Materjal on valminud Hariduse Infotehnoloogia Sihtasutuse IT Akadeemia programmi toel

IT Akadeemia

Lineaarne sõltumatus

Ülesanne 2.4

Näidake, et vektorruumi $\mathbb{R}_2[x]$ vektorite süsteem

$$\{f_1(x) = x^2 - 6x, \quad f_2(x) = x^2 - 8x - 3, \quad f_3(x) = x^2 + 4x + 15\}$$

on lineaarselt sõltuv, leides nende vektorite mingi mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni, mis võrdub nullvektoriga.

Lahendus

Näitame vektorite süsteemi lineaarselt sõltuvust leides kordajad a_1, a_2, a_3 nii, et võrdus

$$a_1(x^2 - 6x) + a_2(x^2 - 8x - 3) + a_3(x^2 + 4x + 15) = 0$$

kehtib selliselt, et vähemalt üks kordajatest a_1, a_2, a_3 ei ole võrdne nulliga. Rühmitades eelmise võrduse liikmeid vektorite x^2, x ja 1 järgi saame võrduse

$$x^2(a_1 + a_2 + a_3) + x(-6a_1 - 8a_2 + 4a_3) + 1(-3a_2 + 15a_3) = 0.$$

Selleks, et vasak pool võrduks nullvektoriga, peavad vektorite x^2, x ja 1 kordajad võrduma nulliga. Saame sellega lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ -6a_1 - 8a_2 + 4a_3 = 0, \\ -3a_2 + 15a_3 = 0, \end{cases}$$

mida saab lahendada Gauss'i elimineerimise meetodiga. Saame teada, et sellel võrrandisüsteemil leidub lõpmatu palju lahendeid kujul

$$\begin{cases} a_1 = -6c, \\ a_2 = 5c, \\ a_3 = c, \ \text{kus } c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Võttes $c = 1$ saame konkreetse mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni, mis võrdub nullvektoriga

$$-6(x^2 - 6x) + 5(x^2 - 8x - 3) + 1(x^2 + 4x + 15) = 0.$$

Lineaarne sõltumatus

Ülesanne 2.6

Uurige, kas vektorite süsteem

$$\{x^2 - 3x,\ 2x^2 + 1,\ x + 2\}$$

funktsioonide vektorruumis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on lineaarselt sõltuv ning jaatava vastuse korral leidke mingi mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga,

Lahendus

Lineaarselt sõltumatuse jaoks näitame, et ei leidu mittetriviaalset lineaarkombinatsiooni nii, et kehtiks võrdus

$$a_1(x^2 - 3x) + a_2(2x^2 + 1) + a_3(x + 2) = 0, \qquad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Rühmitades eelmise võrduse liikmeid vektorite x^2, x ja 1 järgi saame võrduse

$$x^2(a_1 + 2a_2) + x(-3a_1 + a_3) + 1(a_2 + 2a_3) = 0$$

Siit saame lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 & = 0, \\ -3a_1 + a_3 & = 0, \\ a_2 + 2a_3 & = 0. \end{cases}$$

Kuna tundmatuid on sama palju kui võrrandeid ning süsteemile vastav maatriks on regulaarne (determinant on nullist erinev), siis tegemist on Cramer'i peajuhuga. Süsteem on seega üheselt lahenduv ning ainukeseks lahendiks on $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Järelikult ülesandes antud vektorite süsteem on lineaarselt sõltumatu.

Baas ja vektori koordinaadid

Ülesanne 3.1

Leidke vektorruumi $\mathbb{R}_2[x]$ vektori $5x - 3$ koordinaadid baasi $e = \{x - 2,\ 2x - 1\}$ suhtes.

Lahendus

Ülesandes antud vektori koordinaatideks on kordajad a_1, a_2 nii, et kehtib võrdus

$$a_1(x - 2) + a_2(2x - 1) = 5x - 3.$$

Rühmitades eelmise võrduse vasakul pool olevaid liikmeid vektorite x, ja 1 järgi saame võrduse

$$x(a_1 + a_2) + 1(-2a_1 - a_2) = 5x - 3.$$

Antud võrdusest saame lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 & = 5, \\ -2a_1 - a_2 & = -3. \end{cases}$$

See võrrandisüsteem on üheselt lahenduv ning lahendiks on

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3}, \\ a_2 = \dfrac{7}{3}. \end{cases}$$

Kokkuvõttes on vektori $5x - 3$ koordinaadid baasi e suhtes $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Baas ja vektori koordinaadid

Ülesanne 3.3

Leidke vektorruumi $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ vektorite $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ koordinaadid baasi

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

suhtes.

Lahendus

Olgu $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ning $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, siis baasivektorite lineaarkombinatsioonid avalduvad kujul

$$aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 = \begin{pmatrix} a + c & a \\ -b & b + d \end{pmatrix}.$$

Seega vektori A koordinaatide leidmiseks baasi E suhtes peame lahendama lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a + c & = 0, \\ a & = 2, \\ -b & = -3, \\ b + d & = 5. \end{cases}$$

Selle ainsaks lahendiks on

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 3, \\ c = -2, \\ d = 2. \end{cases}$$

Seega vektori A koordinaadid baasi E suhtes on $(2, 3, -2, 2)$. Vektori B koordinaadid leiame analoogiliselt, lahendades lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a + c & = 3, \\ a & = 1, \\ -b & = 4, \\ b + d & = 5. \end{cases}$$

Selle ainsaks lahendiks on

$$\begin{cases} a & = 1, \\ b & = -4, \\ c & = 2, \\ d & = 9. \end{cases}$$

seega vektori B koordinaadid baasi E suhtes on $(1, -4, 2, 9)$.

