgaks on

$$V = \{1, 2, \dots, n\}.$$

- Meil on olemas kujutus $\omega : E \to \mathbb{R}^+$ ja me tähistame kaare (i,j) kaalu $\omega(i,j)$ asemel sümboliga ω_{ij}.

- Kui tipust i ei ole kaart tippu j (s.t. $(i,j) \notin E$), siis algoritmides me loeme, et $\omega_{ij} = \infty$. Praktikas on mõistlik ∞ ossa võtta mingi hästi suur arv, näiteks $n \cdot r$, kus n on tippude arv ja r on G servade kaaludest maksimaalne. Kuna lühimas tees on ülimalt $n-1$ kaart, siis ükski lühim tee ei saa olla pikkusega $n \cdot r$.

- Sõltumata sellest, kas graafis G on silmuseid või mitte, me loeme, et iga tipu i korral $\omega_{ii} = 0$ (s.t. lühim tee tipust i tippu i on pikkusega 0).

Laias laastus on nende algoritmide idee selline, et leiame mingid esialgsed hinnangud võimalikele lühimate teede pikkustele ja hakkame siis neid samm-sammult parandama.

Märgime veel, et kuigi algoritmid on sõnastatud suunatud graafide jaoks, saab neid kasutada ka suunamata juhul. Nimelt suunamata graafi võib muuta suunatuks asendades iga serva kahe kaarega (mõlemas suunas).

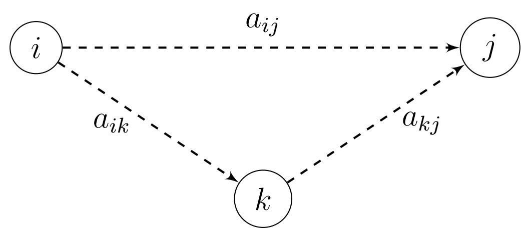
Esimese algoritmi töötasid üksteisest sõltumatult välja prantsuse matemaatik Bernard Roy ning ameerika arvutiteadlased Robert Floyd ja Stephen Warshall. Teise algoritmi autor on hollandi arvutiteadlane Edsger Wybe Dijkstra.

Floydi–Warshalli algoritm

Antud: kaalutud suunatud graaf $G = (V, E, \omega)$.
Leida: lühimad teed kõigi tipupaaride vahel.
Idee: Moodustame kaks $n \times n$-maatriksit A ja B. Otsime lühimaid teid tipust i tippu j. Maatriksi A element a_{ij} näitab seni leitud lühima tee kaalu tipust i tippu j. Maatriksi B element b_{ij} näitab lühima tee teist tippu (s.t. tippu, kuhu peaksime tipust i suunduma). Vaadatakse läbi kõik tipud k ja uuritakse, milliste tipupaaride (i,j) korral saab k kaudu tipust i liikuda tippu j lühemini kui varem leitud lühimat teed pidi i ja j vahel.

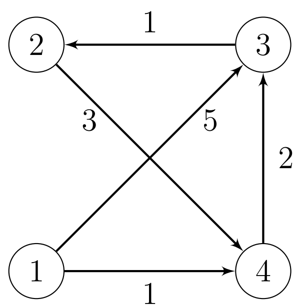
comment: Algväärtused
$a_{ij} := \omega_{ij}$
$b_{ij} := j$
comment: Täidetakse 3-kordne tsükkel
for $k = 1, \ldots, n$ do
    for $i = 1, \ldots, n$ do
        for $j = 1, \ldots, n$ do
            if $a_{ik} + a_{kj} < a_{ij}$ then
$$a_{ij} := a_{ik} + a_{kj}$$
$$b_{ij} := b_{ik}$$

Asenduse idee on järgmine: kui tipust i tippu k ja sealt tippu j liikudes on lühem tee kui seni leitud lühim tee tipust i tippu j, siis liigume tipust i tippu k ja sealt tippu j.



Paneme veel tähele, et kui $i = k$, siis võrratus $a_{kk} + a_{kj} < a_{kj}$ ei kehti (sest $a_{kk} = 0$) ja seega omistamist ei toimu. Sama kehtib $j = k$ korral. See tähendab, et etapil k maatriksite A ja B k-s rida ja k-s veerg ei muutu.

