

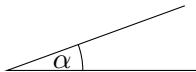
Seminar 4: Hulknurkadega seotud konstruktsioonid

MTMM.00.142 Geomeetria süvendusseminar

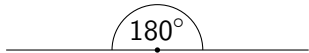
06.03.2019

Nurgad tasandil

Nurgaks nimetatakse tasandi osa, mis paikneb selle tasandi kahe ühise alguspunktiga kiire vahel. Nurka tekitavaid kiiri nimetatakse nurga **haaradeks** ja nende ühist alguspunkti nurga **tipuks**.



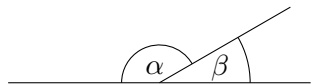
Nurka, mille haarad asuvad ühel sirgel, kuid ei ühti, nimetatakse **sirgnurgaks**. Kraadimõõdu definitsiooni kohaselt nurk suurusega 1° moodustab sirgnurgast $\frac{1}{180}$ osa ehk **sirgnurk on 180°** .



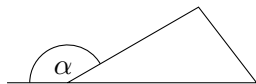
Nurgad tasandil

Kõrvunurgad on kaks nurka, millel on ühine haar ja mille teised haarad moodustavad sirge. Kõrvunurkade summa on 180° .

Kolmnurga nurkade kõrvunurki nimetatakse kolmnurga **välisnurkadeks**.



kõrvunurgad

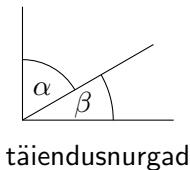
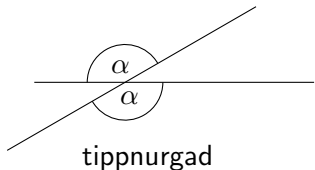


kolmnurga välisnurk

Nurgad tasandil

Tippnurgad on kahe sirge lõikumisel tekkivad võrdsed nurgad, mis on vastassuunaliste haaradega. Tippnurgad on võrdsed.

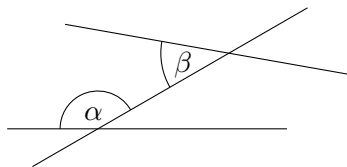
Täiendusnurgad on teravnurgad, millel on ühine haar ja mille teised haarad moodustavad täisnurga. Täiendusnurkade summa on 90° .



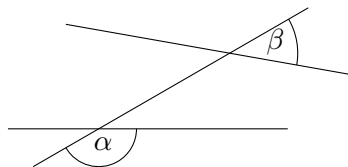
Nurgad tasandil

Nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmandaga:

- ▶ **lähisnurgad** on kaks nurka, mille haarad lõikajal on vastassuunalised ja teised haarad paiknevad samal pool lõikajat



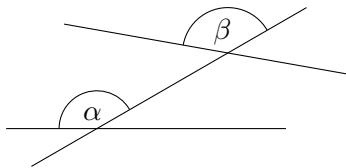
sisemised lähisnurgad



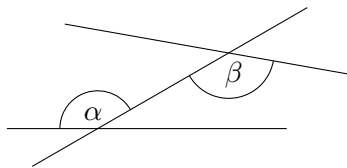
välimised lähisnurgad

Nurgad tasandil

- ▶ **kaasnurgad** on kaks nurka, mille haarad lõikajal on samasuunalised ja teised haarad paiknevad samal pool lõikajat
- ▶ **põiknurgad** on kaks nurka, mille haarad lõikajal on vastassuunalised ja teised haarad paiknevad teine teisel pool lõikajat



kaasnurgad



põiknurgad

Sirgete paralleelsus

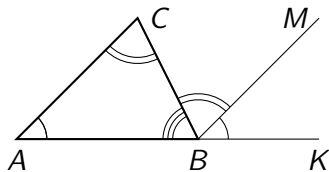
Kaks sirget on paralleelsed parajasti siis, kui nende lõikumisel kolmanda sirgega on täidetud kas või üks järgmistest tingimustest:

- ▶ üks paar kaasnurki on võrdsed;
- ▶ üks paar põiknurki on võrdsed;
- ▶ kahe sisemise lähisnurga summa on 180° ;
- ▶ kahe välimise lähisnurga summa on 180° .

Kolmnurga nurkade summa

Väide. Kolmnurga sisenurkade summa on 180° .

