

Seminar 2: Kuldlõige

MTMM.00.142 Geomeetria süvendusseminar

20.02.2019

Kuldne suhe

Lõik on jaotatud **kuldses suhtes**, kui kogu lõigu ja selle pikema osalõigu pikkuste suhe on sama, mis pikema ja lühema osalõigu pikkuste suhe.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \quad (\text{loe: fii})$$



Kuldne suhe

Lõik on jaotatud **kuldses suhtes**, kui kogu lõigu ja selle pikema osalõigu pikkuste suhe on sama, mis pikema ja lühema osalõigu pikkuste suhe.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \quad (\text{loe: fii})$$



Kuna $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$, saame ruutvõrrandi $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, mille ainus positiivne lahend on

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Kuldne suhe

Seost $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ kasutades saame kirjutada

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Seost $\varphi^2 = 1 + \varphi$ kasutades saame kirjutada

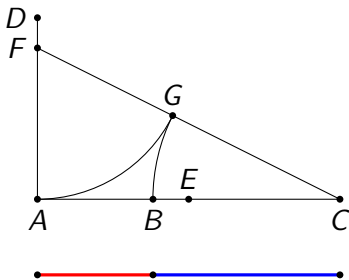
$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Antud lõigu jaotamine kuldse suhtes

Antud on lõik AC .

1. $\perp AC(A) \rightarrow AD$
2. $AC/2 \rightarrow E$
3. $r_{AE}(A) \rightarrow F$
4. FC
5. $r_{FA}(F) \rightarrow G$
6. $r_{CG}(C) \rightarrow B$

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|} = \varphi$$

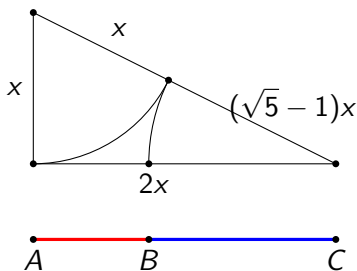


Miks see konstruktsioon jaotab lõigu kuldse suhtes?

Antud lõigu jaotamine kuldses suhtes

Antud on lõik AC .

1. $\perp AC(A) \rightarrow AD$
2. $AC/2 \rightarrow E$
3. $r_{AE}(A) \rightarrow F$
4. FC
5. $r_{FA}(F) \rightarrow G$
6. $r_{CG}(C) \rightarrow B$



$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|} = \varphi$$

$$|BC| = (\sqrt{5} - 1)x, \quad |AB| = (3 - \sqrt{5})x$$

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5})}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

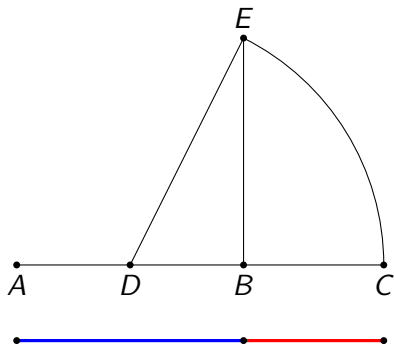
Antud lõigu järgi φ korda pikema lõigu konstrueerimine

Antud on lõik AB . Leida punkt

C nii, et $\frac{|AC|}{|AB|} = \varphi$.

1. $AB/2 \rightarrow D$
2. $\perp AB(B)$
3. $r_{AB}(B) \rightarrow E$
4. $r_{DE}(D) \rightarrow C$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$$



Miks see konstruktsioon tekitab kuldse suhte?

Antud lõigu järgi φ korda pikema lõigu konstrueerimine

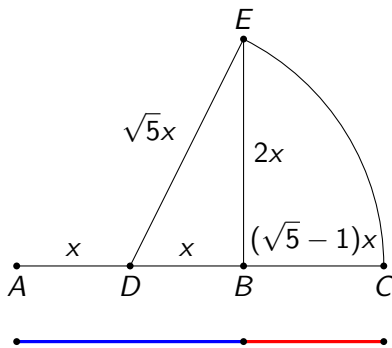
Antud on lõik AB . Leida punkt

C nii, et $\frac{|AC|}{|AB|} = \varphi$.