Näide 2.125 Rakendame Floydi–Warshalli algoritmi suunatud kaalutud graafile



Siis maatriksi A elemendid muutuvad k väärtuste 1, 2, 3 ja 4 korral järgmiselt:

$$A: \begin{pmatrix} 0 & \infty & 5 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \infty & 5 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \infty & 5 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 1 & 0 & 4 \\ \infty & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ \infty & 0 & 5 & 3 \\ \infty & 1 & 0 & 4 \\ \infty & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sinisega on ära märgitud k-s rida ja k-s veerg enne k-ndat etappi. Nagu eespool öeldud k-nda etapi käigus need kindlasti ei muutu. Tingimuse $a_{ik} + a_{kj} < a_{ij}$ kontrollimisel liidetakse element maatriksi A k-ndast veerust (a_{ik}) elemendiga k-ndast reast (a_{kj}). Elemendid $a_{kk} = 0, a_{kj}, a_{ij}, a_{ik}$ asuvad maatriksis n.ö. ristküliku tippudes, kusjuures a_{ik} ja a_{kj} on teineteise vastandtipud ning a_{kk} ja a_{ij} on teineteise vastandtipud.

Paneme tähele, et teine maatriks (see, mis vastab väärtusele $k = 1$) on sama, mis esimene. Põhjuseks on see, et ei leidu tipupaare (i, j), mille vahel saaks tipu 1 kaudu liikuda.

Maatriksi B elemendid muutuvad järgmiselt:

$$B: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Viimasest maatriksist saab välja lugeda lühimad teed kõigi tipupaaride vahel. Näiteks lühim tee tipust 1 tippu 2 koosneb tippudest

$$1,\ 4(=b_{12}),\ 3=(b_{42})\ \text{ ja }\ 2(=b_{32}).$$

Tõestame, et Floydi-Warshalli algoritm töötab korrektselt.

Teoreem 2.126 *Pärast Floydi-Warshalli algoritmi täitmist kehtivad iga $i,j \in \{1,\dots,n\}$ korral järgmised väited.*

1. *Kui leidub suunatud ahel tipust i tippu j, siis a_{ij} väärtuseks on lühima tee pikkus tipust i tippu j ja b_{ij} väärtuseks sellise tee teise tipu number.*

2. *Kui ei leidu suunatud ahelaid tipust i tippu j, siis $a_{ij} = \infty$.*

TÕESTUS. Selles tõestuses nimetame *k-ahelateks tipust i tippu j* kõiki suunatud ahelaid tipust i tippu j, mille vahetipud kuuluvad hulka $\{1,\dots,k\}$ ($k \geq 1$ on naturaalarv). 0-*ahelateks* tipust i tippu j nimetame suunatud ahelaid, millel sisetipud puuduvad. Seega 0-ahel on lihtsalt kaar (i,j). Paneme tähele, et iga $(k-1)$-ahel tipust i tippu j on ka k-ahel tipust i tippu j. Teoreemi tõestamiseks näitame, et kehtib järgmine väide:

(*) *iga $k \in \{0,1,\dots,n\}$ ja $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ korral pärast etapi k läbimist*

(1) kui leidub k-ahelaid tipust i tippu j, siis a_{ij} väärtuseks on minimaalse k-ahela pikkus tipust i tippu j ning b_{ij} väärtuseks on mingi sellise minimaalse k-ahela teise tipu number,

(2) kui ei leidu k-ahelaid tipust i tippu j, siis $a_{ij} = \infty$.

Kui oleme väite (*) ära tõestanud, siis teame, et pärast etappi n annab maatriks A meile minimaalsete n-ahelate pikkused kõigi tipupaaride vahel ning maatriks B annab minimaalsetes n-ahelates teised tipud, s.t. oleme näidanud, et teoreem kehtib.

Väite (*) tõestamiseks kasutame matemaatilist induktsiooni k järgi, kusjuures etapi $k = 0$ all peame silmas algväärtustamist.

Alus. Olgu $k = 0$. Siis k-ahel on lihtsalt kaar tipust i tippu j ja selle ahela pikkus on ω_{ij}, mis omistatakse a_{ij}-le. Kui leidub kaar $(i,j) \in E$, siis ahela i,j teine tipp on j ning see omistatakse b_{ij}-le. Kui $(i,j) \notin E$, siis omistatakse $a_{ij} := \infty$. Seega (*) kehtib $k = 0$ korral.

Samm. Olgu $k > 0$. Eeldame, et (*) kehtib pärast etapi $k-1$ läbimist ja olgu maatriksite A ja B elemendid sellised, nagu nad on pärast etapi $k-1$ läbimist. Näitame, et (*) kehtib ka pärast etapi k läbimist.