Baas ja vektori koordinaadid

Ülesanne 3.4

Tehke kindlaks, kas vektorite süsteem

$$\{a_1 = (1,0,0),\ a_2 = (1,-1,0),\ a_3 = (-1,1,2)\}$$

on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ baas ning jaatava vastuse korral leidke vektori $a = (7,9,16)$ koordinaadid selle baasi suhtes.

Lahendus

Selleks, et vektorid a_1, a_2 ja a_3 oleks vektorruumi $\mathbb{R}^3$ baas, peavad need olema lineaarselt sõltumatud ning moodustajate süsteem. Näitame, et vektorid a_1, a_2 ja a_3 on lineaarselt sõltumatud. Selleks näitame, et võrdus

$$k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0, \qquad k \in \mathbb{R}$$

kehtib ainult siis, kui $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Selle võrduse vasakut poolt välja kirjutades saame, et

$$k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = (k_1,0,0) + (k_2,-k_2,0) + (-k_3,k_3,2k_3) = (k_1 + k_2 - k_3, -k_2 + k_3, 2k_3).$$

Saame seega lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - k_3 & = 0, \\ -k_2 + k_3 & = 0, \\ 2k_3 & = 0. \end{cases}$$

Kuna tundmatuid on sama palju kui on võrrandeid ning süsteemile vastav maatriks on regulaarne (determinant ei ole null), tegemist on seega Cramer'i peajuhuga ning antud lineaarvõrrandisüsteem on üheselt lahenduv ning ainuke lahend on $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Sellega oleme näidanud, et vektorite süsteem $\{a_1,a_2,a_3\}$ on lineaarselt sõltumatu.

Näitame, et vektorid a_1, a_2 ja a_3 on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ moodustajate süsteem. Üks viis selle näitamiseks on fikseerida suvaline vektor (x,y,z) ning näitada, et leidub vektorite a_1,a_2,a_3 lineaarkombinatsioon, mis võrdub vektoriga (x,y,z). Ehk tuleks lahendada lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - k_3 & = x, \\ -k_2 + k_3 & = y, \\ 2k_3 & = z. \end{cases} \tag{1}$$

Selle lahendiks saame

$$\begin{cases} k_1 & = x + y, \\ k_2 & = \dfrac{z}{2} - y, \\ k_3 & = \dfrac{z}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Sellega oleme näidanud, et iga vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorit saab avaldada vektorite a_1,a_2,a_3 lineaarkombinatsioonina ehk vektorite süsteem $\{a_1,a_2,a_3\}$ on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ moodustajate süsteem.

Teine viis näidata, et tegemist on baasiga, on panna tähele, et vektorruum $\mathbb{R}^3$ on 3-mõõtmeline ning loengukonspektist on teada, et n-mõõtmelises vektorruumis on iga n lineaarselt sõltumatust vektorist koosnev süsteem tema baas. Seega vektorite süsteem $\{a_1,a_2,a_3\}$ on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ baas.

Vektori a koordinaatide leidmiseks lahendame võrrandisüsteemile (1) sarnast võrrandisüsteemi, kus $x = 7$, $y = 9$ ja $z = 16$. Kuna juba lahendasime võrrandisüsteemi (1), siis kasutame selle lahendit (2) ning vektori a koordinaatideks saame $\left(7+9, \dfrac{16}{2} - 9, \dfrac{16}{2}\right) = (16,-1,8)$.

Arvread

Ülesanne 4.1

Leidke rea $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$ osasummade jada (S_n) ja summa S.

Lahendus

Esimese sammuna lahutame üldliikme osamurdudeks ehk leiame kordajad A ja B nii, et

$$\frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1} = \frac{A(4n+1)+B(4n-3)}{(4n-3)(4n+1)}.$$

Kuna võrrand $4 = A(4n+1) + B(4n-3)$ peab kehtima iga n korral, siis võttes $n = -\frac{1}{4}$ ja $n = \frac{3}{4}$ saame, et $A = 1$ ning $B = -1$.
Järelikult saame esialgset rida kirjutada kujul

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$$

Fikseerime naturaalarvu n, siis selle rea osasumma S_n on

$$S_n = \left(\frac{1}{-3} - 1\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right).$$

Paneme tähele, et tegemist on teleskoopsummaga, kus keskmised liikmed taanduvad välja ning alles jäävad ainult esimene ja viimane liige ehk

$$S_n = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+1}$$

iga naturaalarvu n korral. Selle rea summa S on osasummade S_n piirväärtus, kus n läheneb lõpmatusele ehk

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+1}\right) = -\frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n+1} = -\frac{1}{3}.$$

Arvread

Ülesanne 4.3

Näidake hajuvuse tunnuse abil, et arvrida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+5}\right)^n$ hajub.

Lahendus

Paneme tähele, et kui $n > 5$, siis $\frac{2n}{n+5} > 1$ ning seega rea üldliige $\left(\frac{2n}{n+5}\right)^n > 1$. Kuna $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+5}\right)^n > 1$ ehk antud rea üldliige ei lähene nullile, siis arvrea hajuvuse tunnuse tõttu see rida hajub.

Geomeetriline rida

Ülesanne 4.5

Tehke kindlaks, kas geomeetriline rida $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9+3^n}{9^{n+1}}$ koondub või hajub. Koondumise korral leidke rea summa S.

