

Seminar 1: Põhikonstruktsioonid sirkli ja joonlauaga

MTMM.00.142 Geomeetria süvendusseminar

13.02.2019

Eukleidese geomeetria

Eukleidese geomeetria postulaadid

1. Läbi kahe punkti saab tõmmata sirge.
(Ruumis ei ole auke, kõik punktid on omavahel ühendatavad.)
2. Iga lõiku saab pikendada.
(Ruum on lõpmatu, ei saa kunagi otsa.)
3. Ümber iga keskpunkti saab tõmmata iga raadiusega ringjoone.
(Iga suuruse ja keskpunktiga ringjooned on olemas.)
4. Kõik täisnurgad on omavahel võrdsed.
5. Läbi sirgel mitteasuva punkti saab joonestada ühe ja ainult ühe antud sirgega paralleelse sirge.

Konstruktiivne geomeetria

Konstruksioonülesanne — ülesanne teostada teatav geomeetriline konstruktsioon. Alati on vaja täpsustada, milliseid vahendeid võib kasutada. Klassikaliste konstruktsioonülesannete korral (Eukleidese geomeetrias) on lubatud vahenditeks ainult **sirkel** ja **ühe äärega skaalata joonlaud**. Klassikaline konstruktsioonülesanne koosneb sammudest, millest igaüks on kas

- ▶ kahte punkti läbiva sirge joonestamine;
- ▶ etteantud keskpunkti ja raadiusega ringjoone või kaare joonestamine;
- ▶ kahe sirge, kahe ringjoone või sirge ja ringjoone lõikepunktide leidmine.

Konstruktiivne geomeetria

Millised konstruktsioonülesanded on **mittelahenduvad**?

- ▶ Ringi kvadratuur – ehitada antud ringiga pindvõrdne ruut;
- ▶ kuubi duplikatsioon – ehitada sellise kuubi serv, mille ruumala oleks kaks korda suurem etteantud kuubi ruumalast;
- ▶ nurga trisektsioon – jaotada antud nurk kolmeks võrdseks osaks.

Millised konstruktsioonid on võimalikud?

Konstrueeritavad on elemendid, mis on saadud antud elementidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete (liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine) ning ruutjuure võtmise teel. (Osadel juhtudel on vajalik ka ühikelemendi olemasolu.)

Põhikonstruktsioonid

- ▶ Lõigu poolitamine: $AB/2$ või $\perp AB/2$
- ▶ Sirgele ristsirge konstrueerimine läbi antud punkti: $\perp s(M)$
- ▶ Lõigu otspunktist ristsirge konstrueerimine: $\perp AB(A)$
- ▶ Nurgapoolitaja: $\angle ABC/2$
- ▶ Antud nurgaga võrdse nurga konstrueerimine
- ▶ Antud sirgega paralleelse sirge konstrueerimine: $\parallel s(M)$

Arutle naabriga ja anna lahendus või põhjendus järgmistele väidetele

1. Mis tahes kaks tasandil asetsevat sirget lõikuvad mitte rohkem kui ühes punktis.
2. Antud on tasandil asetsev lõik AB . Leidke selle tasandi kõik punktid M , mille jaoks kehtib võrdus $|AM| = |MB|$.

Arutle naabriga ja anna lahendus või põhjendus järgmistele väidetele

1. Mis tahes kaks tasandil asetsevat sirget lõikuvad mitte rohkem kui ühes punktis.
2. Antud on tasandil asetsev lõik AB . Leidke selle tasandi kõik punktid M , mille jaoks kehtib võrdus $|AM| = |MB|$.

Aksioom (tasandi esimene põhiomadus). Läbi tasandi iga kahe punkti saab tõmmata sirgjoone ja seejuures ainult ühe.

Arutle naabriga ja anna lahendus või põhjendus järgmistele väidetele

1. Mis tahes kaks tasandil asetsevat sirget lõikuvad mitte rohkem kui ühes punktis.
2. Antud on tasandil asetsev lõik AB . Leidke selle tasandi kõik punktid M , mille jaoks kehtib võrdus $|AM| = |MB|$.

Aksioom (tasandi esimene põhiomadus). Läbi tasandi iga kahe punkti saab tõmmata sirgjoone ja seejuures ainult ühe.

Teoreem (võrdhaarse kolmnurga põhiomadused). Iga võrdhaarse kolmnurga 1) alusnurgad on võrdsed; 2) alusele tõmmatud mediaan, nurgapoolitaja ja kõrgus langevad kokku.