(1) Oletame, et leidub k-ahelaid tipust i tippu j. Olgu T üks minimaalse pikkusega k-ahel tipust i tippu j. Siis

$$\omega(T) \leqslant a_{ik} + a_{kj}. \tag{2.3}$$

Kuna induktsiooni eelduse põhjal on a_{ij} mingi minimaalse $(k-1)$-ahela pikkus või ∞ ning iga $(k-1)$-ahel on ka k-ahel, siis kehtib võrratus

$$\omega(T) \leqslant a_{ij}. \tag{2.4}$$

On kaks võimalust.

a) T ei sisalda tippu k. Siis T on $(k-1)$-ahel. Kuna ta on minimaalne k-ahel, siis on ta ka minimaalne $(k-1)$-ahel. Induktsiooni eelduse põhjal on a_{ij} minimaalse $(k-1)$-ahela pikkus tipust i tippu j. Seega $a_{ij} = \omega(T)$. Võrratusest (2.3) saame võrratuse

$$a_{ij} \leqslant a_{ik} + a_{kj},$$

mistõttu etapil k a_{ij}-le ja b_{ij}-le uut väärtust ei omistata. Minimaalsed k-ahelad ja minimaalsed $(k-1)$-ahelad tipust i tippu j on sama pikkusega (see pikkus on a_{ij}). Pärast etappi k on b_{ij} väärtuseks mingi sellise $(k-1)$-ahela T' teise tipu number. See ahel T' on ka minimaalne k-ahel ja seega a_{ij} ja b_{ij} väärtused on sellised nagu vaja.

b) T sisaldab tippu k. Siis ta sisaldab tippu k täpselt ühe korra, sest minimaalne ahel peab olema lihtahel. Olgu

$$T = i, u, \ldots, v, k, x, \ldots, y, j.$$

Siis

$$T_1 = i, u, \ldots, v, k \;\text{ ja }\; T_2 = k, x, \ldots, y, j$$

on $(k-1)$-ahelad, kusjuures nende pikkused peavad olema minimaalsed, sest muidu ei oleks T minimaalne k-ahel. Induktsiooni eelduse ja võrratuse (2.4) tõttu peab

$$a_{ik} + a_{kj} = \omega(T_1) + \omega(T_2) = \omega(T) \leq a_{ij}.$$

Kui $\omega(T) = a_{ij}$, siis a_{ij}-le ja b_{ij}-le uut väärtust ei omistata. Kui aga $\omega(T) < a_{ij}$, siis omistatakse a_{ij}-le väärtus $\omega(T)$ ehk minimaalse k-ahela pikkus. Samuti omistatakse b_{ij}-le mingi sellise k-ahela teise tipu number.

Järelikult pärast k-ga seotud tsükli läbimist on nii juhul a) kui ka juhul b) elemendi a_{ij} väärtuseks ahela T pikkus ning b_{ij} väärtuseks on tipust i tippu j viiva minimaalse pikkusega k-ahela teise tipu number. See tähendab, et (1) kehtib pärast etappi k.

(2) Oletame nüüd, et k-ahelaid tipust i tippu j ei leidu. Siis ei leidu ka $(k-1)$-ahelaid ja seega induktsiooni eelduse põhjal pärast etappi $k-1$ kehtib võrdus $a_{ij} = \infty$. Lisaks sellele kas $a_{ik} = \infty$ või $a_{kj} = \infty$ (kui mõlemad arvud oleksid lõplikud, siis peaks leiduma k-ahel tipust i tippu j). Järelikult võrratus

$$a_{ik} + a_{kj} < a_{ij}$$

ei saa kehtida ning a_{ij}-le ja b_{ij}-le uut väärtust ei omistata. Niisiis ka (2) kehtib pärast etappi k. $\square$

Dijkstra algoritm

Antud: kaalutud suunatud graaf $G = (V, E, \omega)$, algtipp a ja lõpptipp z.
Leida: lühim tee tipust a tippu z.
Andmed: S — selliste tippude hulk, kuhu on juba leitud lühim tee tipust a,
$L[i]$ — seni leitud vähim tee pikkus tipust a tippu i.

Idee on järgmine.

1. Võtame kasutusele hulga S, kuhu hakkame lisama tippe, millesse on juba leitud lühim tee tipust a. Töö alguses loeme, et S on tühi hulk.

2. Igale tipule omistame esialgse kauguse algtipust: algtipu a korral loeme, et see kaugus on 0, ülejäänud tippude korral loeme, et see on lõpmatus.

