

Peatükk 4

Suhe ja võrre. Võrdeline ja pöördvõrdeline jaotamine. Protsentiarvutus

4.1	Suhe ja võrre	34
4.2	Võrdeline ja pöördvõrdeline jaotamine	35
4.3	Protsentiarvutus	37
4.4	Enesekontrollitest	39
4.5	Ülesanded	41

Kontrolltöö teemad selles peatükis

1. Suhe ja võrre
2. Võrdeline jaotamine
3. Pöördvõrdeline jaotamine
4. Protsentülesanded

4.1 Suhe ja võrre

Suhte ja võrde mõisted juhatavad meid sisse teel protsentarvutuse juurde.

Definitsioon 4.1

Arvude a ja $b \neq 0$ **suhteks** nimetatakse nende arvude jagatist $a : b$ ehk $\frac{a}{b}$. Arvud a ja b on suhte liikmed.

Suhe $a : b$ lubab meil arve a ja b omavahel võrrelda. Kui $a : b > 1$, siis näitab vastav suhe, mitu korda on arv a suurem arvust b . Kui $a : b < 1$, näitab suhe, kui suure osa moodustab arv a arvust b . Kui $a : b = 1$, on arvud a ja b omavahel võrdsed.

Definitsioon 4.2

Võrdeks nimetatakse võrdust $a : b = c : d$ ehk $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Arve a, b, c, d nimetatakse **võrde liikmeteks**, arve b, c võrde **siseliikmeteks** ning arve a, d võrde **välisliikmeteks**.

Võrdel on rida omadusi, millest olulisim on võrde põhiomadus.

Võrde põhiomadus: võrdus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0, d \neq 0$) kehtib parajasti siis, kui $ad = bc$.

Teisi võrde omadusi:

1. Igas võrdes $a : b = c : d$ võib vahetada
 - 1) siseliikmed: $a : c = b : d$;
 - 2) välisliikmed: $d : b = c : a$;
 - 3) nii sise- kui välisliikmed: $d : c = b : a$;
 - 4) sise- ja välisliikmed omavahel: $b : a = d : c$.

2. Võrdest $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ järelduvad järgmised võrded:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}, \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

3. Võrretest $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ järelduvad võrded

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

ja

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n}{m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_n b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

kus arvud $m_1, m_2, \dots, m_n$ ei ole korraga nullid.

Kui võrdes on selle kolm liiget teada, neljas aga tundmatu, siis just võrde põhiomadust kasutades saame tundmatu liikme hõlpsasti leida. Kasutame seda võtet protsentülesannete lahendamise juures.

4.2 Võrdeline ja pöördvõrdeline jaotamine

Kui on antud suhted $a_1, : a_2, a_2, : a_3, \dots, a_{n-1}, : a_n$, võime selle kirjutada lühemalt $a_1, : a_2, : a_3 : \dots : a_{n-1} : a_n$.

Võrdeline jaotamine tähendab teatud suuruse jaotamist osadeks, mis on võrdelised etteantud arvudega.

Võrdelist jaotamist teostame järgmise eeskirja alusel. Suuruse A jaotamisel võrdeliselt antud arvudega $a_1, a_2, \dots, a_n$ liidame need arvud, mille tulemusena saame osade üldarvu $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Seejärel jagame suuruse A osade üldarvuga a , mille tulemusena saame ühele osale vastava suuruse $q = \frac{A}{a}$. Nüüd korrutame selle jagatise q iga antud arvuga $a_1, a_2, \dots, a_n$, mispeale saamegi igale arvule vastava osa antud suurusest A .

Näide 4.1

Jaotame arvu 299 osadeks, mis suhtuksid nagu $1 : 2 : 4 : 5 : 11$.