Lahendus

Rea võime ümberkirjutada kujule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9+3^n}{9^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{9^{n+1}} + \frac{3^n}{9^{n+1}} \right) \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{9^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{9^{n+1}}.$$

Võrdus $(*)$ kehtib ainult siis, kui read $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{9^{n+1}}$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{9^{n+1}}$ koonduvad. Näitame, et need read koonduvad, millest saame järeldada, et esialgne rida koondub.

Esimeses reas võib rea üldliikmes nii lugeja kui ka nimetaja jagada arvuga 9. Esimene rida on siis kujul $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ ning on näha, et tegemist on geomeetrilise reaga, mille üldliige on absoluutväärtuse poolest väiksem ühest, seega see rida koondub ning geomeetrilise rea summa valemi tõttu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8}.$$

Teine rida on analoogiliselt koonduv geomeetriline rida ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{9^{n+1}} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{9^n} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3^2)^n} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^{2n}} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}.$$

Kuna need kaks rida koonduvad, siis kehtib võrdus $(*)$ ning seega esialgse rea summa S on

$$S = \frac{9}{8} + \frac{1}{6} = \frac{31}{24}.$$

Harmooniline rida

Märkus!

Harmooniliseks reaks nimetatakse rida kujul

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

kus $\alpha > 0$.

Ülesanne 5.1

Kas rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3\left(\sqrt{n}\right)^3}$ koondub või hajub?

Lahendus

Rea võime ümberkirjutada kujule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3\left(\sqrt{n}\right)^3} = \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n}\right)^3} = \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Tegemist on harmoonilise reaga, kus $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$, seega antud rida koondub.

Integraaltunnus

Ülesanne 5.2

Uurige rea $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(2n)}$ koonduvust integraaltunnuse abil.

Lahendus

Kuna $\frac{1}{x \cdot \ln^2(2x)}$ on tõepoolest pidev monotoonselt kahanev piirkonnas $[2, \infty)$, siis ülesandes antud rida koondub parajasti siis, kui koondub päratu integraal

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2(2x)}.$$

Lahendame päratu integraali. Paneme tähele, et $d \ln 2x = \frac{1}{2x} \cdot 2\,dx = \frac{dx}{x}$. Viime seega $\frac{1}{x}$ diferentsiaalmärgi alla ning saame

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2(2x)} = \lim_{M\to\infty} \int_2^{M} \frac{d \ln 2x}{\ln^2(2x)} = -\lim_{M\to\infty} \frac{1}{\ln 2x}\Big|_2^M = -\lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2M} - \frac{1}{\ln 4} \right) = \frac{1}{\ln 4}.$$

Kuna päratu integraal koondub, siis koondub ka esialgne rida.

Märkus!

Ülesandes näitasime ainult, et antud rida koondub, kuid me ei näidanud milliseks arvuks see rida koondub ehk ülesandes leitud päratu integraali väärtus ei pruugi olla antud koonduva rea summaga võrdne.

Positiivsete arvridade võrdluslaused

Ülesanne 5.6

Kas rida $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{n^3+5}}$ koondub või hajub?

Lahendus

Näitame, et rida hajub. Kuna antud rea liikmed on mittenegatiivsed, siis võime kasutada positiivsete arvridade esimest võrdluslauset. Kuna $n^5 + 5 < (n+5)^5$ iga naturaalarvu n korral, siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{n^3+5}} > \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{(n+5)^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(n+5)^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+5|} = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{|n|} = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Tegemist on harmoonilise reaga, kus $\alpha = 1$, seega see rida hajub. Kuna esialgsest reast väiksem rida hajub, siis esimese võrdluslause tõttu hajub ka esialgne rida.

Ülesanne 5.6

Kas rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{n^{5/4}}$ koondub või hajub?

Lahendus

Näitame, et antud rida koondub. Kuna antud rea liikmed on mittenegatiivsed, siis võime kasutada positiivsete arvridade esimest võrdluslauset. Kuna $\cos^4 n \leq 1$ iga n korral, siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{n^{5/4}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$$

ning viimane on harmooniline rida, kus $\alpha > 1$, seega see rida koondub. Kuna esialgsest reast suurem rida koondub, siis esimese võrdluslause tõttu koondub ka esialgne rida.

Absoluutne koonduvus

Ülesanne 6.1

Uurige D'Alembert'i tunnuse abil rea $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+6}}{\ln(2n)}$ koonduvust.

Lahendus

D'Alembert'i tunnusega uurime piirväärtust

$$D = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right|.$$

Kui see piirväärtus leidub ja $D < 1$, siis rida koondub absoluutselt. Kui $D > 1$, siis rida hajub ja kui $D = 1$, siis me ei saa D'Alembert'i tunnuse põhjal rea koonduvust otsustada. Leiame antud rea puhul D väärtuse:

$$D = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{5^{k+7} \cdot \ln 2k}{\ln(2k+2) \cdot 5^{k+6}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{5 \cdot \ln 2k}{\ln(2k+2)} \right| = 5 \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\ln 2k}{\ln(2k+2)} \right|.$$

Piirväärtuse $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\ln 2k}{\ln(2k+2)} \right|$ leidmiseks kasutame L'Hospital'i reeglit:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\ln 2k}{\ln(2k+2)} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln 2k}{\ln(2k+2)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{2k}}{\frac{2}{2k+2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+2}{2k} = 1.$$

Saame, et $D = 5 > 1$. Järelikult ülesandes antud rida hajub.