3. Igal sammul valime välja ühe seni vaatlemata tipu ja lisame hulka S. Esimesel sammul võtame selleks algtipu a.

4. Iga väljavalitud tipu u korral vaatleme tema naabreid v, kuhu saab kaart mööda liikuda ja mis ei ole veel vaadeldud tippude hulka S lisatud. Iga sellise v korral uurime, kas teekond a-st u kaudu v-sse on lühem, kui varem teada olnud lühim tee pikkusega $L[v]$. Kui on, siis omistame $L[v]$-le uue väärtuse. Vastasel korral jääb $L[v]$ muutmata.

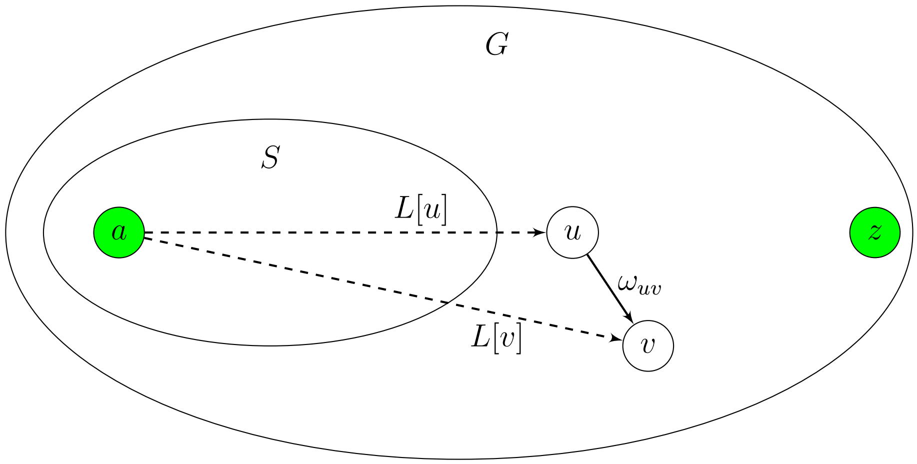
5. Kui kõik u naabrid on läbi vaadatud, siis valime uue tipu u nende hulgast, mida me ei ole veel hulka S lisanud. Valimisel vaatame, millise tipu korral on seni leitud kaugus algtipust kõige väiksem. Uue tipu u jaoks kordame eelmises punktis mainitud samme.

6. Lõpetame siis, kui lõpptipp z saab hulka S lisatud.

7. Algoritmi töö lõpus annab $L[z]$ meile lühima tee pikkuse tipust a tippu z. Kui $L[z] = \infty$, siis see tähendab, et tipust a ei leidu suunatud ahelaid tippu z.

Algoritm ise näeb välja nii:

comment: Algväärtused
$L[a] := 0$
iga $i \in V \setminus \{a\}$ korral $L[i] := \infty$
$S := \emptyset$
comment: Täidetakse tsükkel
while $z \notin S$ do
    $u :=$ selline $i \notin S$, et $L[i]$ on minimaalne
    $S := S \cup \{u\}$
    for $v \notin S$ do
        if $L[u] + \omega_{uv} < L[v]$ then $L[v] := L[u] + \omega_{uv}$



Märkus 2.127 1. Algoritm lõpetab töö, sest while-tsükli igal sammul lisatakse hulka S üks tipp, mis seni sinna ei kuulunud. Kuna tippude arv graafis on lõplik, siis mingil hetkel lisatakse ka tipp z hulka S.

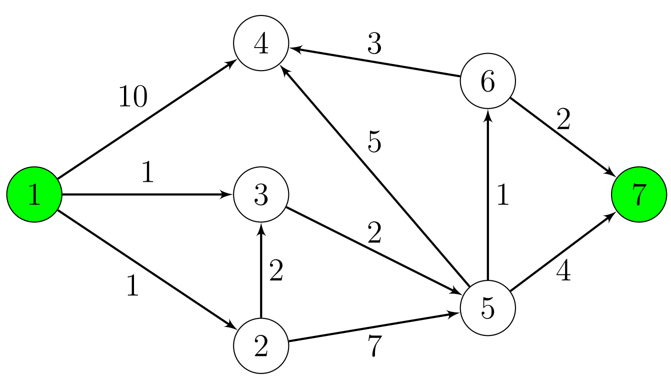
2. Võib juhtuda, et u valimisel on kõigi vaadeldavate tippude $i \notin S$ korral $L[i] = \infty$ (vt. näidet 2.129). Siis me valimegi ühe neist tippudest.