Selleks leiame kõigepealt osade koguarvu:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 11 = 23.$$

Ühele osale vastava arvu saame, kui jagame arvu 299 osade koguarvuga 23:

$$\frac{299}{23} = 13.$$

Igale antud arvule vastava osa suurused avalduvad:

$$1 \cdot 13 = 13, \quad 2 \cdot 13 = 26, \quad 4 \cdot 13 = 52, \quad 5 \cdot 13 = 65, \quad 11 \cdot 13 = 143.$$

Kontrollida saame üksikute osade suurused kokku liites:

$$13 + 26 + 52 + 65 + 143 = 299.$$

◇ ◇ ◇

Näide 4.2

Neli arvu suhtuvad nagu $7\frac{7}{15} : 4,9 : 2,1 : \frac{7}{6}$. Leiame need arvud, kui kahe esimese arvu summa on 39 võrra suurem kahe viimase arvu summast.

Paneme tähele, et arvud, mis suhtuvad nagu $1 : 2$ suhtuvad samal ajal ka nagu $2 : 4$ või $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$. Seda analoogiat ära kasutades teisendame suhted $7\frac{7}{15} : 4,9 : 2,1 : \frac{7}{6}$ selliseks, et kõik liikmed oleksid edasiste arvutuste lihtsustamiseks täisarvud. Selleks teisendame kõik arvud esialgu harilikeks murdudeks ja seejärel ühenimelisteks murdudeks:

$$\frac{112}{15} : \frac{49}{10} : \frac{21}{10} : \frac{7}{6},$$

$$\frac{112 \cdot 2}{15 \cdot 2} : \frac{49 \cdot 3}{10 \cdot 3} : \frac{21 \cdot 3}{10 \cdot 3} : \frac{7 \cdot 5}{6 \cdot 5},$$

$$\frac{224}{30} : \frac{147}{30} : \frac{63}{30} : \frac{35}{30},$$

$$224 : 147 : 63 : 35.$$

Nüüd tähistame otsitavad arvud $224x$, $147x$, $63x$, $35x$ ja vastavalt ülesande tekstile koostame võrrandi

$$224x + 147x = 63x + 35x + 39,$$

millest

$$273x = 39$$

ja

$$x = \frac{1}{7}.$$

Otsitavad arvud on seega

$$224 \cdot \frac{1}{7} = 32, \quad 147 \cdot \frac{1}{7} = 21, \quad 63 \cdot \frac{1}{7} = 9, \quad 35 \cdot \frac{1}{7} = 5.$$

◇ ◇ ◇

Võrdelist jaotamist saab aga teostada võrde omadusi ära kasutades. Vaatame järgnevalt selle illustreerimiseks ühte näidet.

Näide 4.3

Klaasi valmistamiseks kasutatakse liiva, NaSO_4 ja talki vahekorras $1 : 2 : 4$. Leiame, kui palju on vaja võtta iga koostisainet 100 kg klaasi valmistamiseks mõeldud segu jaoks. Tähistame seekord materjalide hulga vastavalt tähtedega x , y ja z . Nüüd märgime, et

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$$

ja vastavalt võrde omadusele nr 3:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{1+2+4} = \frac{100}{7}$$

ning siit omakorda saame avaldada:

$$x = \frac{1 \cdot 100}{7} = 14\frac{2}{7} \text{ (kg)}, \quad y = \frac{2 \cdot 100}{7} = 28\frac{4}{7} \text{ (kg)}, \quad z = \frac{4 \cdot 100}{7} = 57\frac{1}{7} \text{ (kg)}.$$

◇ ◇ ◇

Pöördvõrdeline jaotamine tähendab teatud suuruse jaotamist osadeks, mis on pöördvõrdelised etteantud arvudega. Seega pöördvõrdelise jaotamise korral leiame esialgu kõigi antud arvude pöördarvud ning edasi tegutseme vastavalt võrdelise jaotamise eeskirjale.

Võrrandite lahendamisest on täpsemalt juttu järgmises peatükis.

4.3 Protsentarvutus

Protsendi mõiste ja protsentarvutuse oskuse vajadus kerkivad üles paljude nii matemaatikas kui eluliselt ettetulevate ülesannete puhul.

Definitsioon 4.3

Ühte sajandikku osa tervikust nimetatakse **protsendiks**.

Protsendi tähis on %.

Protsentarvutuse juures kerkib üles **kolm põhiülesannet**, mida järgnevalt vaatleme. Neis ülesannetes on osalisteks kolm suurust. Need on tervik (tähistame selle siin tähega A), osa tervikust (tähistusega a) ja osamäär ehk osa suurus väljendatuna protsentides (tähistusega m).