Teoreem (võrdhaarse kolmnurga tunnused). Kui kolmnurgal ABC on üks järgnevatest omadustest: 1) [...], 2) [...], 3) tipust B lähtuv kõrgus ja mediaan ühtivad, 4) [...], siis see kolmnurk on võrdhaarne, kusjuures $AB = BC$.

Sümmeetria

Kahte tasandil paiknevat kujundit või joont nim. **sümmeetriliseks** sirge s suhtes, kui ühe kujundi iga punkti jaoks leidub temaga sirge s suhtes sümmeetriline teise kujundi punkt.

Ülesanne. Joonestage sirge, mille suhtes antud punktid C ja C' on sümmeetrilised.

Kahe punkti sümmeetriatelge nim. ka neid punkte ühendava lõigu **keskristsirgeks**.

Ülesanne. Konstrueerige kahe paralleelse sirge sümmeetriatelg.

Lõigu konstrueerimine tema pikkust väljendava valemi järgi

Ülesanne 11. Antud on kolm lõiku pikkustega a , b ja c .
Konstrueerige nende kolme lõigu neljas võrdeline lõik pikkusega

$$x = \frac{bc}{a}.$$

See on samaväärne võrdusega $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

(Näpunäide: sarnased kolmnurgad.)

Ülesanne 9. Jaotage lõik AB osadeks AC , CD ja DB nii, et

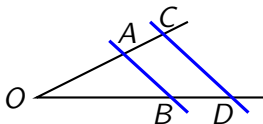
$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{1}{2} \text{ ja } \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{3}{2}.$$

(Näpunäide: $|AC| : |CD| : |DB| = 3 : 6 : 4$. Joonestage ühest otspunktist tõmmatud kiirele $3 + 6 + 4 = 13$ võrdse pikkusega lõiku. Kiirteteoreem.)

Kolmnurkade sarnasus. Kiirteteoreem

Kaks lõiku a ja b on võrdelised lõikudega c ja d , kui nende pikkuste suhted on võrdsed, st $a : b = c : d$.

Teoreem (kiirteteoreem). Kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, siis nurga ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teisel haaral tekkinud lõikudega.



$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|OC|}{|OD|}$$

Kolmnurkade sarnasuse tunnused.

- KNK** Kui ühe kolmnurga nurk võrdub teise kolmnurga nurgaga ja selle nurga lähisküljed on võrdelised teise kolmnurga vastavate külgedega, siis need kolmnurgad on sarnased.
- NN** Kui ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga, siis need kolmnurgad on sarnased.
- KKK** Kui ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdelised teise kolmnurga kolme küljega, siis need kolmnurgad on sarnased.

Konstruksioonid, mis toetuvad täisnurkse kolmnurga omadustele

Ülesanne. Olgu antud kaks lõiku pikkustega a ja b . Konstrueerige lõik, mille pikkus on

▶ $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

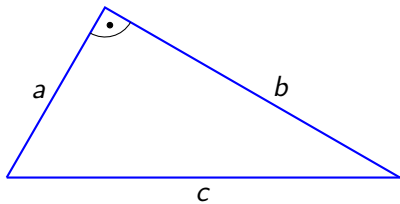
▶ $x = \sqrt{a^2 - b^2}$

▶ $x = \sqrt{ab}$ (geomeetriline keskmine)

Pythagorase teoreem

Täisnurkse kolmnurga hüpoteenuusi ruut võrdub kaatetite ruutude summaga.

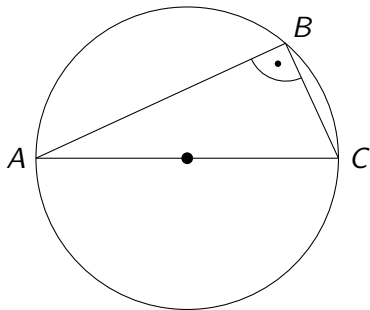
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Thalese teoreem

Ringjoone diameetritele toetuv piirdenurk on täisnurk.