3. Kui $\omega_{uv} = \infty$, siis tingimus $L[u]+\omega_{uv} < L[v]$ ei ole täidetud (isegi siis, kui $L[v] = \infty$). Seega for-tsüklis on mõtet vaadelda vaid neid tippe $v \notin S$, mis on tipu u naabrid, s.t. mille korral leidub kaar $(u, v) \in E$.

4. Paneme tähele, et kui mingi tipp u on juba hulka S lisatud, siis $L[u]$ väärtust edasistel sammudel enam ei muudeta.

5. Kui tahaksime leida lühimad teed kõigisse teistesse tippudesse (mitte ainult tippu z), siis tuleks while-tsüklis tingimus $z \notin S$ asendada tingimusega $S \neq V$. Nii vaadatakse u osas läbi kõik graafi tipud.

Näide 2.128 Rakendame Dijkstra algoritmi suunatud kaalutud graafile



olukorras, kus $a = 1$ ja $z = 7$, s.t. otsime lühimat teed tipust 1 tippu 7. Algoritmi töö käigus lisatakse hulka S tippe ja lõpetatakse siis, kui on tipp 7 lisatud. Töö lõppedes on

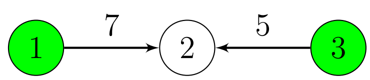
$$S = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}.$$

Järgnevas tabelis on ära toodud $L[i]$-de väärtused igal sammul (sammu 0 all on mõeldud algväärtustamist). Tabeli iga veeru põhjal valitakse uus element u nende tippude i hulgast, mis ei ole veel hulka S lisatud ja mille korral $L[i]$ väärtus on minimaalne (tabelis märgitud punase värviga). Näiteks sammul 1 on meil $S = \{1\}$ ja meil on minimaalse väärtusega 1 nii $L[2]$ kui ka $L[3]$. Antud juhul oleme u-ks valinud tipu 2, aga sama hästi oleks võinud valida ka tipu 3.

	samm 0	samm 1	samm 2	samm 3	samm 4	samm 5
$L[1]$	0	0	0	0	0	0
$L[2]$	∞	1	1	1	1	1
$L[3]$	∞	1	1	1	1	1
$L[4]$	∞	10	10	10	8	7
$L[5]$	∞	∞	8	3	3	3
$L[6]$	∞	∞	∞	∞	4	4
$L[7]$	∞	∞	∞	∞	7	6

Tabelist näeme, et lühima tee pikkus tipust 1 tippu 7 on 6. See tee on $1, 3, 5, 6, 7$.

Näide 2.129 Rakendame Dijkstra algoritmi suunatud kaalutud graafile



olukorras, kus $a = 1$ ja $z = 3$. Algoritmi käigus lisame hulka S esimesena tipu 1, siis tipu 2 ja lõpuks tipu 3. Lisaks sellele arvutame

	samm 0	samm 1	samm 2
$L[1]$	0	0	0
$L[2]$	∞	7	7
$L[3]$	∞	∞	∞

Töö lõppedes on $L[3] = \infty$, mis tähendab, et tipust 1 ei leidu suunatud ahelat tippu 3.

Hakkame nüüd uurima Dijkstra algoritmi korrektsust. Alustuseks tõestame ühe abitulemuse.

Lemma 2.130 *Dijkstra algoritmi töö igal etapil iga tipu v korral kui $L[v] \neq \infty$, siis leidub suunatud ahel tipust a tippu v, mille pikkus on $L[v]$.*

TÕESTUS. Tõestame induktsiooniga, et iga k korral pärast algoritmi töö k-ndat etappi väide kehtib.

Alus. Pärast etappi 0 (s.t. pärast algväärtustamist) on ainuke tipp, mille korral L väärtus ei ole ∞, tipp a, kusjuures $L[a] = 0$ ja 0 on ka lühima tee pikkus tipust a tippu a.

Samm. Eeldame, et väide kehtib pärast etappi k, s.t. pärast while-tsükli k-ndat läbimist, ja vaatleme suvalist tippu v. Olgu pärast etappi $k+1$ $L[v] \neq \infty$. Kui $L[v]$ väärtust etapil $k+1$ ei muudetud, siis juba pärast etappi k pidi olema $L[v] \neq \infty$ ning ahel pikkusega $L[v]$ tipust a tippu v leidub tänu induktsiooni eeldusele.

