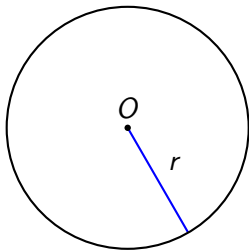


Seminar 3: Ringjoonega seotud geomeetriliste objektide konstrueerimine

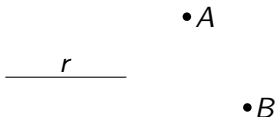
MTMM.00.142 Geomeetria süvendusseminar

27.02.2019

Ringjoon on joon tasandil, mille moodustavad kõik ühest kindlast punktist (ringjoone **keskpunktist** O) võrdsel kaugusel asuvad punktid. Kaugust ringjoone keskpunktist mis tahes ringjoone punktini nimetatakse **raadiuseks** (tähis r). Ringjoone kahte punkti ühendavat lõiku nimetatakse **kõõluks**. Ringjoone keskpunkti läbivat lõiku nimetatakse ringjoone **diameetriks**.



Ülesanne 1. Konstrueerige läbi kahe etteantud punkti etteantud raadiusega ringjoon (vt joonist). Millistel tingimustel on ülesanne lahenduv?



Ülesanne 2. Konstrueerige läbi kolme ühel sirgel mitteasuva punkti ringjoon.

Mitu ringjoont saab joonestada läbi kahe etteantud punkti? Läbi kolme etteantud punkti?

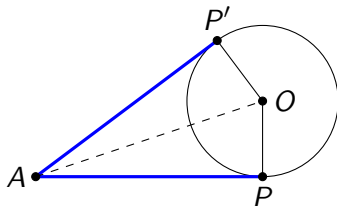
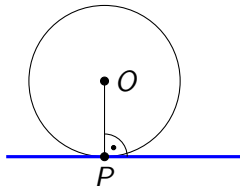
Ülesanne 5. On antud ringjoone kaar. Leidke sirkli ja joonlaua abil ringjoone keskpunkt.

Ringjoone puutuja

Sirget, millel on ringjoonega üksainus ühine punkt, nimetatakse selle ringjoone **puutujaks**.

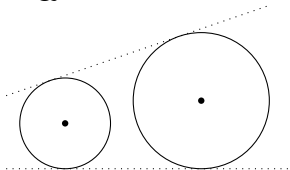
Teoreem. Ringjoone iga punkti läbib üksainus sirge, mis puutub seda ringjoont. See sirge on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega.

Lause. Kahe puutuja lõikepunkt on puutepunktidest võrdsel kaugusel. (Miks?)



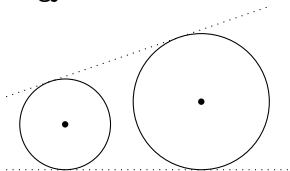
Ülesanne 9. On antud ringjoon ja punkt A , mis ei kuulu ringjoonele. Konstrueerige ringjoone puutuja, mis läbib punkti A .

Ülesanne 10. Joonestage ühine väline puutuja kahele etteantud ringjoonele.



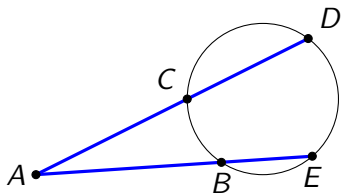
Ülesanne 9. On antud ringjoon ja punkt A , mis ei kuulu ringjoonele. Konstrueerige ringjoone puutuja, mis läbib punkti A .

Ülesanne 10. Joonestage ühine väline puutuja kahe etteantud ringjoonele.



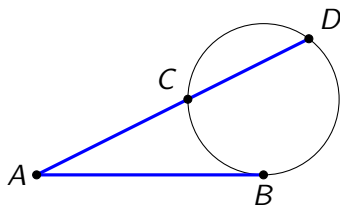
Vihje: Olgu väiksema ja suurema ringjoone keskpunktid vastavalt O_1 ja O_2 , raadiused r_1 ja r_2 . Ringjoone $r_{r_2-r_1}(O_2)$ puutuja läbi punkti O_1 on otsitava puutujaga paralleelne.

Teoreem ringjoone lõikajatest



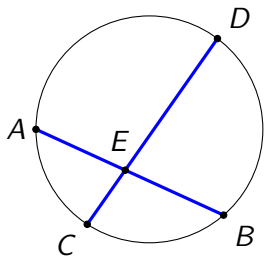
$$|AB| \cdot |AE| = |AC| \cdot |AD|$$

Teoreem jääb kehtima, kui ühest lõikajast saab puutuja.