1. $AB/2 \rightarrow D$
2. $\perp AB(B)$
3. $r_{AB}(B) \rightarrow E$
4. $r_{DE}(D) \rightarrow C$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$$

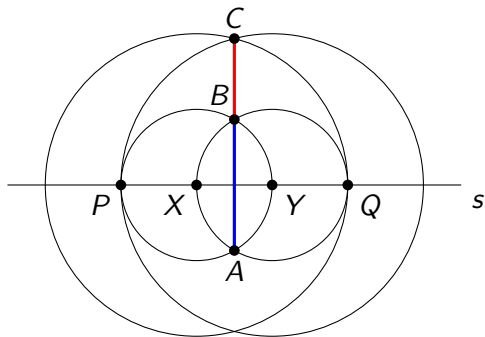
$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{2x + (\sqrt{5} - 1)x}{2x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$



Hofstetter'i kuldse lõike konstruktsioon kasutades nelja ringjoont

1. $X, Y \in s$
2. $r_{XY}(X), r_{XY}(Y) \rightarrow A, B, P, Q$
3. $r_{XQ}(X), r_{YP}(Y) \rightarrow C$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$$

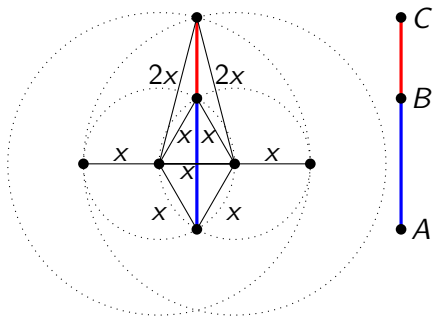


Miks see konstruktsioon tekitab kuldse suhte?

Hofstetter'i kuldse lõike konstruktsioon kasutades nelja ringjoont

- $X, Y \in s$
- $r_{XY}(X), r_{XY}(Y) \rightarrow A, B, P, Q$
- $r_{XQ}(X), r_{YP}(Y) \rightarrow C$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$$

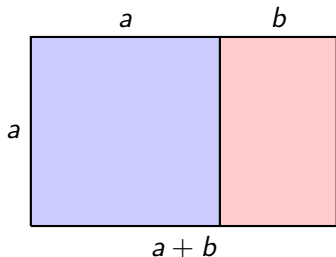


$$|AB| = \sqrt{3}x, \quad |BC| = (\sqrt{15}/2 - \sqrt{3}/2)x,$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}/2 - \sqrt{3}/2} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{12} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$

Kuldne ristkülik

Kuldseks ristkülikuks nimetatakse ristkülikut, mille külgede pikkuste suhe on võrdne kuldse suhtega.



$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Kuldne ristkülik

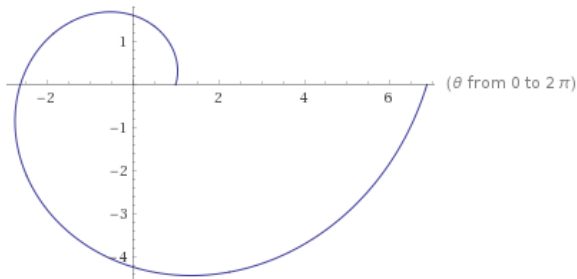
Ülesanne. Konstrueerige kuldne ristkülik tema lühema külje järgi.

Eraldage kuldsest ristkülikust ruut, mille külg ühtib lähteristküliku lühema küljega. Milline on allesjäänud ristküliku külgede suhe?
Eraldage järelejäänud ristkülikust analoogselt eespool tehtuga ruut. Jätkake sama toimingut veel mõned korrad. Millised ristkülikud tekivad alati, miks?