Kui aga etapi $k+1$ käigus toimub omistamine

$$L[v] := L[u] + \omega_{uv},$$

siis enne omistamist peab kehtima võrratus $L[u]+\omega_{uv} < L[v]$. Järelikult $L[u]+\omega_{uv} < \infty$, kust $L[u] \neq \infty$ ja $\omega_{uv} \neq \infty$. Kuna $L[u]$ väärtust etapil $k+1$ ei muudeta, siis $L[u] \neq \infty$ juba pärast etappi k ja seega induktsiooni eelduse põhjal leidub suunatud ahel pikkusega $L[u]$ tipust a tippu u. Lisades sellele ahelale kaare (u, v) (see leidub, sest $\omega_{uv} \neq \infty$) saame ahela pikkusega $L[u] + \omega_{uv}$ tipust a tippu v. See on sama väärtus, mis on $L[v]$-l pärast etappi $k + 1$. □

Teoreem 2.131 *Pärast Dijkstra algoritmi selle versiooni täitmist, kus $z \notin S$ asemel on tingimus $S \neq V$ (vt. märkust 2.127(5)), kehtivad iga tipu $v \in S$ korral järgmised väited.*

1. *Kui leidub suunatud ahelaid tipust a tippu v, siis*
$$L[v] = d(a, v).$$
2. *Kui ei leidu suunatud ahelaid tipust a tippu v, siis*
$$L(v) = \infty.$$

Tõestus. Väite 2 kehtimine järeldub lemmast 2.130. Tõestame väite 1.

Eeldame, et pärast algoritmi täitmist $v \in S$ ja tipust a leidub suunatud ahelaid tippu v. Siis $d(a, v) \neq \infty$. Kui õnnestub tõestada võrratus

$$L[v] \leqslant d(a, v), \tag{2.5}$$

siis $L[v] \neq \infty$ ja lemma 2.130 põhjal on $L[v]$ mingi suunatud ahela pikkus tipust a tippu v. Järelikult $d(a, v) \leq L[v]$ ja me saame vajaliku võrduse $L[v] = d(a, v)$.

Tõestame võrratuse (2.5) induktsiooniga selle järgi, kuidas tippe hulka S lisatakse.

Alus. Esimesena lisatakse hulka S alati tipp a. Tipu a korral $d(a, a) = 0 = L[a]$.

Samm. Vaatleme tippu $v \neq a$, mis pärast algoritmi täitmist kuulub hulka S ja kuhu leidub tipust a suunatud ahelaid. Olgu T mingi minimaalse pikkusega suunatud ahel tipust a tippu v, seega $\omega(T) = d(a, v)$. Vaatleme seda hetke algoritmi töös, kui tipuks u valitakse v, ja eeldame, et varem hulka S lisatud tippude i jaoks võrratus $L[i] \leqslant d(a, i)$ kehtib. Sel hetkel $a \in S$, aga $v \notin S$. Seega peab ahelas T leiduma mingi kaar $e = (x, y)$, kus $x \in S$ ja $y \notin S$. Niisiis

$$T = a, \ldots, x, y, \ldots, v.$$

Teeme järgmised tähelepanekud.

- Tänu lemmale 2.124(3) peab kehtima võrratus $d(a, y) \leqslant d(a, v)$.
- Kuna $a, \ldots, x, y$ ja $a, \ldots, x$ on minimaalse pikkusega ahelad, siis
$$d(a, x) + \omega_{xy} = \omega(a, \ldots, x) + \omega(x, y) = \omega(a, \ldots, x, y) = d(a, y).$$
- Kuna tipp x lisati hulka S mingil varasemal etapil, siis tema jaoks kehtib induktsiooni eeldus: $L[x] \leqslant d(a, x)$. Järelikult
$$L[x] + \omega_{xy} \leqslant d(a, x) + \omega_{xy}.$$

- Kuna tipp x lisati hulka S mingil varasemal etapil, siis kõik temast väljuvad kaared (muuhulgas $e = (x, y)$) on for-tsüklis läbi vaadatud. Seega $L[y] \neq \infty$ ja
$$L[y] \leqslant L[x] + \omega_{xy}.$$
- Samal etapil, kus u väärtuseks valiti v, jäeti valimata y, mis oli ka väljaspool hulka S. Seega valiku hetkel peab kehtima võrratus
$$L[v] \leqslant L[y].$$
- Eelnevat kokku võttes näeme, et
$$L[v] \leqslant L[y] \leqslant L[x] + \omega_{xy} \leqslant d(a, x) + \omega_{xy} = d(a, y) \leqslant d(a, v),$$
mida oligi vaja.