Absoluutne koonduvus

Ülesanne 6.2

Uurige Cauchy tunnuse abil rea $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{2n}\left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)$ koonduvust.

Lahendus

Cauchy tunnusega uurime piirväärtust

$$C = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|}.$$

Kui see piirväärtus leidub ja $C < 1$, siis rida koondub absoluutselt. Kui $C > 1$, siis rida hajub ja kui $C = 1$, siis me ei saa Cauchy tunnuse põhjal rea koonduvust otsustada. Leiame antud rea puhul C väärtuse:

$$C = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\tan^{2k}\left(\frac{4}{\sqrt{k}}\right)\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\tan^{2k}\left(\frac{4}{\sqrt{k}}\right)} = \lim_{k\to\infty} \tan^2\left(\frac{4}{\sqrt{k}}\right) = 0.$$

Kui k läheneb lõpmatusele, siis $\frac{4}{\sqrt{k}}$ läheneb nullile ja seega ka $\tan^2\left(\frac{4}{\sqrt{k}}\right)$ läheneb nullile. Kuna $C = 0 < 1$, siis ülesandes antud rida koondub.

Tingimisi koondumine

Ülesanne 6.4

Uurige rea $\sum_{n=1}^{\infty}(-0.99)^n$ koonduvust.

Lahendus

Tegemist on vahelduvate märkidega reaga

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-0.99)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 0.99^n,$$

kus rea üldliige avaldub kujul

$$a_n = 0.99^n.$$

Koonduvuse näitamiseks kontrollime Leibnizi koonduvustunnuse tingimusi. Selleks peame näitama, et üldliikmete jada on monotoonselt kahanev ning läheneb nullile.
Ilmselgelt $0.99^n \geq 0.99^{n+1}$ iga naturaalarvu n korral. Järelikult on üldliikmete jada monotoonselt kahanev. Samuti on lihtne näha, et $\lim_{k\to\infty} 0.99^k = 0$.
Järelikult Leibnizi koonduvustunnuse põhjal ülesandes antud rida koondub tingimisi.

Tingimisi koondumine

Ülesanne 6.5

Millise a väärtuse korral on rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \arcsin\dfrac{\pi}{4n}$ absoluutselt koonduv, millal tingimisi koonduv ja millal hajuv?

Lahendus

Kontrollime absoluutset koondumist, kasutame selleks D'Alembert'i tunnust

$$D = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a^{k+1}\arcsin\frac{\pi}{4k+4}}{a^k\arcsin\frac{\pi}{4k}}\right| = |a|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\arcsin\frac{\pi}{4k+4}}{\arcsin\frac{\pi}{4k}}\right|.$$

Piirväärtuse $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{\arcsin\frac{\pi}{4k+4}}{\arcsin\frac{\pi}{4k}}\right|$ leidmiseks teeme muutujavahetuse $u = 4k$ ning kasutame L'Hospital'i reeglit:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\arcsin\frac{\pi}{4k+4}}{\arcsin\frac{\pi}{4k}}\right| = \lim_{u\to\infty}\frac{\arcsin\frac{\pi}{u+4}}{\arcsin\frac{\pi}{u}} = \lim_{u\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{u+4}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{\pi}{(u+4)^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{u}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{\pi}{u^2}\right)} = \lim_{u\to\infty}\frac{u^2\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{u}\right)^2}}{(u+4)^2\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{u+4}\right)^2}} = 1,$$

kuna

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u^2}{(u+4)^2} = 1 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{u\to\infty}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{u}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{u+4}\right)^2}} = 1.$$

Järelikult $D = |a|$ ja antud rida koondub absoluutselt kui $D = |a| < 1$ ning hajub kui $D = |a| > 1$. Kontrollime rea koondumist, siis kui $|a| = 1$. Olgu $a = 1$, siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n\arcsin\frac{\pi}{4n} = \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi}{4n},$$

kuna $\sin x \le x$, siis $x \le \arcsin x$ (lõigus $[0,1]$) ning seega

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi}{4n} \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Viimane on harmooniline rida, kus $\alpha = 1$ ning seega hajub. Kuna antud reast väiksem rida hajub, siis positiivsete arvridade esimese võrdluslause tõttu hajub ka esialgne rida. Uurime nüüd juhtu, kus $a = -1$. Sellisel juhul saame vahelduvate märkidega rea

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{\pi}{4n}.$$

On lihtne veenduda, et jada liikmed on monotoonselt kahanevad ning $\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\dfrac{\pi}{4n} = 0$, seega Leibnizi koonduvustunnuse tõttu see rida koondub tingimisi.
Kokkuvõttes ülesandes antud rida koondub absoluutselt kui $-1 < a < 1$, koondub tingimisi kui $a = -1$ ning hajub muude a väärtuste korral.

Astmeread, koonduvusraadius

Ülesanne 7.1

Leidke astmerea $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\dfrac{(x+1)^n}{n+2}$ koonduvusraadius R, koonduvuspiirkond X ja absoluutse koondumise piirkond A.

