

Seminar 8: Prisma, püramiid, tüvipüramiid

03.04.2019

Prisma

Prismaks nimetatakse hulktahukat, mille kaks tahku on võrdsete ja vastavalt paralleelsete külgedega hulknurgad ning kõik ülejäänud tahud on rööpkülilikud.

Prisma põhitahud on kongruentsed hulknurgad ning asuvad paralleelsetel tasanditel, prisma külgservad on kõik võrdsed. Prisma ristlõikeks nimetatakse hulknurka, mis tekib, kui prismat lõigata külgservadega ristuva tasandiga.

Prismasid liigitatakse põhitahu järgi **kolmnurkseteks**, **nelinurkseteks** jne; **püst- ja kaldprismadeks**, vastavalt sellele, kas külgservad on põhjadega risti või kaldu; **korrapäraseks**, kui põhitahud on korrapärased hulknurgad.

Prisma

Rööptahukas on prisma, mille põhjadeks on rööpkülilikud.

Rööptahukal on järgmised omadused:

- 1) rööptahuka vastastahud on kongruentsed ja paralleelsed,
- 2) rööptahuka kõik neli diagonaali lõikuvad ühes punktis, mis poolitab iga diagonaali.

Risttahukas on püströöptahukas, mille põhjad on ristkülilikud.

Kuup on risttahukas, mille kõik servad on võrdsed.

Püramiid

Püramiid on hulktahukas, mille üks tahk on hulknurk ning kõik ülejäänud tahud ühise tipuga kolmnurgad.

Püramiidi **kõrguseks** nimetatakse püramiidi tipu kaugust põhja tasandist. Püramiidi tippu ja põhja mingit diagonaali läbivat tasandit nimetatakse püramiidi **diagonaaltasandiks**, selle ühisosa püramiidiga aga püramiidi **diagonaallõikeks**.

Püramiide liigitatakse põhiservade arvu järgi **kolmnurkseteks**, **nelinurkseteks** jne. Kolmnurkset püramiidi nimetatakse ka **tetraedriks**. Püramiidi nimetatakse **korrapäraseks**, kui tema põhjaks on korrapärane hulknurk ning püramiidi kõrguse aluspunkt ühtib põhja keskpunktiga. Kui üks nendest tingimustest on täitmata, on tegemist **mittekorrapärase püramiidiga**. Korrapärase püramiidi külgtahu kõrgust nimetatakse püramiidi **apoteemiks**. Püramiidi põhja ja põhjaga paralleelse lõike vahelist osa nimetatakse **tüvipüramiidiks**.

Prisma ja püramiid

1. Missugusel prismal on servade arv tippude arvust 7 võrra suurem?
2. Missugusel prismal on servade arv tahkude arvust 16 võrra suurem?
3. Mitu serva on püramiidil, millel on 7 tahku?
4. Missugusel püramiidil on servade arv tahkude arvust 10 võrra suurem?
5. Kolmnurkne püramiid on lõigatud tasapinnaga, millel asetseb üks püramiidi serv. Missugusteks kehadeks tükeldub püramiid?
6. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 25 cm ja kõrgus on 20 cm. Kui suur on külgserva kaldenurk ja külgtahu kaldenurk põhja suhtes?

Prisma ja püramiid

6. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 25 cm ja kõrgus on 20 cm. Kui suur on külgserva kaldenurk ja külgtahu kaldenurk põhja suhtes?
7. Kui pikk peab olema kuubi serv, et ta pindala ja ruumala arväärtused oleksid võrdsed?
8. Missuguse osa kuubi ruumalast moodustab püramiidi ruumala, kui püramiidi põhjaks on kuubi üks tahk ja püramiidi tipuks on kuubi keskpunkt?
9. Püramiid on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga, mille kaugus tipust on $\frac{2}{3}$ püramiidi kõrgusest. Missuguse osa püramiidi ruumalast moodustab tekkinud tüvipüramiidi ruumala?