□

Märkus 2.132 Dijkstra algoritm leiab ainult lühimate teede pikkused tipust a hulka S kuuluvatesse tippudesse. Kui soovime leida ka lühimatesse teedesse kuuluvaid tippe, siis tuleks algoritmi pisut modifitseerida võttes iga tipu i jaoks kasutusele suuruse $P[i]$, mis näitab, milline on lühimas tees tipust a tippu i eelviimane tipp. Algväärtustamisel võib lugeda, et $P[i] := a$ ja kui if-lauses toimub $L[v]$ uuendamine, siis tuleks lisada ka omistamine $P[v] := u$. Pärast algoritmi töö lõppu saame tipust a tippu z viiva lühima tee tipud välja lugeda niiöelda vastupidises järjekorras:
$$z, P[z], P[P[z]], \ldots, a.$$

Märkus 2.133 Millises järjekorras lisatakse tipud hulka S? Olgu pärast Dijkstra algoritmi täitmist
$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\},$$
kusjuures esimesena on lisatud v_1 (s.t. $v_1 = a$), teisena v_2 jne. Tuleb välja, et
$$d(a, v_1) \leqslant d(a, v_2) \leqslant \ldots \leqslant d(a, v_r),$$
s.t. tippe lisatakse hulka S tipule a läheduse järjekorras. Selle näitamiseks vaatleme iga $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ korral seda hetke, kui u-ks valitakse v_i. Sel hetkel kehtib iga $j \in \{i+1, \ldots, r\}$ jaoks võrratus
$$L[v_i] \leqslant L[v_j].$$
Algoritmi edasises töös $L[v_i]$ ei muutu, kuid $L[v_{i+1}]$ võib väheneda. Nimelt kui kehtib võrratus $L[v_i] + \omega_{v_i v_{i+1}} < L[v_{i+1}]$, siis toimub omistamine
$$L[v_{i+1}] := L[v_i] + \omega_{v_i v_{i+1}}.$$
Kuna aga kaarte kaalud on positiivsed, siis ka pärast seda omistamist jääb kehtima võrratus $L[v_i] \leqslant L[v_{i+1}]$. while-tsükli järgmisel läbimisel valitakse u ossa v_{i+1} ja $L[v_{i+1}]$ väärtust enam ei muudeta. Seega
$$d(a, v_i) = L[v_i] \leqslant L[v_{i+1}] = d(a, v_{i+1}).$$

Tõestatud omadust võib kasutada näiteks sellises olukorras, kus ülesandeks on teha kindlaks, kas tipust a leidub suunatud ahel tippu z, mille pikkus on väiksem kui etteantud positiivne konstant δ. Kui pärast i-ndat sammu z ei ole veel hulgas S, aga $L(v_i) \geqslant \delta$, siis võib algoritm töö lõpetada ja teatada, et sellist teed ei leidu.

Termineid eesti ja inglise keeles

Matemaatiline loogika

aksiomaatiline teooria = *axiomatic theory*
aksioom = *axiom*
atomaarne valem = *atomic formula*
Boole'i funktsioon = *Boolean function*
eesliige = *antecedent*
funktsionaalsümbol = *function symbol*
indiviid = *subject*
indiviidide piirkond = *domain*
indiviidmuutuja = *variable*
interpretatsioon = *interpretation*
interpretatsiooni kandja = *domain of discourse*
järeldumine = *valid argument*
kehtestatav valem = *satisfiable formula*
kinnine valem = *closed formula*
konstantsümbol = *constant symbol*
korrektne teooria = *sound theory*
kvantifitseerimine = *quantification*
kvantor = *quantifier*
lause = *proposition*
lausearvutus = *propositional calculus*
lausearvutuse tehe = *propositional connective*
lausearvutuse valem = *propositional formula*
lausemuutuja = *propositional variable*
maatriks = *matrix*
mittevasturääkiv teooria = *consistent theory*
mittevasturääkivuse seadus = *law of noncontradiction*
mudel = *model*
muutujateta term = *ground term*
n-kohaline predikaat = *n-ary predicate*
olemasolukvantor = *existential quantifier*
osavalem = *subformula*
Peano aritmeetika = *Peano arithmetic*
predikaat = *predicate*
predikaatarvutus = *predicate calculus, first-order logic*
predikaatarvutuse valem = *formula in first-order logic, well-formed formula, wff*
predikaatsümbol = *predicate symbol*
prefikskuju = *prenex normal form*
samaselt tõene valem = *tautology, universally valid formula*
samaselt väär valem = *contradiction*
samaväärsed valemid = *logically equivalent formulae*
sekvents = *sequent*

sekventsiaalne lausearvutus = *sequent calculus*
semantika = *semantics*
seotud muutuja = *bound variable*
signatuur = *signature, type*
süntaks = *syntax*
tagaliige = *succedent*
term = *term*
tuletus = *deduction*
tuletuspuu = *deduction tree*
tuletusreegel = *inference rule*
tõesuspuu = *truth tree*
tõeväärtus = *truth value*
tõeväärtustabel = *truth table*
tõene = *true*
täielik teooria = *complete theory*
vaba muutuja = *free variable*
välistatud kolmanda seadus = *law of excluded middle*
väär = *false*
väärtustus = *valuation, truth assignment*
üldisuskvantor = *universal quantifier*