Lahendus

Kasutame koonduvusraadiuse R leidmiseks valemit $R=\dfrac{1}{D}=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$. Saame, et

$$D=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-2)^{k+1}(k+2)}{(k+3)(-2)^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-2)(k+2)}{(k+3)}\right|=2\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+2}{k+3}\right|=2.$$

Kuna $D=2$, siis $R=\dfrac{1}{2}$ ning rida koondub absoluutselt vahemikus $(-1.5,-0.5)$. Kontrollime koonduvust selle vahemiku otspunktides. Kui $x=-0.5$, siis

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{(-0.5+1)^n}{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{0.5^n}{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}.$$

Antud rida ei koondu absoluutselt, kuna

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+2}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

on harmooniline rida, kus $\alpha=1$ ning seega ka hajub. Küll aga on näha, et antud vahelduvate märkidega rida on monotoonselt kahanev ning üldliige läheneb nullile. Seega saame Leibnizi koonduvustunnuse põhjal järeldada, et see rida koondub punktis $x=-0.5$ tingimisi. Kui $x=-1.5$, siis

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{(-1.5+1)^n}{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{(-0.5)^n}{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

tegemist on harmoonilise reaga, kus $a=1$, seega antud rida hajub.
Kokkuvõttes saime koonduvusraadiuseks $R=0.5$, koonduvuspiirkonnaks $X=[-1.5,-0.5)$ ning absoluutselt koondumise piirkonnaks $A=(-1.5,-0.5)$.

Ülesanne 7.1

Leidke astmerea $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{3n-2}}{n!}$ koonduvusraadius R, koonduvuspiirkond X ja absoluutse koondumise piirkond A.

Lahendus

Kasutame koonduvusraadiuse R leidmiseks valemit $R=\dfrac{1}{D}=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$. Saame, et

$$D=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!}{(k+1)!}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+1}\right|=0.$$

Kuna $D=0$, siis $R=\infty$ ning rida koondub absoluutselt igas punktis. Kokkuvõttes koonduvusraadius $R=\infty$ ja absoluutselt koondumise piirkond A on $\mathbb{R}$, mille tõttu koondumise piirkond X on ka $\mathbb{R}$.

Ülesanne 7.1

Leidke astmerea $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^n(x-6)^n$ koonduvusraadius R, koonduvuspiirkond X ja absoluutse koondumise piirkond A.

Lahendus

Kasutame koonduvusraadiuse R leidmiseks valemit $R = \dfrac{1}{C} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$. Saame, et

$$C = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|(k+1)^k|} = \lim_{k\to\infty} k + 1 = \infty.$$

Kuna $C = \infty$, siis $R = 0$ ning antud astmerida koondub ainult punktis $x = 6$. Kokkuvõttes on koonduvusraadius $R = 0$, absoluutselt koondumise piirkond A on $\{6\}$ ning koondumise piirkond X on $\{6\}$.

Astmeritta arendamine

Ülesanne 7.2

Arendage funktsioon $f(x) = \ln(1+x)$ astmeritta.

Lahendus

Paneme tähele, et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, ning viimase saame kirjutada geomeetrilise reana

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

juhul kui $x \in (-1, 1]$. Järelikult

$$\int f'(x)\, dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \, dx.$$

Geomeetriline rida on ka astmerida ja astmeridu võime liikmeti integreerida, seega

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Kokkuvõttes on funktsiooni $f(x)$ astmerida

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \text{kui } x \in (-1, 1].$$

Taylor'i read

Ülesanne 7.7

Arendage funktsioon $\dfrac{3}{1+x^5}$ Taylor'i ritta punktis $c = 0$.

Lahendus

Teame, et geomeetrilise rea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ summa on $\dfrac{1}{1-x}$. Paneme tähele, et esialgse funktsiooni saame kirjutada kujul

$$\frac{3}{1+x^5} = 3\frac{1}{1-(-x^5)} = 3\sum_{n=0}^{\infty}(-x^5)^n = 3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n}.$$

Arendasime funktsiooni astmereaks. Loengukonspektis on mainitud, et kui funktsioon on arendatav mingis vahemikus astmereaks, siis see astmerida on selle funktsiooni Taylor'i rida.

Ülesanne 7.8

Arendage integraalimärgi all olev avaldis Taylor'i ritta (astmeritta) ning integreerides liikmeti, arvutage integraali $\int\limits_0^{0.1} \frac{\sin x}{x}\, dx$ väärtus täpsusega 10^{-8}.

Lahendus

Loengukonspektis on välja toodud, et $\sin x$ arendus Taylori reana on

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Arendame integraalimärgi all olevat $\sin x$ tema Taylori reana ning jagame igat liiget avaldisega x. Saame siis, et

$$\int\limits_0^{0.1} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int\limits_0^{0.1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}\, dx = \int\limits_0^{0.1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx.$$

Integraalimärgi all on astmerida, mida võime liikmeti integreerida. Integreerime nüüd igat liiget eraldi ja saame, et

$$\int\limits_0^{0.1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^{0.1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int\limits_0^{0.1} x^{2n}\, dx \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{0.1^{2n+1}}{2n+1} \right).$$

Täpsuse 10^{-8} jaoks piisab esimesest kolmest liikmest:

$$0.1 - \frac{0.1^3}{3 \cdot 3!} + \frac{0.1^5}{5 \cdot 5!} \approx 0.09994446.$$

Fourier' read

Ülesanne 8.1

Leidke 2π-perioodilise ruutlaine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0, \\ -1, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Lahendus

Kuna funktsioon $f(x)$ on 2π-perioodiline, siis funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida avaldub kujul

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right],$$

kus

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Leiame a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} dx - \int_{0}^{\pi} dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[0 - (-\pi) - (\pi - 0)\right] = 0.$$

Leiame a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \cos nx\,dx - \int_{0}^{\pi} \cos nx\,dx\right] = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \frac{1}{n}\cos nx\,d(nx) - \int_{0}^{\pi} \frac{1}{n}\cos nx\,d(nx)\right] = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \cos nx\,d(nx) - \int_{0}^{\pi} \cos nx\,d(nx)\right] = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right] = 0. \end{aligned}$$