Kuldne spiraal

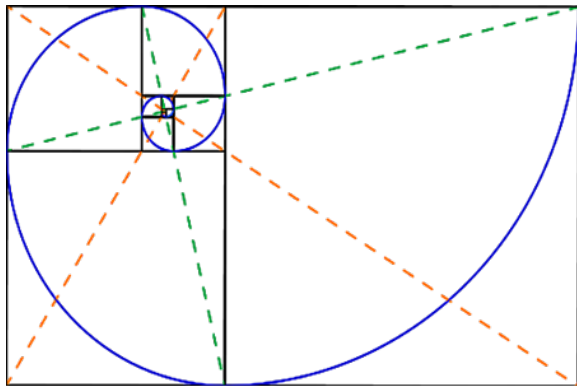
Kuldne spiraal $r = \varphi^{\theta \frac{2}{\pi}}$ on logaritmilise spiraali $r = ae^{b\theta}$ erijuht, kus algne raadius $a = 1$ ning $b = \frac{\ln \varphi}{\pi/2}$.

Mõlemad spiraalid on siin esitatud polaarkoordinaatides (r, θ) , kus r on punkti kaugus koordinaatide alguspunktist ning θ nurk x -telje ja punkti kohavektori vahel. Kuldse spiraali kasvutegur on kuldne suhe φ , st kaugus r kasvab iga veerandpöördega ($\pi/2$ rad) φ korda.



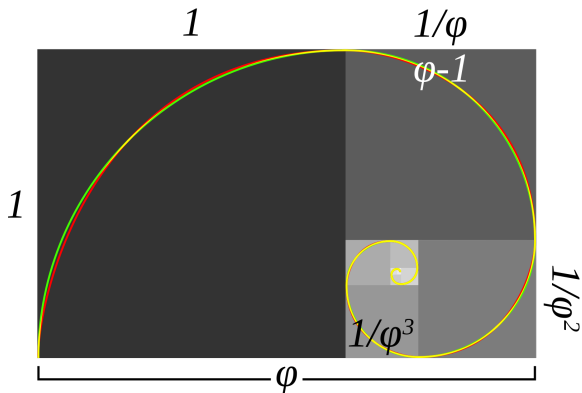
Kuldne spiraal

Kuldne spiraal $r = \varphi^{\theta/\pi}$ polaarkoordinaatides (r, θ) , kus r on punkti kaugus koordinaatide alguspunktist ning θ nurk x -telje ja punkti kohavektori vahel.

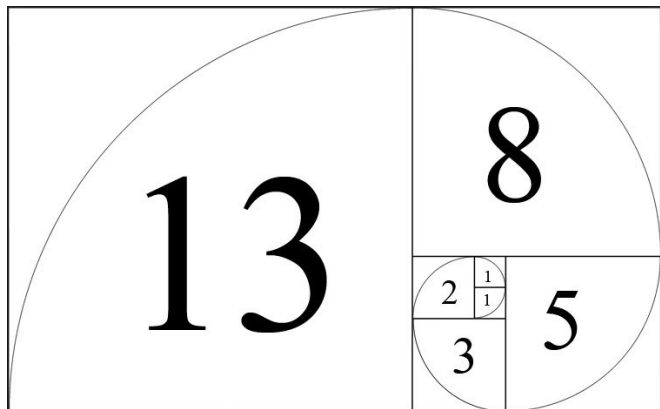


Kuldne spiraal

Roheline spiraal on moodustatud veerandringjootest, punane on kuldne spiraal, kattuivad osad on kollased.



Fibonacci spiraal



Fibonacci jada

Vt Fibonacci jada

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Siin $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ning kõik järgnevad liikmed arvutatakse eeskirja

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots$$

kohaselt.

Fibonacci jada

Vt järjestikuste Fibonacci arvude suhteid.