Graafiteooria

ahel = *walk*
ahela pikkus = *length of a walk*
alamgraaf = *subgraph*
alusgraaf = *underlying graph*
eraldav tipp = *separating vertex*
Euleri ahel = *Eulerian trail*
Euleri graaf = *Eulerian graph*
graaf = *graph*
graafi serv = *edge of a graph*
graafi tipp = *vertex of a graph*
Hamiltoni graaf = *Hamiltonian graph*
Hamiltoni tsükkel = *Hamiltonian cycle*
intsidentne = *incident*
intsidentsusmaatriks = *incidence matrix*
invariant = *invariant*
isoleeritud tipp = *isolated vertex*
isomorfsed graafid = *isomorphic graphs*
kaal = *weight*
kaalutud graaf = *weighted graph*
kaalutud suunatud graaf = *weighted directed graph*
kaar = *arc*
kaare algtipp = *initial vertex of an arc, tail*

kaare lõpptipp = *terminal vertex of an arc, head*
kaugus = *distance*
kinnine ahel = *closed walk*
kinnine Euleri ahel = *Eulerian circuit*
leht = *leaf*
lihtahel = *path*
lihtgraaf = *simple graph*
lühima tee leidmise ülesanne = *shortest path problem*
mets = *forest*
minimaalse kaaluga toespuu = *minimum spanning tree*
multigraaf = *multigraph*
naabertipud = *adjacent vertices*
naabrusmaatriks = *adjacency matrix*
nullgraaf = *edgeless graph*
nõrgalt sidus = *weakly connected*
puu = *tree*
regulaarne graaf = *regular graph*
rippuv tipp = *pendant vertex, leaf vertex*
rändkaupmehe ülesanne = *travelling salesman problem*
serva otstipud = *endpoints of an edge*
sidus graaf = *connected graph*
sidusus = *connectivity*
sidususkomponent = *connected component*
sild = *bridge*
silmus =*loop*
sisend = *source*
sisendaste = *indegree*
sisetipp = *internal vertex*
suunatud ahel = *directed walk*
suunatud graaf = *directed graph, digraph*
suunatud lihtahel = *directed path*
suunatud tsükkel = *directed cycle*
tekitatud alamgraaf = *induced subgraph*
tipu aste = *degree of a vertex, valency of a vertex*
toespuu = *spanning tree*
tsükkel = *cycle*
tugevalt sidus = *strongly connected*
tugevalt sidus komponent = *stong component*
täiendgraaf = *complement graph*
täisgraaf = *complete graph*
väljund = *sink*
väljundaste = *outdegree*

Kirjandus

[1] J. Bang-Jensen, G. Gutin, Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, Springer-Verlag, 2007.

[2] B. Bollobás, Graph Theory: An Introductory Course, Springer-Verlag, 1985.

[3] A. Buldas, P. Laud, J. Willemson, Graafid, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2008.

[4] K. Ciesielski, Set Theory for the Working Mathematician, Cambridge University Press, 1997.

[5] S. Even, Graph algorithms, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[6] S. Hedman, A First Course in Logic, Oxford University Press, 2004.

[7] T. Hõim, J. Langemets, Matemaatiline maailmapilt, loengukonspekt, 2017.

[8] O. Ore, Graafid ja nende kasutamine, "Valgus", Tallinn, 1976.

[9] R. Palm, R. Prank, Sissejuhatus matemaatilisse loogikasse, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2004.

[10] R. Palm, Diskreetse matemaatika elemendid, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2003.

[11] R. Prank, kursuse "Graafid ja matemaatiline loogika" loengute slaidid, Tartu, 2017.

[12] R. Prank, Lausearvutuse kordamine, õppematerjal, Tartu, 2017.

[13] T. Tamme, T. Tammet, R. Prank, Loogika: mõtlemisest tõestamiseni, Tartu Ülikooli Kirjastus, 1997.