Leiame b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \sin nx\,dx - \int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx\right] = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \sin nx\,d(nx) - \int_{0}^{\pi} \sin nx\,d(nx)\right] = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[-\cos 0 + \cos n\pi + \cos n\pi - \cos 0\right] = \\ &= \frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1). \end{aligned}$$

Kui n on paaris, siis $\cos n\pi = 1$ ja seega $b_n = 0$. Kui n on paaritu, siis $\cos n\pi = -1$ ja seega $b_n = \frac{-4}{n\pi}$. Saame seega funktsiooni f Fourier' reaks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)x), \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Fourier' read

Ülesanne 8.2

Astmeridades võisime tuletise võtta liikmeti. Osutub, et Fourier' ridade korral see enam alati läbi ei lähe. Veenduge, et

$$2x = 4\sin x - \frac{4}{2}\sin 2x + \frac{4}{3}\sin 3x - \frac{4}{4}\sin 4x + \dots, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Võtke mõlemast poolest tuletis x-järgi ja veenduge, et punktis $x = 0$ saadud võrdus ei kehti.

Lahendus

Veendume, et $2x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n} \sin nx$. Leiame Fourier rea 2π perioodilisele funktsioonile $2x$. Selleks leiame a_0, a_n ja b_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x\,dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \cos nx\,dx = 0,$$

sest $2x \cos nx$ on paaritu funktsioon ning integraali rajad on sümmeetrilised. Kordajate b_n leidmiseks paneme tähele, et integreeritav funktsioon on paaris funktsioon ning integraali rajad on sümmeetrilised ja siis kasutame ositi integreerimist:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin nx\,dx = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin nx\,dx = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n}\,dx \right) = \frac{4}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos n\pi}{n} + 0 \right) = \\ &= \frac{-4}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

Eelnevast ning Fourier' rea valemist saame, et tõepoolest

$$2x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n} \sin nx.$$

Teame, et $(2x)' = 2$. Võtame nüüd Fourier reast liikmeti tuletist. Saame, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{4}{n} \sin(nx) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 4 \cos(nx).$$

Punktis $x = 0$ on see summa seega

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 4 = 4 - 4 + 4 - 4 + \dots.$$

Saadud rida ei saa koonduda ridade hajuvuse tunnuse tõttu, seega $2 \neq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 4$.

Fourier' read

Ülesanne 8.5

Leidke 4-perioodilise laine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ -1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Lahendus

Kuna funktsioon $f(x)$ on 4-perioodiline, siis funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida avaldub kujul

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right],$$

kus

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx.$$

Leiame a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} dx + \int_{-1}^{1} 0\,dx - \int_{1}^{2} dx\right] = \frac{1}{2}\left[-1-(-2)-(2-1)\right] = 0.$$

Leiame a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_{1}^{2} \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\left[\int_{-2}^{-1} \cos\frac{n\pi x}{2}\,d\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \int_{1}^{2} \cos\frac{n\pi x}{2}\,d\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}\right] = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[-\sin\frac{n\pi}{2} + \sin n\pi - \sin n\pi + \sin\frac{n\pi}{2}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Leiame b_n:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_{1}^{2} \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\int_{-2}^{-1} \sin\frac{n\pi x}{2}\,d\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \int_{1}^{2} \sin\frac{n\pi x}{2}\,d\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\int_{-2}^{-1} \sin\frac{n\pi x}{2}\,d\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \int_{1}^{2} \sin\frac{n\pi x}{2}\,d\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi}{2} + \cos n\pi + \cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right] = \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Saame, et funktsiooni f Fourier' rida on

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Kahe ja kolme muutuja funktsiooni määramispiirkond

Ülesanne 8.9

Leidke kolme muutuja funktsiooni $f(x,y,z) = \arcsin x - \arccos(yz) + x^2y$ määramispiirkond E.

Lahendus

Funktsioon x^2y on määratud iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral ja seega määramispiirkonda E kuidagi ei piira.
Funktsiooni $\arcsin x$ määramispiirkond on lõik $[-1,1]$, seega peab määramispiirkonnas E kehtima $-1 \leq x \leq 1$.
Funktsioon $\arccos(yz)$ on määratud, siis kui $-1 \leq yz \leq 1$, seega peab määramispiirkonnas E kehtima $-1 \leq yz \leq 1$.
Kokkuvõttes saame, et $E = \{(x,y,z)\colon\ x,\ yz \in [-1,1]\}$.

Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus

Ülesanne 9.1

Leidke piirväärtus $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.

Lahendus

Piirväärtuse leidmiseks läheme üle polaarkoordinaatile, kus teeme muutujavahetuse

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Polaarkoordinaatides seega punktile $(0,0)$ vastab punkt $r = 0$. Saame piirväärtuse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi))}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{r^2}$$

Tegemist on tuntud piirväärtusega $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, kus $x = r^2$, järelikult saame esialgseks piirväärtuseks

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 1.$$

Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus

Ülesanne 9.2

Näidake, et piirväärtus $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy^2-1}{y-1}$ ei eksisteeri.

