

Loeng/seminar 5: Tõestused geomeetrias
(kolmnurkade kongruentsus, sirgete
konkurentsus, punktide kollineaarsus)

MTMM.00.142 Geomeetria süvendusseminar

13.03.2019

Võrdhaarse kolmnurga üks tunnus

Kolmnurka nimetatakse **võrdhaarseks**, kui tal on kaks võrdset külge.

Väide. Olgu kolmnurk ABC võrdhaarne, st $|AB| = |BC|$, siis tippude A ja C juures olevad nurgad on võrdsed.

Tõestus. Olgu K tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt alusel AC . Näitame, et $\triangle ABK = \triangle CBK$. Tõepoolest, $|AB| = |CB|$, külge BK on kolmnurkadel ühine ning $\angle BKA = \angle BKC = 90^\circ$, seega KKN tunnuse põhjal on need kolmnurgad võrdsed. Võrdsete kolmnurkade vastavad elemendid on võrdsed, seega $\angle A = \angle C$.

- Kas kehtib ka vastupidine väide: kui kolmnurgas on kaks võrdset nurka, siis on tegemist võrdhaarse kolmnurgaga?

Kolmnurkade uurimine

Joonestage kolmnurk, mille iga külg on erineva pikkusega. Ühest ja samast tipust joonestage kolmnurgale kõrgus, nurgapoolitaja ja mediaan.

- ▶ Kas kõik need kolm joont on erinevad?
- ▶ Kas selline väide on õige kõikide kolmnurkade jaoks?
- ▶ (Kas on võimalik, et kaks nendest lõikudest ühtivad ja kolmas on erinev?)
- ▶ Kas on võimalik, et kõik kolm lõiku ühtivad?

Kolmnurkade uurimine

Väide. Võrdhaarses kolmnurgas on tipunurga poolitaja ühtlasi ka kõrgus ja mediaan.

Tõestus. Olgu $\angle B$ võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurk ning K tipunurga poolitaja ja aluse lõikepunkt. Näitame, et siis $\triangle ABK = \triangle CBK$. Tõepoolest, $|AB| = |CB|$, külge BK on neil kolmnurkadel ühine ning $\angle ABK = \angle CBK$, mistõttu KNK tunnuse põhjal on need kolmnurgad võrdsed. Et $\angle BKA = \angle BKC$ ning $\angle BKA + \angle BKC = 180^\circ$, siis $\angle BKA = \angle BKC = 90^\circ$, mis tähendab, et BK on kõrgus. Kuna ka $|AK| = |CK|$, siis on BK lisaks veel mediaan.

- ▶ Kas on veel kolmnurki, kus nurgapoolitaja, kõrgus ja mediaan ühtivad?
- ▶ Kas on võimalik, et ainult kaks nendest kolmest lõigust ühtivad?

Kolmnurkade uurimine

Kolmnurga nurgapoolitajad lõikuvad ühes punktis. Sama kehtib kolmnurga mediaanide, kõrguste ja keskristsirgete kohta.

- ▶ Kas on kolmnurka, kus kõik need lõikepunktid (või mõned nendest) ühtivad?
- ▶ Kas mediaan jagab ka kolmnurga pindala kaheks?
- ▶ Kas kolmnurgas on veel teisigi jooni, mille lõikumispunkt jagab nad suhtes 2:1?

Geomeetrilised tõestused

Loeme tõestatuks järgmised tulemused:

- ▶ **Kolmnurga sisenurkade summa** on 180° .
- ▶ **Kolmnurkade võrdsuse tunnused** KKK, KNK, NKN, KKN (kaks külge ja pikema külje vastasnurk).
- ▶ **Kolmnurkade sarnasuse tunnused** KKK, KNK, NN.
- ▶ **Sirgete paralleelsuse tunnused.** Kaks sirget on paralleelsed parajasti siis, kui nende lõikumisel kolmanda sirgega on täidetud üks järgmistest tingimustest:
 - ▶ üks paar kaasnurki on võrdsed;
 - ▶ üks paar põiknurki on võrdsed;
 - ▶ kahe sisemise lähisnurga summa on 180° ;
 - ▶ kahe välimise lähisnurga summa on 180° .

Kahte või enamat sirget nimetatakse **konkurentseteks**, kui nad lõikuvad ühes punktis.

Ülesanne 10. Tõestage, et kolmnurga kolm kõrgust lõikuvad ühes punktis.

Ülesanne 11. Tõestage, et kolmnurga külgede keskristsirged (nurgapoolitajad) lõikuvad ühes punktis.

Ülesanne 12. Tõestage, et kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis ja see lõikepunkt jaotab iga mediaani suhtes 2:1 (tipust alates).

