

Seminar 7: Hulktahukad.
Prisma, püramiid, tüvipüramiid

27.03.2019

Hulktahukad

Hulktahukaks ehk **polüeedriks** nimetatakse hulknurkadega piiratud geomeetrilist keha. Räägitakse hulktahuka **tahkudest**, **servadest**, **tippudest**, **diagonaalidest** (erinevatel tahkudel paiknevaid tippe ühendavad lõigud).

Regulaarseks ehk **korrapäraseks hulktahukaks** nimetatakse hulktahukat, mille kõik tahud on kongruentsed korrapärased hulknurgad ja mille igast tipust lähtub võrdne arv servi. Regulaarsetel hulktahukatel on võrdsed kõik tasanurgad, kõik kahetahulised nurgad ja kõik servad.

Korrapäraseid hulktahukad ehk platoonilised kehad

Kuna kumera mitmetahulise nurga tasanurkade summa on väiksem kui 360° , peab hulknurga iga tipu juures olevate tasanurkade summa olema väiksem kui 360° .

- ▶ Olgu korrapärase hulktahuka tahkudeks korrapäraseid (s.t. võrdkülgseid) kolmnurgad. Mitu sellist tahku saaks ühe tipu juures kohtuda?
- ▶ Kas leidub korrapäraseid hulktahukaid, mille tahkudeks on korrapäraseid nelinurgad ehk ruudud?
- ▶ Kas leidub korrapäraseid hulktahukaid, mille tahkudeks on korrapäraseid viisnurgad? kuusnurgad?

Korrapärased hulktahukad ehk platoonilised kehad

Regulaarne tetraeeder (kr *tettares* – neli, *hedra* – alus, pind) – tahkudeks 4 kongruentset võrdkülgset kolmnurka, iga tipu juures 3 tasanurka.

Regulaarne oktaeeder (kr *okt* – kaheksa) – tahkudeks 8 kongruentset võrdkülgset kolmnurka, iga tipu juures 4 tasanurka

Regulaarne ikosaeeder (kr *eikosi* – kakskümmend) – tahkudeks 20 kongruentset võrdkülgset kolmnurka, iga tipu juures 5 tasanurka

Kuup ehk **regulaarne heksaeeder** (kr *hex* – kuus) – tahkudeks 6 ruutu, iga tipu juures 3 tasanurka

Regulaarne dodekaeeder (kr *dodeka* – kaksteist) – tahkudeks 12 kongruentset võrdkülgset viisnurka, iga tipu juures 3 tasanurka



Euleri valem

Kumera hulktahuka tahkude, servade ja tippude arvu vahel kehtib Euleri valem

$$\text{tippude arv} - \text{servade arv} + \text{tahkude arv} = 2$$

ehk

$$v - e + f = 2,$$

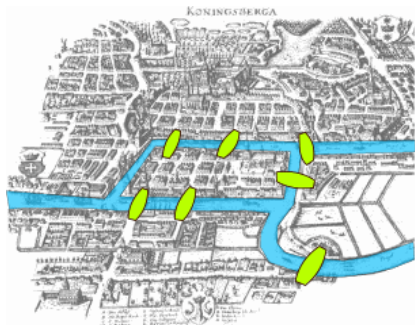
kus v on tippude arv (*vertices*), e on servade arv (*edges*) ja f on tahkude arv (*faces*).

Euleri valem

$$v - e + f = 2$$

1. Millisel hulktahukal on 4 tippu ja 6 serva? Kas on võimalik joonistada veel teine hulktahukas, millel on erinev arv tahkusi, kuid ikkagi 4 tippu ja 6 serva?
2. Millisel hulktahukal on 6 tippu ja 12 serva? Kas on võimalik, et on olemas erinev hulktahukas küll erineva arvu tahkudega, kuid samuti 6 tipu ja 12 servaga?
3. Kui hulktahukal on 8 tahku ja 12 tippu, siis mitu serva tal on?
4. Kui hulktahukal on 7 tahku ja 12 serva, siis mitu tippu tal on?
5. Kui hulktahukal on 6 tahku, siis millised võimalikud kombinatsioonid on olemas tema tippude ja servade jaoks?