F_n	F_n/F_{n-1}	erinevus kuldsest suhtest
1		
1	1,000000	-38,1966%
2	2,000000	23,6068%
3	1,500000	-7,2949%
5	1,666667	3,00566%
8	1,600000	-1,11456%
13	1,625000	0,43052%
21	1,615385	-0,16374%
34	1,619048	0,06265%
55	1,617647	-0,02392%
89	1,618182	0,00914%
144	1,617977	-0,00349%
233	1,618056	0,00133%

Fibonacci jada

Seega Fibonacci jadas iga järgnev liige on ligikaudu 1,618 korda suurem eelnevast ning iga eelnev ligikaudu 0,618 korda väiksem järgnevast. Kehtib

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi.$$

Lisaks saab kuldse suhte abil Fibonacci jada defineerida mitterekursiivselt

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Kuldse suhte järjestikused astmed rahuldavad Fibonacci jada rekurrentset seost

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1}.$$

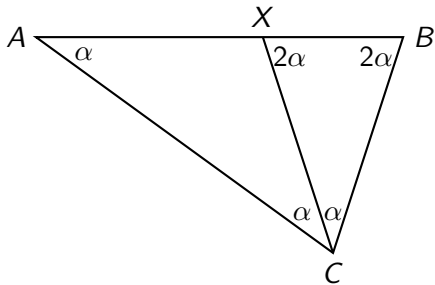
Kuldne kolmnurk

Ülesanne. Joonistage võrdhaarne kolmnurk. Olgu selle tipunurk 36° . Joonistage selle kolmnurga alusnurga poolitaja ja leidke saadud jooniselt võrdseid nurki ning sarnaseid kolmnurki. Milline on saadud kolmnurga haara ja aluse pikkuste suhe?

Kuldne kolmnurk

Ülesanne. Joonistage võrdhaarne kolmnurk. Olgu selle tipunurk 36° . Joonistage selle kolmnurga alusnurga poolitaja ja leidke saadud jooniselt võrdseid nurki ning sarnaseid kolmnurki. Milline on saadud kolmnurga haara ja aluse pikkuste suhe?

Kuldseks kolmnurgaks nimetatakse võrdhaarset kolmnurka, mille haara ja aluse pikkuste suhe on kuldne suhe φ .



$$\alpha = 36^\circ, 2\alpha = 72^\circ$$

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|XB|} \text{ ehk}$$

$$\frac{|AB|}{|AX|} = \frac{|AX|}{|XB|} = \varphi, \text{ millest}$$

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \varphi$$

Kuldne kolmnurk

Ülesanne 11. Konstrueerige kuldne kolmnurk, kui on antud kas selle haar või alus.

Ülesanne 12. Kui suur on korrapärase kõõlkümmenurga küljele vastav hulknurga ümberringjoone kesknurk? Kuidas konstrueerida korrapärast kõõlkümmenurka, kõõlviisnurka ja kõõlviisteistnurka?

Ülesanne 13. Millises suhtes jaotab korrapärase kumera viisnurga kahe diagonaali lõikepunkt kummagi diagonaali?

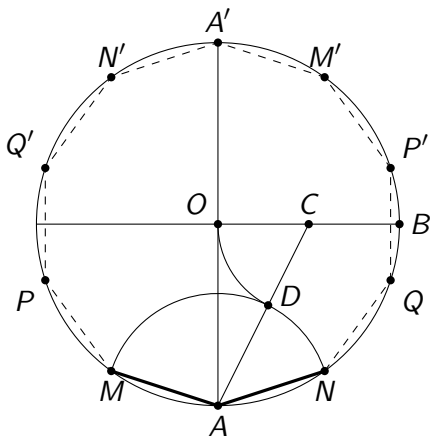
Ülesanne 14. Mitu kuldset kolmnurka on määratud korrapärase kumera viisnurga diagonaalide ja külgedega?

Korrapärase kõõlkümmenurga konstruksioon

Korrapärase kõõlkümmenurga külele vastav hulknurga ümberringjoone kesknurk on 36° . Tema külg on võrdne kuldloikes jaotatud ümberringjoone raadiuse pikema osaga.

