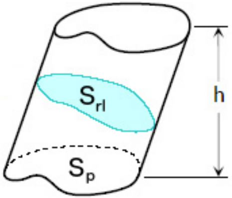
Seminar 9: Pöördkehad (silinder, koonus, kera)

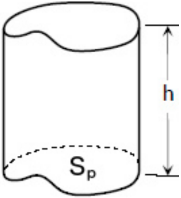
10.04.2019

Silinder (üldine definitsioon)

Silindriliseks pinnaks nimetatakse pinda, mis tekib sirge liikumisel ruumis nii, et ta jääb iseendaga paralleelseks ning läbib antud tasandilist kõverat. Sirget nimetatakse silindrilise pinna **moodustajaks**, tasandilist kõverat aga **juhtjooneks**. Kui silindrilise pinna juhtjoon on kinnine kõver, siis silindrilise pinna lõikamisel kahe paralleelse tasandiga tekib nende vahel keha, mida nimetatakse **silindriks**. Silindrit nimetatakse kas **püst- või kaldsilindriks** vastavalt sellele, kas moodustaja on põhjaga risti või kaldu.



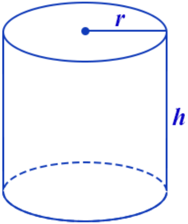
kaldsilinder



püstsilinder

Silinder

Püstsilindrit nimetatakse **ringsilindriks**, kui tema põhjaks on ring. Sellist silindrit võib vaadelda ka kui keha, mis tekib ristküliku pöörlemisel ümber oma ühe külje. Külge, ümber mille toimub pöörlemine, nimetatakse silindri **teljeks**.



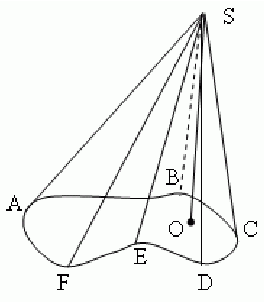
$$S_p = \pi r^2$$

$$S_k = 2\pi r \cdot h$$

$$V = S_p \cdot h$$

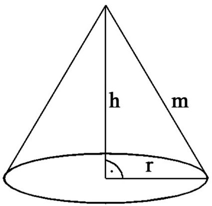
Koonus (üldine definitsioon)

Kooniliseks pinnaks nimetatakse pinda, mis tekib sirge liikumisel ruumis nii, et ta üks punkt jääb paigale ja sirge läbib antud tasandilist kõverat. Liikuvat sirget nimetatakse koonuse **moodustajaks**, tasandilist kõverat aga **juhtjooneks** ja paigale jäävat punkti koonilise pinna **tipuks**. Kui koonilise pinna juhtjoon on kinnine kõver, siis saab rääkida **koonusest** – keha, mida piiravad ühel pool tippu asuv koonilise pinna osa ja tasand, mis lõikab kõiki moodustajaid ühel ja samal pool tippu.



Koonus

Koonuse tipust põhjani tõmmatud ristlõiku nimetatakse koonuse **kõrguseks**. Koonust nimetatakse **püstringkoonuseks**, kui tema põhi on ring ja kõrguse aluspunkt on põhja keskpunktis. Püstringkoonuse kõrgust nimetatakse ka tema **teljeks**. Sellist koonust võib vaadelda ka kui keha, mis tekib täisnurkse kolmnurga pöörlemisel ümber oma ühe kaateti. Koonuse põhja ja põhjaga paralleelse lõike vahelist osa nimetatakse **tüvikoonuseks**.



$$S_p = \pi r^2$$

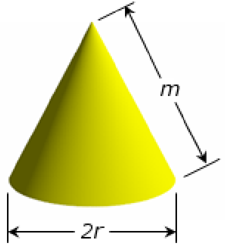
$$S_k = \pi r m$$

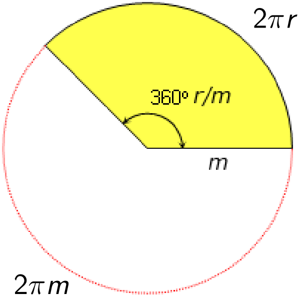
$$V = \frac{1}{3} S_p h$$

Koonuse külgpindala

Olgu koonuse põhja raadius r ja koonuse moodustaja m, siis põhja ümbermõõt on $2\pi r$. Vaatleme ringi raadiusega m, selle ümbermõõt on $2\pi m$. Koonuse külgpindala moodustab vaadeldava ringi pindalast r/m osa, seega koonuse külgpindala on