Lahendus

Läheneme punktile $(1,1)$ kahte erinevat lähenemisteed pidi ja näitame, et saadud piirväärtused erinevad üksteisest. Läheneme alguses punktile $(1,1)$ sirge $x=1$ kaudu, siis

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy^2-1}{y-1} = \lim_{y\to1} \frac{y^2-1}{y-1} = \lim_{y\to1} \frac{(y-1)(y+1)}{y-1} = \lim_{y\to1}(y+1) = 2.$$

Läheneme nüüd punktile $(1,1)$ sirge $x=y$ kaudu, siis saame, et

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy^2-1}{y-1} = \lim_{y\to1} \frac{y^3-1}{y-1} = \lim_{y\to1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{y-1} = \lim_{y\to1}(y^2+y+1) = 3.$$

Kuna funktsioonil saab igas punktis olla ainult üks piirväärtus ning punktile $(1,1)$ kahte erinevat lähenemisteed pidi lähenedes saime kaks erinevat piirväärtust, siis ülesandes antud piirväärtust ei eksisteeri.

Kahe muutuja funktsiooni pidevus

Ülesanne 9.8

Näidake, et funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin y \cos \frac{1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

on pidev oma määramispiirkonnas.

Lahendus

Määramispiirkonnaks on kogu xy-tasand. Igas piirkonnas, kus $x \neq 0$ on funktsioon f elementaarfunktsioon ning seega ka pidev, kontrollida tuleb seega funktsiooni pidevust ainult sirgel $x = 0$. Selleks näitame, et funktsiooni piirväärtus igas punktis $(0, y_1)$, $y_1 \in \mathbb{R}$ on võrdne funktsiooni väärtusega selles punktis. Piirväärtuseks saame:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_1)} x \sin y \cos \frac{1}{x} = 0,$$

kuna

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_1)} x = 0$$

ning

$$\sin y \cos \frac{1}{x}$$

on tõkestatud funktsioon punkti $(0, y_1)$ ümbruses. Järelikult

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_1)} f(x,y) = f(0,y_1),$$

millest saame, et funktsioon on pidev sirgel $x = 0$ ja seega on pidev oma määramispiirkonnas.

Esimest järku osatuletised

Ülesanne 10.1

Leidke definitsiooni kasutades funktsiooni $f(x,y) = y\sqrt{2x+1}$ osatuletised.

Lahendus

Funktsiooni $f(x,y)$ osatuletis argumendi y järgi on piirväärtus

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Antud konkreetsel juhul on seega funktsiooni osatuletis argumendi y järgi:

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{(y+\Delta y)\sqrt{2x+1}-y\sqrt{2x+1}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y\sqrt{2x+1}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\sqrt{2x+1} = \sqrt{2x+1}.$$

Funktsiooni $f(x,y)$ osatuletis argumendi x järgi on piirväärtus

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Antud konkreetsel juhul on seega funktsiooni osatuletis argumendi x järgi:

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y\sqrt{2(x+\Delta x)+1}-y\sqrt{2x++1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+1}-\sqrt{2x+1}\right)}{\Delta x}.$$

Kasutame teadmist, et $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ning korrutame murru lugejat ja nimetajat avaldisega $\sqrt{2(x+\Delta x)+1}+\sqrt{2x+1}$, saame:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+1}-\sqrt{2x+1}\right)}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{2(x+\Delta x)+1}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2(x+\Delta x)+1}+\sqrt{2x+1}} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y\,(2(x+\Delta x)+1-2x-1)}{\Delta x\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+1}+\sqrt{2x+1}\right)} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2y\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+1}+\sqrt{2x+1}\right)} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2y}{\sqrt{2(x+\Delta x)+1}+\sqrt{2x+1}} = \\
&= \frac{2y}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{y}{\sqrt{2x+1}}.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes on funktsiooni $f(x,y)$ osatuletised:

$$f_x(x,y) = \frac{y}{\sqrt{2x+1}}, \qquad f_y(x,y) = \sqrt{2x+1}.$$

Esimest järku osatuletised

Ülesanne 10.2

Leidke funktsiooni $f(x,y,z) = x^4y^2z + 3yz^2 + 4y$ osatuletised.

Lahendus

Funktsiooni $f(x,y,z)$ osatuletise leidmiseks argumendi x järgi võtame temast tuletist argumendi x järgi, kus suhtume argumentidesse y ja z kui konstantidesse. Saame osatuletiseks:

$$f_x = 4x^3y^2z + 0 + 0 = 4x^3y^2z.$$

Teiste osatuletiste leidmiseks käitume analoogiliselt. Funktsiooni $f(x,y,z)$ osatuletise leidmiseks argumendi y järgi võtame temast tuletist argumendi y järgi, kus suhtume argumentidesse x ja z kui konstantidesse. Saame osatuletiseks:

$$f_y = 2x^4yz + 3z^2 + 4.$$

Analoogiliselt leitakse osatuletis f_z. Saame osatuletiseks:

$$f_z = x^4y^2 + 6yz + 0 = x^4y^2 + 6yz.$$

Kokkuvõttes on funktsiooni f osatuletised:

$$f_x = 4x^3y^2z, \qquad f_y = 2x^4yz + 3z^2 + 4, \qquad f_z = x^4y^2 + 6yz.$$

Liitfunktsiooni osatuletised

Ülesanne 10.11

Leidke liitfunktsiooni $z = \arcsin xy, \quad y = \ln|x|$ tuletis.

Lahendus

Kui $z = F(u, v)$, kus $u = f(x)$, $v = g(x)$, siis funktsiooni z tuletis on

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Antud konkreetsel juhul on $u = x(x)$ ning $v = y(x)$ ehk

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Leiame iga selle osatuletise:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2y^2}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2y^2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

Järelikult funktsiooni z tuletis on

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2y^2}} \cdot 1 + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2y^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y + 1}{\sqrt{1 - x^2y^2)}}.$$

Liitfunktsiooni osatuletised

Ülesanne 10.12

Leidke liitfunktsiooni $z = \arccos\frac{u}{v}$, $\quad u = x\sin y$, $\quad v = x\cos y$ osatuletised.