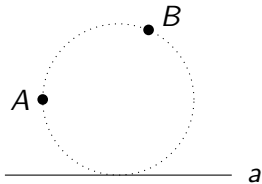
$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AD|$$

Teoreem ringjoone kõõludest



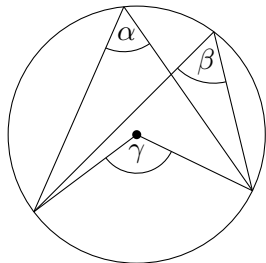
$$|AE| \cdot |EB| = |CE| \cdot |ED|$$

Ülesanne 4. On antud sirge a ja väljaspool seda asuvad punktid A ja B (vt joonist). Konstrueerige ringjoon, mis läbib punkte A ja B ning puutub sirget a . Vaadeldge eraldi juhtumeid, kus lõik AB ja sirge a ei lõiku, lõikuvad. Mitu lahendit on ülesandel? Millest sõltub ülesande lahenduvus? Mis juhtub, kui lõik AB on risti sirgega a ?



Piirdenurk ja kesknurk

- ▶ **Piirdenurk** on nurk kahe kõõlu vahel, millel on ühine otspunkt.
- ▶ Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed.
- ▶ Diameetritele toetuv piirdenurk on täisnurk (Thalese teoreem).
- ▶ **Kesknurk** on nurk ringjoone kahe raadiuse vahel.
- ▶ Piirdenurk võrdub poolega samale kaarele toetuvast kesknurgast.



$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}\gamma$$

Ülesanne 7. Leidke tasapinna selliste punktide hulk, kust lõik AB on nähtav nurga α all.

Ülesanne 12. On antud nurk ja mingi punkt A . Konstrueerige läbi selle punkti sirge, mis eraldab nurgast etteantud übermõõduga kolmnurga. Uurige ülesande lahenduvust.

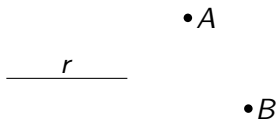
Ülesanne. Tõmmake läbi kahe ringjoone lõikepunkti sirge, mis tekitab lõikumisel nende ringjoontega võrdsed kõõlud.

Ülesanne. Kaks ringjoont puutuvad teineteisega punktis A . Suvaline punkti A läbiv sirge lõikab ühte ringjoont teist korda punktis B ja teist ringjoont punktis C . Tõestage, et nende ringjoonte kõõludele AB ja AC vastavad kesknurgad on võrdsed.

Ülesanne. Kaks ringjoont lõikuvad kahes punktis. Läbi nende ühe lõikepunkti on tõmmatud sirge, mis lõikab ühte ringjoont teist korda punktis A ja teist ringjoont punktis B . Läbi ringjoonte teise lõikepunkti on tõmmatud veel üks sirge, mis lõikab esimest ringjoont punktis C ja teist ringjoont punktis D . Tõestage, et sirged AC ja BD on paralleelsed. (Punktid A , B , C ja D on ringjoonte lõikepunktidest erinevad.)

Kodutöö kolmandast seminarist puudujatele

Ülesanne 1. Konstrueerige läbi kahe etteantud punkti etteantud raadiusega ringjoon (vt joonist). Millistel tingimustel on ülesanne lahenduv?

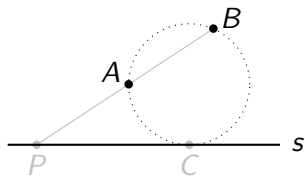


Ülesanne 2. Konstrueerige läbi kolme ühel sirgel mitteasuva punkti ringjoon.

Ülesanne 9. On antud ringjoon ja punkt A , mis ei kuulu ringjoonele. Konstrueerige ringjoone puutuja, mis läbib punkti A .

Kodutöö kolmandast seminarist puudujatele

Ülesanne 4. On antud sirge s ja väljaspool seda asuvad punktid A ja B (vt joonist). Konstrueerige ringjoon, mis läbib punkte A ja B ning puutub sirget s . Lahendage see ülesanne a) juhul kus lõik AB on risti sirgega s , ei lõika seda, b) juhul kus lõik AB on paralleelne sirgega s . Mitu lahendit on ülesandel?



Vihjed: Ülesande a) lahendus tugineb teoreemile lõikajast ja puutujast, mille kohaselt $|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$. 1) Konstrueerige suvalise raadiusega ringjoon läbi punktide A ja B . 2) Joonestage sellele ringjoonele puutuja läbi punkti P (ül 9). 3) Olgu puutepunkt C' , siis $|PC'|$ ongi otsitav pikkus $|PC|$, kandke see pikkus sirgele s . 4) Joonestage ringjoon läbi punktide A , B ja C (ül 2).