$$S_k = \frac{r}{m} \cdot \pi m^2 = \pi rm.$$





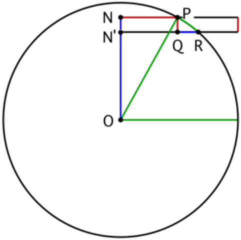
Kera

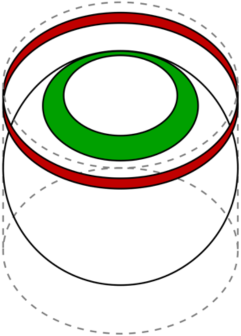
Sfääriks nimetatakse punktihulka, mille iga punkti kaugus ühest kindlast punktist on jääv. Seda kindlat punkti nimetatakse sfääri **keskpunktiks** ja sfääri mistahes punkti kaugust sfääri keskpunktist sfääri **raadiuseks**. Sfäär on pind.

Keraks nimetatakse sfääri ja sfääriga piiratud ruumi osa. Kera iga tasandiline lõige on ring. Kui lõige läbib kera keskpunkti, siis nimetatakse lõiget **suurringiks**. Kera pindala võrdub nelja suurringi pindalaga, $S = 4\pi r^2$, ja ühtlasi ka teda ümbritseva silindri külgpindalaga. Kera ruumala võrdub kera pindala ja ühe kolmandiku raadiuse korrutisega, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Kera pindala = silindri külgpindala

Näitame, et punase silindrilise pinna ja vastava rohelise kera vöö pindalad on võrdsed.
Punase pinna pindala on $2\pi|OP||PQ|$.
Kera vöö pindala on ligikaudu vastava tüvikoonuse külgpindala, mille moodustajaks on lõik PR (kaare PR pikkus on ligikaudu lõigu PR pikkus). Tüvikoonuse külgpindala on $\pi(|NP| + |N'R|)|PR|$.





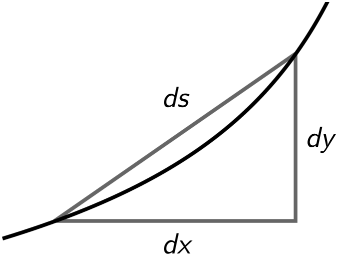
Ligikaudu kehtib $PR \perp OP$, seega $\triangle PQR \sim \triangle PNO$, millest $|OP||PQ| \approx |NP||PR|$. Ligikaudu kehtib ka $PR \perp OR$, seega $\triangle PQR \sim \triangle RN'O$ ning $|OR||PQ| \approx |N'R||PR|$. Kokkuvõttes $\pi(|NP| + |N'R|)|PR| \approx 2\pi|OP||PQ|$.

Kera pindala integraali abil

Vaatleme ülemist poolringi $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, mis pöörleb ümber x-telje. Argumendi x muudule dx vastav kaarepikkus ds arvutatakse kui

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx$$

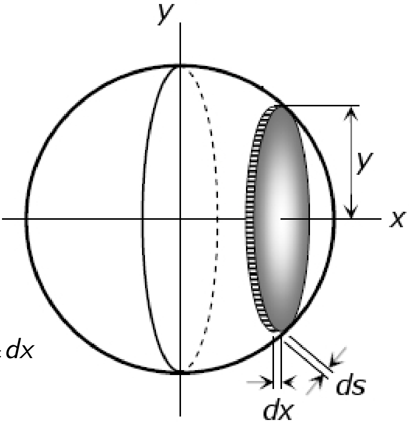


Kera pindala integraali abil

$$S_{kera} = \int_{-r}^{r} 2\pi y \, ds = \int_{-r}^{r} 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \, x\Big|_{-r}^{r} = 4\pi r^2$$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$,
$x \in [-r, r]$

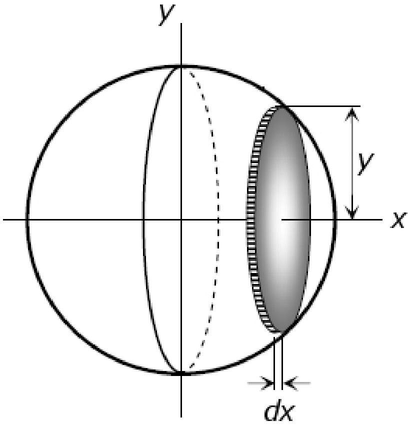
$$ds = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$