Tõestus. Vaatleme kolmnurka ABC ja tõmbame läbi tipu B sirge, mis on paralleelne sirgega AC . Kehtib võrdus $\angle KBM = \angle BAC$, sest need nurgad on kaasnurgad, mis on tekkinud paralleelsete sirgete CA ja BM lõikumisel lõikajaga AB . Võrdsed on ka nurgad ACB ja CBM , sest need nurgad on võrdsed põiknurgad (siin on lõikajaks CB). Seega



$$\angle CAB + \angle ACB + \angle ABC = \angle MBK + \angle MBC + \angle ABC = 180^\circ.$$

Järeldus. Kolmnurga välisnurk võrdub kahe temaga mitte kõrvuti asetseva sisenurga summaga.

Kolmnurkade klassifitseerimine

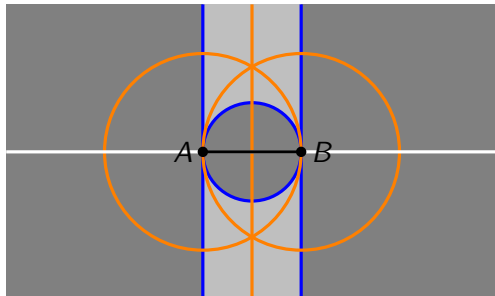
Ülesanne. Lõik AB on joonestatud tasandile. Leidke kõikvõimalikud punkti C asukohad nii, et kolmnurk ABC oleks:

- ▶ täisnurkne,
- ▶ teravnurkne,
- ▶ nürinurkne,
- ▶ võrdhaarne,
- ▶ võrdkülgne.

Kasutage punktide märgistamiseks erinevaid värve.

Kolmnurkade klassifitseerimine

Vastus:



täisnurksed

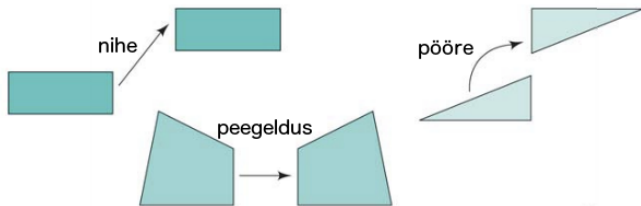
võrdhaarsed

nürinurksed erikülgsed

teravnurksed erikülgsed

Kolmnurkade kongruentsus

Kaks hulknurka on **kongruentsed** ehk **võrdsed**, kui nende vastavad küljed on võrdsed ning vastavate külgede vahelised nurgad on võrdsed.



Miks on kujundite kongruentsus oluline?

Miks on kolmnurksed konstruktsioonid kasutusel hoonete ehitamisel?

Kui võrdleme kahte kolmnurka, kas peame mõõtma kõik kolm külge ja kõik kolm nurka?

Mis on kõige väiksem hulk infot mis on vajalik kahe kolmnurga võrdlemiseks?

Kolmnurkade kongruentsus

Kas järgmised väited on tõesed?

Väide 1. Kui kahel kolmnurgal on üks võrdse pikkusega külg, siis need kolmnurgad on võrdsed.

Väide 2. Kui kahel kolmnurgal on üks ühine nurk, siis need kolmnurgad on võrdsed.

Seega, **kolmnurk ei ole määratud vaid ühe elemendiga.**

Ülesanne. Näidake, et kongruentsuseks ei piisa, kui ainult kaks külge või ainult kaks nurka või kui üks külg ja üks nurk on võrdsed.

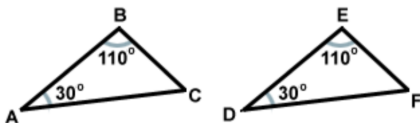
Seega, **kolmnurk ei ole oma mistahes kahe elemendiga üheselt määratud.**

Ülesanne. Milliseid erinevaid kolme-elementilisi kombinatsioone on võimalik kolmnurga elementidest moodustada (KKK, KNK jne)? Millised neist määravad kolmnurga üheselt?

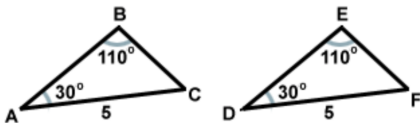
Kolmnurkade kongruentsus

Kas antud kolmnurkad on võrdsed? Milline kolmnurkade võrdsuse tunnus aitab otsustada?