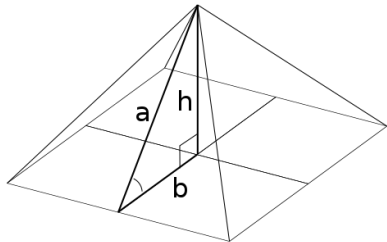
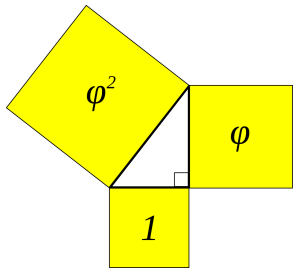
Antud OA .

1. $r_{OA}(O)$
2. $\perp OA(O) \rightarrow B$
3. $\perp OB/2 \rightarrow C$
4. $r_{CO}(C) \rightarrow D$
5. $r_{AD}(A) \rightarrow M, N$
6. $r_{AD}(N) \rightarrow Q$
7. $r_{AD}(M) \rightarrow P$
8. $AO \rightarrow A', NO \rightarrow N', \dots$



Kepleri kolmnurk

Kepleri kolmnurk on täisnurkne kolmnurk, mille küljed suhtuvad nagu $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$. Väidetavalt on selliste proportsioonidega Egiptuse püramiidid (pool põhja läbimõõtu, püramiidi kõrgus ja külgtahu kõrgus suhtuvad nagu $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$).



Kepleri kolmnurk on ainus täisnurkne kolmnurk, mille küljed suhtuvad nagu geomeetriline progressioon. Seevastu 3-4-5 kolmnurk on ainus täisnurkne kolmnurk, mille küljed suhtuvad nagu aritmeetiline progressioon.

Kepleri kolmnurk

Ülesanne. Olgu a ja b mingid positiivsed reaalarvud. On teada, et nende arvude aritmeetiline, geomeetriline ja harmooniline keskmine on mingi täisnurkse kolmnurga külgedeks. Tõestada, et tegemist on Kepleri kolmnurgaga.

Kepleri kolmnurk

Ülesanne. Olgu a ja b mingid positiivsed reaalarvud. On teada, et nende arvude aritmeetiline, geomeetiline ja harmooniline keskmine on mingi täisnurkse kolmnurga külgedeks. Tõestada, et tegemist on Kepleri kolmnurgaga.

Milline on aritmeetilise, geomeetrilise ja harmoonilise keskmise vahekord?

$$\frac{a+b}{2} \quad \sqrt{ab} \quad \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Kepleri kolmnurk

Ülesanne. Olgu a ja b mingid positiivsed reaalarvud. On teada, et nende arvude aritmeetiline, geomeetiline ja harmooniline keskmine on mingi täisnurkse kolmnurga külgedeks. Tõestada, et tegemist on Kepleri kolmnurgaga.

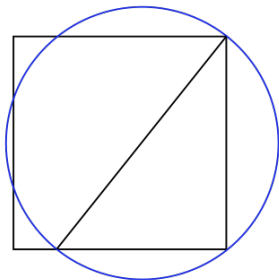
Milline on aritmeetilise, geomeetrilise ja harmoonilise keskmise vahekord? Põhjendada.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Kepleri kolmnurk

Vaatleme Kepleri kolmnurka külgedega 1 , $\sqrt{\varphi}$, φ , selle ümberringjoont ning ruutu, mille küljeks on pikem kaatet. Saadud ruudu ümbermõõt ($4\sqrt{\varphi} \approx 5,088079$) ja ringjoone pikkus ($\pi\varphi \approx 5,083204$) on peaaegu võrdsed (erinevus alla $0,1\%$).