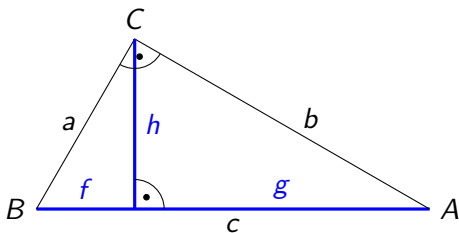
$$\angle ABC = 90^\circ$$



Teoreem täisnurkse kolmnurga kõrgusest

Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine.

$$h = \sqrt{fg} \text{ ehk } h^2 = fg$$

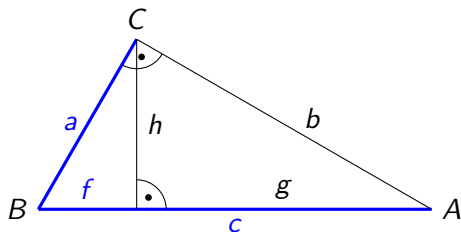


Eukleidese teoreem

Täisnurkse kolmnurga kaatet on oma projektsiooni ja hüpotenuusi geomeetiline keskmine.

$$a = \sqrt{fc} \text{ ehk } a^2 = fc$$

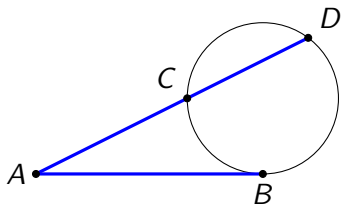
$$b = \sqrt{gc} \text{ ehk } b^2 = gc$$



Teoreem lõikajast ja puutujast

Kui väljaspool ringjoont võetud punktist on ringjoonele tõmmatud lõikaja ja puutuja, siis puutuja lõik antud punktist puutepunktini on keskmine võrdeline lõikaja osadele, mis on võetud antud punktist lõikepunktideni ringjoonega, s.t.

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AD|.$$



Algebraalaste avaldistena antud lõikude konstrueerimine

Olgu antud lõigud pikkustega a , b ja c . Te oskate konstrueerida lõike pikkusega

- ▶ ka , kus $k \in \mathbb{Q}$;
- ▶ $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, \sqrt{ab} ;
- ▶ $\frac{bc}{a}$;
- ▶ $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, $a\sqrt{5}$,

Ülesanne. Millistele konstruktsioonidele taandub lõikude pikkusega x konstrueerimine?

- ▶ $x = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$;
- ▶ $(\sqrt{7} - \sqrt{5})a$;
- ▶ $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;
- ▶ $\sqrt{45}a$;
- ▶ $0,5\sqrt{10}a$;
- ▶ $x = \sqrt{\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}}$?

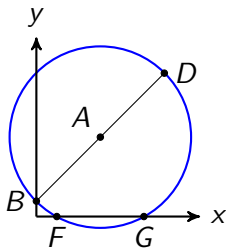
Algebraalste avaldistena antud lõikude konstrueerimine

Ülesanne. Olgu antud lõigud pikkustega 1, a ja b . Konstrueerida ruutvõrrandi $x^2 - ax + b = 0$ lahendid (eeldame, et $a^2 > 4b$).

Algebraalste avaldistena antud lõikude konstrueerimine

Ülesanne. Olgu antud lõigud pikkustega 1, a ja b . Konstrueerida ruutvõrrandi $x^2 - ax + b = 0$ lahendid (eeldame, et $a^2 > 4b$).

Lahendus. Konstrueerime koordinaatteljestikku punktid $B(0, 1)$ ja $D(a, b)$ ning ringjoone, millele BD on diameetrik. Olgu F ja G punktid, kus ringjoon lõikab x -telge. Punktide F ja G abstsissid on antud ruutvõrrandi lahenditeks.



Põhjendada, miks punktide F ja G abstsissid on ruutvõrrandi $x^2 - ax + b = 0$ lahenditeks.

Kodutöö esimesest seminarist puudujatele

Antud on lõigud pikkustega a , b ja c , $c > a$. Konstrueerige sirkli ja joonlauaga lõik pikkusega x , kui

$$\blacktriangleright x = \frac{bc}{a}$$

$$\blacktriangleright x = \frac{a}{3}$$

$$\blacktriangleright x = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$\blacktriangleright x = \sqrt{bc}$$

$$\blacktriangleright x = (\sqrt{3} + \sqrt{2})a$$

Kirjeldage detailselt iga konstruktsiooni, kasutage selleks järgmisi tähistusi:

- $\blacktriangleright r_a(O)$ – ringjoon/kaar raadiusega a ja keskpunktiga O ;
- $\blacktriangleright AB$ – lõik/kiir/sirge AB või selle ülekandmine;
- $\blacktriangleright \rightarrow C$ – [mingi konstruktsioon] määrab punkti C ;
- $\blacktriangleright \perp AB/2$ – lõigu AB keskristsirge;
- $\blacktriangleright \perp s(M)$ – sirge s ristsirge läbi punkti M ;
- $\blacktriangleright \angle ABC/2$ – nurga ABC poolitaja;
- $\blacktriangleright \parallel s(M)$ – sirgega s paralleelne sirge läbi punkti M .