Osamäär m leidmine terviku A ja osa a järgi. Teisisõnu on siin tegemist kahe arvu suhte väljendamisega protsentides. Selleks leiame arvude a ja A suhte ning korrutame tulemuse 100 protsendiga.

Näide 4.4

Leiame, mitu protsenti on 39 arvust 75.

Esiteks leiame arvude 39 ja 75 suhte ning korrutame tulemuse seejärel 100 protsendiga:

$$\frac{39}{75} \cdot 100\% = 52\%.$$

◇ ◇ ◇

Osa a leidmine osamäärast m ja terviku A järgi. Selleks jagame terviku 100-ga, saades ühele protsendile vastava osa suuruse, mille korrutame osamäärast m ehk saame m protsendile vastava osa suuruse.

Näide 4.5

Leiame 32% arvust 542.

Esiteks korrutame osamäärast suuruse terviku suurusega ning jagame tulemuse seejärel 100-ga:

$$\frac{32 \cdot 542}{100} = 167,68.$$

◇ ◇ ◇

Terviku A leidmine osamäärast m ja osa a järgi. Selleks jagame osa a protsendiga m , mille tulemusena saame ühele protsendile vastava osa suuruse, ning seejärel terviku saamiseks korrutame tulemuse 100-ga.

Näide 4.6

Leiame terviku, kui 3% tervikust on 6.

Jagame osa suuruse 6 osamäärast ning korrutame tulemuse 100-ga:

$$\frac{6}{3} \cdot 100 = 200.$$

◇ ◇ ◇

Tihti lahendatakse aga protsentülesannet **võrde** abil. Võrde moodustamiseks kasutame suurust A ehk tervikut, suurust a ehk osa tervikust, osamäära suurust m ning arvu 100 selliselt:

$$\frac{a}{A} = \frac{m}{100}.$$

Et esitatud võrdest ühte suurust avaldada, peavad ülejäänud kaks olema teada.

Näide 4.7

Leiame 72% arvust

$$\frac{\left(49\frac{5}{24} - 46\frac{7}{20}\right) \cdot 2\frac{1}{3} + 0,6}{0,2}.$$

Arvutame esialgu antud avaldise väärtuse:

$$\frac{\left(49\frac{5}{24} - 46\frac{7}{20}\right) \cdot 2\frac{1}{3} + 0,6}{0,2} = \left(2\frac{103}{120} \cdot \frac{7}{3} + \frac{3}{5}\right) \cdot 5 = \frac{2617}{72}.$$

Nüüd moodustame võrde

$$\frac{a}{\frac{2617}{72}} = \frac{72}{100}$$

ja avaldame siit puuduva suuruse:

$$a = \frac{2617 \cdot 72}{72 \cdot 100} = 26,17.$$

◇ ◇ ◇

4.4 Enesekontrollitest

1. Arvude a ja $b \neq 0$ suhteks nimetatakse nende arvude

- a) summat;
- b) vahet;
- c) korrutist;
- d) jagatist.

2. Võrde

- a) välisliikmete korrutis võrdub absoluutväärtusega siseliikmete vahet;
- b) siseliikmete summa võrdub absoluutväärtusega välisliikmete vahet;
- c) välisliikmete summa võrdub siseliikmete summaga;
- d) välisliikmete korrutis võrdub siseliikmete korrutisega.

3. Võrdest $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ järeldeb võrre

- a) $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$;
- b) $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$;
- c) $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{c}$;
- d) $\frac{a \pm b}{d} = \frac{c \pm d}{d}$.

4. Jaotades arvu 28 võrdeliselt arvudega 9 ja 5 saadakse arvud

- a) $3\frac{1}{9}$ ja $5\frac{3}{5}$;
- b) $\frac{28}{9}$ ja $5\frac{28}{5}$;
- c) 18 ja 10;
- d) 14 ja 5.

5. Jaotades arvu 21 pöördvõrdeliselt arvudega $\frac{1}{2}$ ja 0,2 saadakse arvud

- a) 6 ja 15;
- b) $\frac{6}{2}$ ja $\frac{15}{5}$;
- c) 12 ja 9;
- d) 10,5 ja 10,5.