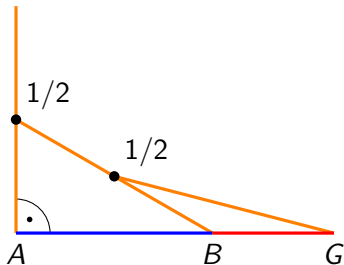
See kokkusattumus tugineb asjaolule, et $\pi \approx 4/\sqrt{\varphi}$. Kas oleme lahendanud ringi kvadratuuri probleemi?



Kuldlõige kolme võrdse lõigu abil

- ▶ Olgu antud kolm võrdse pikkusega lõiku.
- ▶ Asetage teine lõik otspunktiga vastu esimese lõigu keskpunkti (vt joonist).
- ▶ Asetage kolmas lõik otspunktiga vastu teise lõigu keskpunkti.

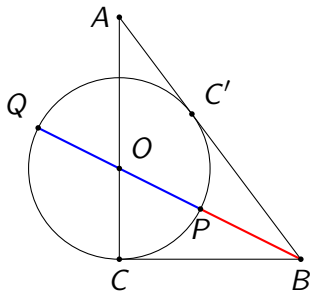
Põhjendage, miks lõikude AG ja AB suhe on kuldne suhe φ ?



Kuldloige 3-4-5 kolmnurga abil

- ▶ Olgu antud kolmnurk ABC , kus $BC = 3$, $AC = 4$ ja $AB = 5$.
- ▶ Olgu O nurga B poolitaja lõikepunkt kaatetiga AC .
- ▶ Joonestage ring keskpunktiga O ja raadiusega OC .
- ▶ Pikendage lõiku BO kuni see lõikub ringjoonega punktis Q .
- ▶ Tähistage teine lõikepunkt ringiga tähega P .

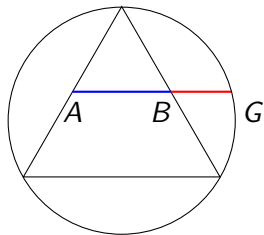
Põhjendage, miks lõikude PQ ja BP suhe on kuldne suhe φ ?



Kuldlõige võrdkülgse kolmnurga abil

- ▶ Joonestage ringi sisse võrdkülgne kolmnurk.
- ▶ Pikendage kahe külje keskpunkte ühendavat lõiku kuni ringjooneni.

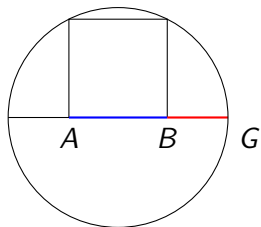
Põhjendage, miks lõikude AG ja AB suhe on kuldne suhe φ ?



Kuldlõige ruudu abil

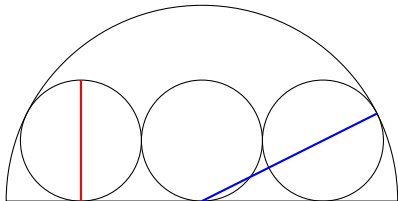
- ▶ Joonestage poolringi sisse ruut.

Põhjendage, miks lõikude AG ja AB suhe on kuldne suhe φ ?



Kuldõige poolringi sisse joonestatud kolme ringi abil

Põhjendage, miks suure poolringi raadiuse ja väiksema ringi diameetri suhe on kuldne suhe?



Lisalugemist

http:

//www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml

Kodutöö teisest seminarist puudujatele

Ülesanne 1. Konstrueerige kuldne riskülik, kui on antud selle lühem külg.

Ülesanne 2. Konstrueerige kuldne kolmnurk, kui on antud selle haar.

Ülesanne 3. Põhjendage, miks tekib kuldne suhe, kui

- a) kolm võrdse pikkusega lõiku on paigutatud nii nagu lk 26 joonisel;
- b) 3-4-5 kolmnurgas on suurema teravnurga poolitaja ja kaateti lõikepunkti joonestatud ringjoon, mis puutub hüpotenuusi (vt joonis lk 27);
- c) korrapärase kõõlkolmnurga kesklõiku on pikendatud ringjooneni (vt joonis lk 28).