Leonhard Euler (1707–1783)

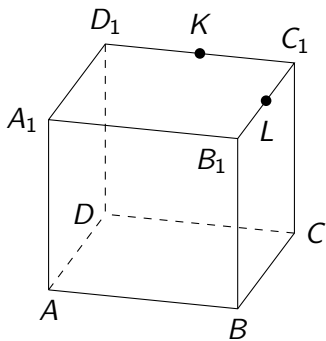


$f(x)$ \sin, \cos, \tan $e \approx 2,71828$ Σ $i^2 = -1$ π

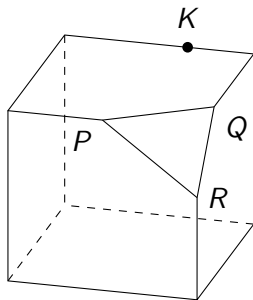
$$2^{31} - 1 \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

Hulktahuka ja tasandi lõige

- ▶ Joonestage lõiketase läbi kuubi servade keskpunktide K ja L ning tipu A (vt joonis 1).
- ▶ Joonestage kuubile lõiketase läbi punkti K paralleelselt tasandiga PQR (vt joonis 2).



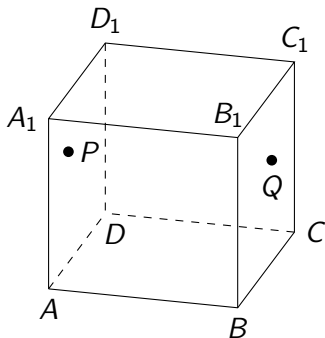
Joonis 1



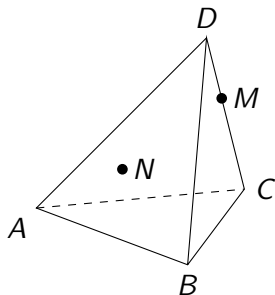
Joonis 2

Hulktahuka ja tasandi lõige

- ▶ Konstrueerige kuubile lõige läbi punktide D_1 , P ja Q (P asub tahul ADD_1A_1 , Q asub tahul DCC_1D_1) (vt joonis 4).
- ▶ Konstrueerige lõige tasandiga, mis on paralleelne sirgega AC , läbib punkti M ja tahul ABD asuvat punkti N (vt joonis 6).



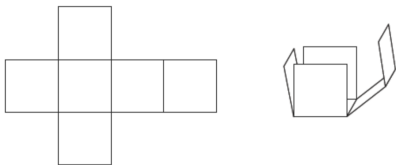
Joonis 4



Joonis 6

Pinnalaotus

Pinnalaotus on kahe-dimensionaalne joonis, mille saab välja lõigata ning voltida kolme-dimensionaalseks kujundiks.

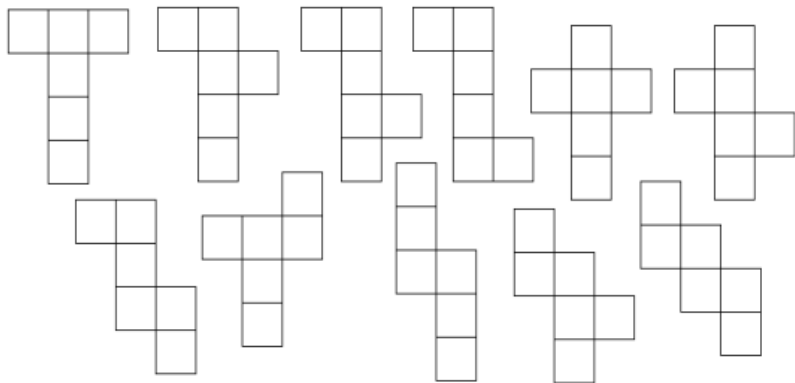


- ▶ Kui palju on erinevaid kuubi pinnalaotusi?

<http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3544>

Pinnalaotus

Kuubil on 11 erinevat pinnalaotust



Pinnalaotus

- ▶ Olgu meil vaja valmistada kartongist kuupe servaga 3 cm. Mitu sellist pinnalaotust on võimalik mahutada $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ kartongipaberile (võib kasutada erinevaid pinnalaotusi)?
- ▶ Joonista harilikule A4 paberile pinnalaotus, mis võimaldab kokku panna suurima ruumalaga kuubi. Millist pinnalaotust sa kasutad? Mis on sellise kuubi ruumala?

Kodutöö seitsmendast seminarist puudujatele

Lähtudes Euleri valemist $v - e + f = 2$ vastake järgmistele küsimustele:

- ▶ Kui hulktahukal on 6 tippu ja 12 serva, siis mitu tahku tal on? Joonistage tingimustele vastav hulktahukas.
- ▶ Kui hulktahukal on 5 tahku, siis millised võimalikud kombinatsioonid on olemas tema tippude ja servade jaoks. Leidke kõik võimalused ning joonistage vastavad hulktahukad. Põhjendage, et rohkem võimalusi ei ole.

Konstrueerige hulktahuka ja tasandi lõiked (slaidid 8 ja 9).