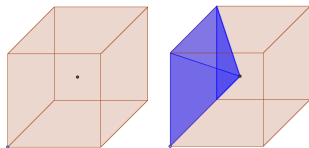
Prisma ja püramiid

Vastused:

1. 7-nurksel prisma;
2. 9-nurksel prisma;
3. 12 serva;
4. 11-nurksel püramiidil;
5. kaheks kolmnurkseks püramiidiks;
6. $\arctan(4\sqrt{2}/5) \approx 48,5^\circ$,
 $\arctan(8/5) \approx 58^\circ$;

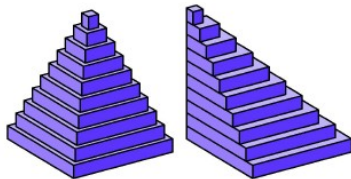
7. 6;

8. $1/6$;



9. $1 - (2/3)^3 = 19/27$.

Püramiidi ruumala



Olgu püramiidi põhja pindala S_p ning kõrgus h . Lõikame püramiidi põhjaga paralleelsete tasanditega nii, et tekib n võrdse paksusega kihti. Iga lõige on põhjaga sarnane hulknurk, mille pindala on $(k/n)^2 S_p$. Lähendame iga kihti prismaga, mille põhja pindala on $(k/n)^2 S_p$, kõrgus h/n . Summeerides nende prismade ruumalad, saame

$$V_{\text{püramiid}} \approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 S_p \cdot \frac{h}{n} = \frac{S_p \cdot h}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Püramiidi ruumala

$$V \approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 S_p \cdot \frac{h}{n} = \frac{S_p \cdot h}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

Matemaatilise induktsiooni abil saab näidata, et

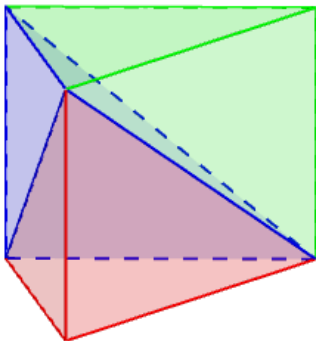
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

seega

$$V \approx \frac{S_p \cdot h \cdot n(n+1)(2n+1)}{n^3 \cdot 6} = \frac{S_p \cdot h}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{S_p \cdot h}{3}.$$

Püramiidi ruumala

Olgu antud kolmnurkne prisma. Lõikame seda nii nagu näidatud joonisel.



- ▶ Kas sinise ja punase püramiidi ruumalad on võrdsed? Miks?
- ▶ Kas sinise ja rohelise püramiidi ruumalad on võrdsed? Miks?
- ▶ Kas antud tulemused kehtivad ka kolmnurkse kaldprisma korral?

Ülesanded

- Püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatedid on 3 cm ja 4 cm. Kõik külgservad moodustavad püramiidi põhjaga 45° -se nurga. Arvutada püramiidi ruumala.
- Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haarad on 39 cm ja alus 30 cm. Kõik kahetahulised nurgad põhja juures on 45° . Arvutada püramiidi ruumala.
- Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 2 cm ja 6 cm. Külgtahk moodustab suurema põhjaga 60° -se nurga. Arvutada tüvipüramiidi kõrgus.
- Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi diagonaallõike pindala on $20\sqrt{2}$ cm² ning põhiservad on 8 cm ja 2 cm. Arvutada tüvipüramiidi kõrgus.
- Kuupi kujundatud püramiidi tippudeks on kuubi ülemise põhja keskpunkt ja alumise põhja külgede keskpunktid. Avaldada püramiidi külgpindala kuubi serva a kaudu.
- Nelinurkse püramiidi põhiserv on a , püramiidi kõrgus h . Püramiidi on kujundatud kuup nii, et neli tema tippu asuvad põhjal, neli külgtahkudel, kuubi neli serva on paralleelsed põhja diagonaalidega. Avaldada kuubi serv.

Vastused

6. 5 cm^3 (Vihje: näidake, et kõrguse aluspunkt asub põhja ümberringjoone keskpunktis);
7. $1,8 \text{ dm}^3$ (Vihje: näidake, et kõrguse aluspunkt asub põhja siseringjoone keskpunktis);
9. 2 cm (Vihje: leidke esmalt püramiidi kõrgus 3 cm, püramiidide joonelementide vaheline sarnasustegur on $1/3$, seega äralõigatud püramiidi kõrgus on 1 cm);
10. 4 cm;
14. $1,5a^2$;
15. $\frac{ah}{a + \sqrt{2}h}$.

Kodutöö kaheksandast seminarist puudujatele

Ülesanded 6, 9, 14 ja 15 ülesannete kogust lk 15.