6. $x\%$ arvust y on

a) $\frac{y \cdot 100}{x}$;

b) $\frac{x \cdot y}{100}$;

c) $\frac{x \cdot 100}{y}$;

d) $\frac{y}{x \cdot 100}$.

7. Kui $x\%$ arvust X on y , siis arv X on

a) $\frac{y}{x} \cdot 100\%$;

b) $\frac{x \cdot y}{100}\%$;

c) $\frac{x}{y} \cdot 100\%$;

d) $\frac{y}{x \cdot 100}\%$.

8. Arv x moodustab arvust y

a) $\frac{y \cdot 100}{x}$;

b) $\frac{x \cdot y}{100}$;

c) $\frac{x \cdot 100}{y}$;

d) $\frac{y}{x \cdot 100}$.

9. Vähendades arvu 20 20% võrra, jääb alles

a) 15;

b) 18;

c) 4;

d) 16.

10. Arv, millest 4% on 5, on

a) 20;

b) 80;

c) 125;

d) 200.

Vastused: 1.d; 2.d; 3.b; 4.c; 5.a; 6.b; 7.c; 8.a; 9.d; 10.c.

4.5 Ülesanded

Ülesanne 4.1. Jaotada arv 78144 liidetavateks võrdeliselt arvudega $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ ja 1.

Ülesanne 4.2. Jaotada arv 2400 liidetavateks a , b , c ja d , nii et $a : b = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, $b : c = 0,1$ ja $c : d = 0,4 : 0,5$.

Ülesanne 4.3. Portselani koostisse kuuluvad valge savi, liiv ja kips vahekorras 25 : 2 : 1. Kui palju tuleb võtta iga nimetatud ainet 1,4 kg portselanisegu valmistamiseks?

Ülesanne 4.4. Kolm arvu on pöördvõrdelised arvudega 1, 2 ja 3. Leida need arvud, kui esimene neist on $5\frac{3}{5}$ võrra suurem kolmandast.

Ülesanne 4.5. Kui suured on täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud mediaan jaotab täisnurga suhtes 1 : 2?

Ülesanne 4.6. Leida arv, millest 11 % on

$$\frac{\left(85\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18}\right) : 2\frac{2}{3}}{0,04}.$$

Ülesanne 4.7. Mitu protsenti moodustab arv 21 arvust

$$0,0016^{-\frac{3}{4}} + 0,04^{-\frac{1}{2}} - 0,216^{-\frac{2}{3}} \cdot 9.$$

Ülesanne 4.8. Leida 30 % arvust

$$\left(\frac{0,012}{5} + \frac{0,04104}{5,4}\right) \cdot 4560 - 42\frac{1}{3}.$$

Ülesanne 4.9. Palk tõusis 20% võrra, aga hinnad 50% võrra. Mitme protsendi võrra peab vähendama tarbimist, et kulutused ei suureneks?

Ülesanne 4.10. Töötaja palka tõsteti kahel korral ühe ja sama protsendi võrra. Selle tulemusena tõusis töötaja palk 1200 eurolt 1323 euroni. Milline oli palgatõus mõlemal korral?

Ülesanne 4.11. Esimene arv on teisest 25% võrra suurem. Mitme protsendi võrra on teine arv esimesest väiksem?

Ülesanne 4.12. Mitme protsendi võrra muutub ristküliku pindala, kui ta pikkust suurendada ja laiust vähendada 20% võrra?

Ülesanne 4.13. Kui palju on vaja võtta 5%-lise niklisisaldusega ja kui palju 40%-lise niklisisaldusega terast, et saada 14 tonni 30%-lise niklisisaldisega terast?

Vastused: 4.1. 3256, 9768, 26048, 39072. 4.2. 144, 96, 960, 1200. 4.3. 1,25, 0,1, 0,05. 4.4. 8,4, 4,2, 2,8. 4.5. 30, 60. 4.6. $166\frac{2}{3}$. 4.7. 20%. 4.8. 0,98. 4.9. $20\frac{3}{4}$ %. 4.10. 5%. 4.11. 20%. 4.12. 4%. 4.13. 4, 10.