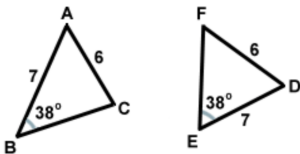
1.



2.

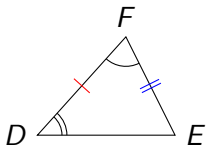
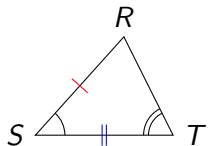


3.

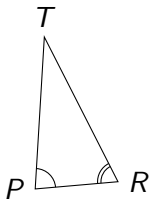
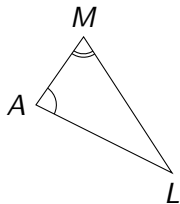


Kolmnurkade kongruentsus

Ülesanne. Selgitage, miks antud kolmnurgad ei ole võrdsed.



Ülesanne. Olgu antud kolmnurgad ALM ja PTR . Nimetage veel üks paar kongruentseid osasid, mis oleksid vajalikud väitmaks, et $\triangle ALM \cong \triangle PTR$.



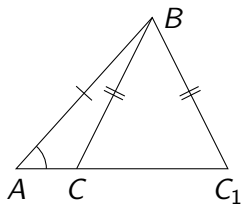
Kolmnurkade kongruentsus

Ülesanne. Abivajaja on mobiiltelefoniga valinud hädaabi numbri, aga ei suuda öelda kohta, kus ta on ja kuhu abi saatma peaks. Kõne registreeriti kahe lähedal asuva masti poolt. Mastides olev elektrooniga suudab ära määrata nurga kahe lõigu vahel – üks mastist helistajani ja teine kahe masti vahel. Kas selle infoga on võimalik ära määrata abivajaja asukoht?

Kolmnurkade võrdsuse tunnused

Kolmnurgad on kongruentsed ehk võrdsed, kui

- ▶ ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega (KKK);
- ▶ ühe kolmnurga kaks külge ja nendevaheline nurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nendevahelise nurgaga (KNK);
- ▶ ühe kolmnurga külg ja selle kaks lähisnurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külje ja selle kahe lähisnurgaga (NKN);
- ▶ ühe kolmnurga kaks külge ja pikema külje vastasnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja pikema külje vastasnurgaga (KKN).



$$\triangle ABC \not\cong \triangle ABC_1$$

Nelinurkade kongruentsus

Kas on olemas võrdsuse tunnust nelinurkadele, mis oleks sarnane kolmnurkade võrdsuse tunnusega KKK?

- ▶ Näiteks, kas KKKK annaks nelinurkade võrdsuse tunnuse?
- ▶ Aga kui kasutada külgedele lisaks ka diagonaali?

Kas on olemas võrdsuse tunnust nelinurkadele, mis oleks sarnane kolmnurkade võrdsuse tunnusega KNK?

- ▶ Näiteks KNKN?
- ▶ Või KNKNK?

Kolmnurkade sarnasuse tunnused

Kolmnurgad on sarnased, kui

- ▶ ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdelised teise kolmnurga kolme küljega (KKK);
- ▶ ühe kolmnurga nurk võrdub teise kolmnurga nurgaga ja selle nurga lähisküljed on võrdelised teise kolmnurga vastavate külgedega (KNK);
- ▶ ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga (NN).

Ülesanne. Leidke kolmnurga ABC nurgad, kui on teada, et nurga A poolitaja jaotab selle kolmnurga kaheks võrdhaarseks kolmnurgaks.

Ülesanne. Kolmnurga kõik kolm külge on erinevad, üks nurkadest on 40° . Selle nurga poolitaja jaotab kolmnurga kaheks kolmnurgaks, millest üks on esialgsega sarnane. Leidke esialgse kolmnurga suurim nurk.

Ülesanne. Kaks kolmnurka pole võrdsed, kuid on omavahel sarnased ja neil on kaks paari vastavalt võrdseid külgi pikkusega 12 ja 18. Leidke kummagi kolmnurga ülejäänud küljed.

Ülesanne. Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B . Punkti A läbiv sirge lõikab antud ringjooni teist korda punktides C ja D . Tõestage, et kõik sellisel viisil tekkivad kolmnurgad BCD on sarnased.