Kera ruumala integraali abil

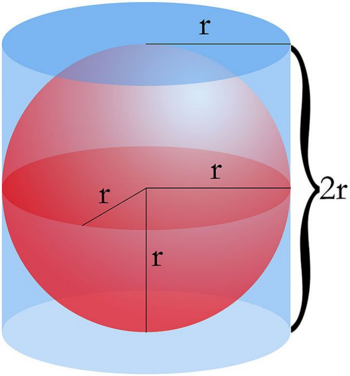
$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx = \pi r^2\,x\Big|_{-r}^{r} - \pi\frac{x^3}{3}\Big|_{-r}^{r} =$$
$$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$,
$x \in [-r, r]$



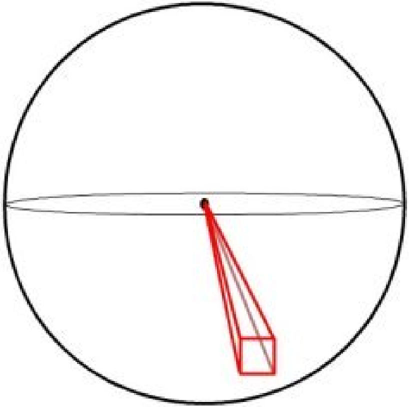
Kera pindala

$$S_{kera} = 4\pi r^2 = 2\pi r \cdot 2r = S_{k,silinder}$$



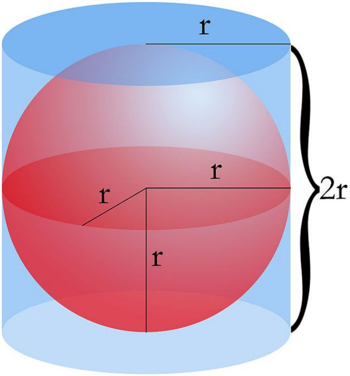
Kera ruumala

$$V_{kera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}(4\pi r^2)r = \frac{1}{3} \cdot S_{kera} \cdot r$$

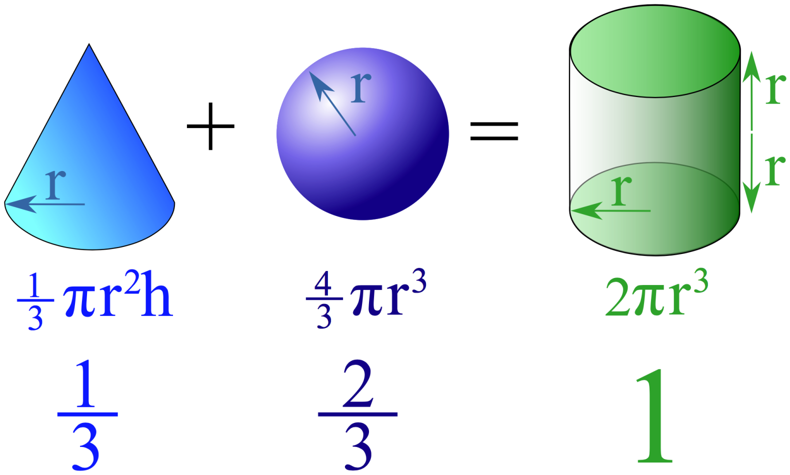


Kera ruumala

$$V_{kera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}(\pi r^2) \cdot 2r = \frac{2}{3} \cdot V_{silinder}$$



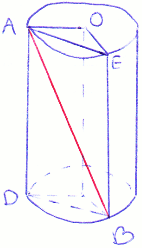
Koonuse, kera ja silindri ruumalad



Ülesanded

Lahendame ülesanded 1, 2, 7, 8, 16, 17 ja 18 ülesannete kogust lk 17–18.

1.



Antud:

$h = 6\,cm$

$AB = 10\,cm$

$d(AB, h) = 3\,cm$

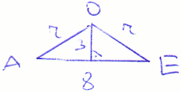
Leida:

$r = ?$

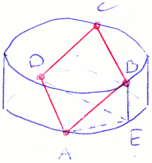
Lahendus:

$|AE| = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ cm$

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \underline{\underline{5\,cm}}$



2.