Ülesanne 13. Tõestage, et kolmnurga ümberringjoone keskpunkt, mediaanide lõikepunkt ja kõrguste lõikepunkt asetsevad ühel sirgel (seda sirget nimetatakse Euleri sirgeks).

Punkte nimetatakse **kollineaarseteks**, kui nad asetsevad ühel ja samal sirgel.

Kahte või enamat sirget nimetatakse **konkurentseteks**, kui nad lõikuvad ühes punktis.

Ülesanne 10. Tõestage, et kolmnurga kolm kõrgust lõikuvad ühes punktis (vt Sharõgin lk 119, 168).

Ülesanne 11. Tõestage, et kolmnurga külgede keskristsirged (nurgapoolitajad) lõikuvad ühes punktis (vt Sharõgin lk 167, 168).

Ülesanne 12. Tõestage, et kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis ja see lõikepunkt jaotab iga mediaani suhtes 2:1 (tipust alates) (vt Sharõgin lk 170, 224–225).

Ülesanne 13. Tõestage, et kolmnurga ümberringjoone keskpunkt, mediaanide lõikepunkt ja kõrguste lõikepunkt asetsevad ühel sirgel (seda sirget nimetatakse Euleri sirgeks) (vt Sharõgin lk 169).

Punkte nimetatakse **kollineaarseteks**, kui nad asetsevad ühel ja samal sirgel.

Punktide **geomeetriliseks kohaks** ehk **lookuseks** nimetatakse teatavat tingimust rahuldavate punktide hulka tasandil. Näiteks ringjoon on tasandi selliste punktide geomeetiline koht, mis asuvad etteantud punktist võrdsel kaugusel.

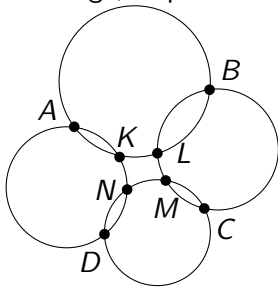
Ülesanne 14. Antud on nürinurkne kolmnurk. Leidke tasandi nende punktide geomeetiline koht, millest see kolmnurk on näha täisnurga all.

Ülesanne 15. Tasandil on antud punktid A ja K . Leidke tasandi selliste punktide B geomeetiline koht, mille jaoks leidub niisugune punkt C , et kolmnurgas ABC nurk BAC on täisnurk ja AK on selle kolmnurga mediaan.

Punkte nimetatakse **kontsüklilisteks**, kui nad asetsevad ühel ja samal ringjoonel. Hulknurka nimetatakse **tsükliliseks**, kui tema tipud asetsevad mingil ringjoonel.

Ülesanne 18. On tõmmatud kaks ringjoone diameetrit. Tõestage, et kui võtta nende diameetrite otspunktid nelinurga tippudeks, siis selle nelinurga vastasküljed on võrdsed.

Ülesanne 19. Neli ringjoont lõikuvad nii, nagu näidatud joonisel. On teada, et punktid A , B , C ja D asuvad ühel ringjoonel. Tõestage, et punktid K , L , M ja N asuvad ühel ringjoonel.



Ülesanne 20. Kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt on punktis J ning see ringjoon puutub külgi AC ja BC vastavalt punktides B_1 ja A_1 . Nurga B poolitaja lõikab sirget A_1B_1 punktis K . Tõestage, et punktid A , J , B_1 ja K asetsevad ühel ringjoonel. Kui suur on nurk AKB ?

Ülesanne 21. Kõõlnelinurga üks külg on vastava ringjoone diameeter. Tõestage, et selle külje lähiskülgede projektsioonid neljandale küljele (või seda sisaldavale sirgele) on võrdsed.

Kodutöö viiendast seminarist puudujatele

- ▶ Tõestage, et kui nelinurga kõik küljed on võrdsed ja kõik nurgad on võrdsed, siis nelinurga diagonaalid on võrdsed ja teineteisega risti.

Tõestuses võite kasutada ainult kolmurkade võrdsuse ja sarnasuse tunnuseid ning sirgete paralleelsuse tunnuseid. Teisi tulemusi ilma tõestuseta kasutada ei tohi. Oluline tähistuslik kokkulepe: $\triangle ABC = \triangle DEF$ korral vastab tipule A tipp D , tipule B tipp E jne, st vastavad elemendid on võimalik välja lugeda juba kolmnurga tähistest.

- ▶ Ringjoonel on antud punktid A ja B . Kaks punkti C ja D liiguvad mööda ringjoont nii, et kõõlu CD pikkus on jääv. Leidke sirgete AC ja BD lõikepunktide geomeetriline koht (kõikvõimalikud lõikepunkti asukohad).