Kolmnurga nurgapoolitaja, kõrgus, külje keskristsirge, mediaan

Kolmnurga kolm nurgapoolitajat lõikuvad ühes ja samas punktis.

Kolmnurga **siseringjoone** keskpunktiks on nurgapoolitajate lõikepunkt ja raadiuseks selle punkti kaugus kolmnurga külgedest.

Kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad ühes ja samas punktis.

Kolmnurga **ümberringjoone** keskpunktiks on külgede keskristsirgete lõikepunkt ja raadiuseks selle punkti kaugus kolmnurga mistahes tipust.

Ülesanne. Millal asub kolmnurga ümberringjoone keskpunkt kolmnurga sees/selle küljel/väljaspool kolmnurka?

Kolmnurga nurgapoolitaja, kõrgus, külje keskristsirge, mediaan

Kolmnurga **kõrguseks** nimetatakse kolmnurga tipust selle vastasküljele või selle pikendusele tõmmatud ristlõiku või selle pikkust.

Kolmnurga kõrgused või nende pikendused lõikuvad ühes punktis. Seda punkti nimetatakse **ortotsentriks**.

Kolmnurga **mediaaniks** nimetatakse kolmnurga tipust selle vastaskülje keskpunkti tõmmatud lõiku.

Kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis. Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani tipust alates suhtes 2:1.

Kolmnurga mediaanide lõikepunkt on kolmnurga **raskuskese**.

Seosed kolmnurga külgede vahel

Kas igast kolmest lõigust saab moodustada kolmnurga?

Milline tingimus peab kehtima kahe lühema külje jaoks, et moodustuks kolmnurk?

Seosed kolmnurga külgede vahel

Kas igast kolmest lõigust saab moodustada kolmnurga?

Milline tingimus peab kehtima kahe lühema külje jaoks, et moodustuks kolmnurk?

Väide: Kahe lühema külje summa peab olema suurem kõige pikemast küljest.

Järelikult, **mistahes kahe külje summa peab olema suurem kolmandast küljest.**

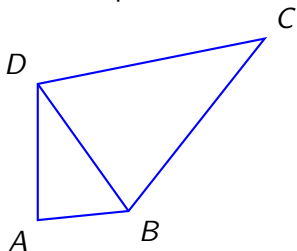
Kas oskate öelda midagi kolmnurga kahe külje vahe kohta? Miks peab kahe külje vahe olema väiksem kui kolmas külg?

Seosed kolmnurga külgede ja nurkade vahel

Igas kolmnurgas on pikema külje vastas suurem nurk. Ja vastupidi, suurema nurga vastas on pikem külg.

Ülesanne. Kolmnurga kaks külge on 6 cm ja 10 cm pikad. Millises vahemikus saab olla kolmanda külje pikkus?

Ülesanne. Olgu antud, et $\angle CDB = 65^\circ$, $\angle CBD = 72^\circ$, $\angle ADB = 34^\circ$ ja $\angle A = 87^\circ$. Reastage küljed pikkuse järjekorras alustades pikimast.



6. märtsi seminari ülesanded (ülesannete kogu lk 9)

Meelis	8d,7a	Aljona G	8m,8l
Pille	8e,7b	Artur –	8n,8l
Salme	8f,13	Kelina	8n,8k
Rainer L	8g,12	Kristel	8o,8j
Kristo –	8g,11	Rainer B	9,8i
Indrek	8h,10	Paul-Mark	10,8h
Juudit	8i,9	Laura	11,8g
Martin	8j,8o	Sandra	12,8f
Rangel –	8j,8n	Aljona K	13,8e
Teele	8k,8m	Carolin	8d,3g
Anette	8l,3b		

Kodutöö neljandast seminarist puudujatele

- ▶ Konstrueerige kolmnurk, kui on antud kolmnurga külg a ja selle lähisnurk β ning ülejäänud kahe külje summa $b + c$. Millistel tingimustel on ülesanne lahenduv?
- ▶ Konstrueerige võrdhaarne kolmnurk, kui on antud kolmnurga haar b ja alusele a joonestatud kõrgus. Millistel tingimustel on ülesanne lahenduv?
- ▶ Konstrueerige kolmnurk, kui on antud kolmnurga külg a ja sellele küljele joonestatud mediaan ning kolmnurga ümberringjoone raadius R . Millistel tingimustel on ülesanne lahenduv?