Antud:

$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$

$|BE| = 2m$

$|DE| = 2 \cdot 7m = 14m$

Leida

$a = |AB|$

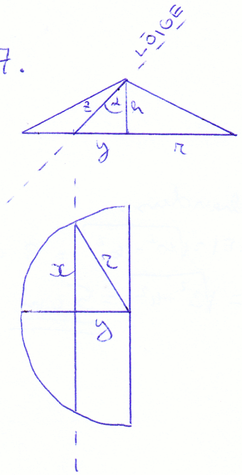
Lahendus:

Olgu $x = |AE|$, siis

$$\begin{cases} x^2 + 2^2 = a^2 \\ x^2 + a^2 = 14^2 \end{cases}$$

$a = \underline{\underline{10\ m}}$

7.



Antud:

$\alpha = 45°$

$h = 2\,cm$

$r = 4\,cm$

Leida:

$S_{LÕIGE}$

Lahendus:

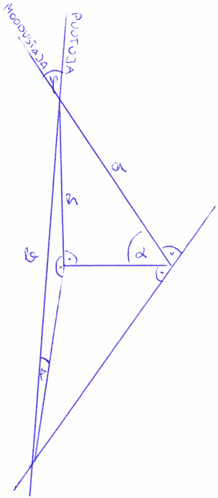
$y = 2\,cm$

$x = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}\,cm$

$z = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\,cm$

$S_{LÕIGE} = \dfrac{2x \cdot z}{2} = \underline{\underline{4\sqrt{6}\,cm^2}}$

8.



Antud:

φ

α

Leida:

β

Lahendus:

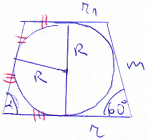
$$\sin\alpha = \frac{h}{a}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h}{b} = \sin\alpha\cos\varphi$$

$$\underline{\underline{\beta = \arcsin(\sin\alpha \cdot \cos\varphi)}}$$

16.



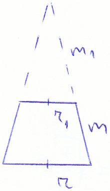
Antud:

$S_{kera} = 4\pi R^2 \quad (= S)$

$\alpha = 60°$

Leida:

$S_{k,\text{tüvik}}$



Lahendus:

$S_{k,\text{tüvik}} = \pi r(m+m_1) - \pi r_1 m_1 =$

$= \pi r m + \pi(r-r_1)m_1 = \pi(r+r_1)m$

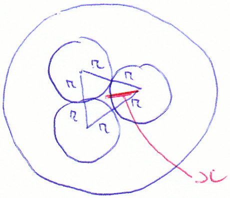
$\frac{r-r_1}{m} = \frac{r_1}{m_1} \Rightarrow (r-r_1)m_1 = r_1 m$

$m = r_1 + r$

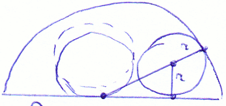
$\sin 60° = \frac{2R}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{4R}{\sqrt{3}}$

$S_{k,\text{tüvik}} = \pi \cdot m^2 = \frac{16}{3}\pi R^2 = \frac{16}{3} \cdot \frac{S}{4} = \underline{\underline{\frac{4}{3} S}}$

17.



$$x = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$$

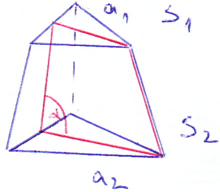


$$\sqrt{x^2 + r^2} + r = R$$

$$\left(\sqrt{\frac{7}{3}} + 1\right) r = R$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{3}} + 1} R = \underline{\underline{\frac{\sqrt{21} - 3}{4} R}}$$

18.



Antud:

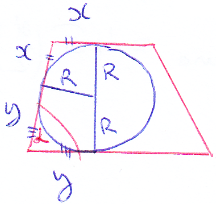
$S_1 : S_2 = 1 : 4$

Leida:

α

Lahendus:

$a_1 : a_2 = 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2a_1$



$$x = \frac{1}{3}\sqrt{a_1^2 - \left(\frac{1}{2}a_1\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a_1$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{6}a_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a_1$$

$$\cos\alpha = \frac{y-x}{x+y} = \frac{1}{3} \qquad \alpha = \arccos\frac{1}{3}$$

Kodutöö kõigile

Lahendage läbi ülesanded 1, 2, 7, 8, 16, 17 ja 18 ülesannete kogust lk 17–18. **Esitada ei ole vaja.** Lakoonilised lahendused on eespool olemas.