Lahendus

Kui $z = F(u, v)$, kus $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, funktsiooni z osatuletis argumendi x järgi on

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Leiame iga selle osatuletise:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{1}{v\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u}{v^2\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \cos y.$$

Saame seega, et funktsiooni z osatuletis argumendi x järgi on:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{x\cos y\sqrt{1-\frac{x^2\sin^2 y}{x^2\cos^2 y}}}\cdot\sin y + \frac{x\sin y}{x^2\cos^2 y\sqrt{1-\frac{x^2\sin^2 y}{x^2\cos^2 y}}}\cdot\cos y = \\ &= -\frac{\sin y}{x\cos y\sqrt{1-\tan^2 y}} + \frac{\sin y}{x\cos y\sqrt{1-\tan^2 y}} = 0.\end{aligned}$$

Analoogiliselt funktsiooni z osatuletis argumendi y järgi on

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Eelmisest osatuletise leidmisest me juba teame millega on $\frac{\partial z}{\partial u}$ ja $\frac{\partial z}{\partial v}$ võrdsed. Ülejäänud vajaminevad osatuletised on:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -x\sin y.$$

Saame seega, et funktsiooni z osatuletis argumendi y järgi on:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{1}{x\cos y\sqrt{1-\frac{x^2\sin^2 y}{x^2\cos^2 y}}}\cdot x\cos y + \frac{x\sin y}{x^2\cos^2 y\sqrt{1-\frac{x^2\sin^2 y}{x^2\cos^2 y}}}\cdot(-x\sin y) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\tan^2 y}} - \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y\sqrt{1-\tan^2 y}} = \\ &= \frac{-\cos^2 y - \sin^2 y}{\cos^2 y\sqrt{1-\tan^2 y}} = \\ &= \frac{-1}{\cos^2 y\sqrt{1-\tan^2 y}}.\end{aligned}$$

Kõrgemat järku osatuletised

Ülesanne 10.13

Leidke funktsiooni $f(x,y) = \operatorname{arccot}\dfrac{1-xy}{x+y}$ teist järku osatuletised.

Lahendus

Leiame esiteks funktsiooni esimest järku osatuletise argumendi x järgi:

$$\begin{aligned}
f_x &= -\frac{1}{1+\left(\frac{1-xy}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{-y(x+y)-(1-xy)}{(x+y)^2} = \\
&= \frac{-1\cdot(-y^2-1)}{(x+y)^2+(1-xy^2)} = \\
&= \frac{y^2+1}{x^2+y^2+1+x^2y^2} = \\
&= \frac{y^2+1}{(y^2+1)(x^2+1)} = \\
&= \frac{1}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Funktsiooni f esimest järku osatuletis argumendi y järgi tuleb analoogiliselt

$$f_y = \frac{1}{y^2+1}.$$

Kuna osatuletis f_x sõltub ainult argumendist x ning osatuletis f_y sõltub ainult argumendist y, siis segaosatuletised $f_{xy} = f_{yx} = 0$. Leiame nüüd teist järku osatuletise f_{xx}:

$$f_{xx} = -\frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Teist järku osatuletis f_{yy} tuleb analoogiliselt

$$f_{yy} = \frac{-2y}{(y^2+1)^2}.$$

Kokkuvõttes on funktsiooni f teist järku osatuletised:

$$f_{xx} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}, \qquad f_{yy} = \frac{-2y}{(y^2+1)^2}, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0.$$

Kõrgemat järku osatuletised

Ülesanne 10.15

Leidke funktsiooni $f(x,y) = \ln|x+y| - e^x \sin x$ teist järku segaosatuletisi.

Lahendus

Leiame funktsiooni esimest järku osatuletise argumendi x järgi:

$$f_x = \frac{1}{x+y} - e^x \sin x - e^x \cos x.$$

Funktsiooni f segaosatuletis f_{xy} on seega

$$f_{xy} = \frac{-1}{(x+y)^2}.$$

Leiame funktsiooni esimest järku osatuletise argumendi y järgi:

$$f_y = \frac{1}{x+y}.$$

Segaosatuletis f_{yx} on seega analoogiliselt

$$f_{yx} = \frac{-1}{(x+y)^2}.$$

Kokkuvõttes on funktsiooni segaosatuletised

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-1}{(x+y)^2}.$$

Täisdiferentsiaal

Ülesanne 12.1

Leidke funktsiooni $f(x,y,z) = \arctan(3x - 2y - 5z)$ täisdiferentsiaal.

Lahendus

Funktsiooni $f(x,y,z)$ täisdiferentsiaal on

$$df(x,y,z) = f_x(x,y,z)\Delta x + f_y(x,y,z)\Delta x + f_z(x,y,z)\Delta z.$$

Leiame funktsiooni f esimest järku osatuletisi:

$$f_x(x,y,z) = \frac{3}{1+(3x-2y-5z)^2},$$
$$f_y(x,y,z) = \frac{-2}{1+(3x-2y-5z)^2},$$
$$f_z(x,y,z) = \frac{-5}{1+(3x-2y-5z)^2}.$$

Järelikult ülesandes antud funktsiooni $f(x,y,z)$ täisdiferentsiaal on

$$df(x,y,z) = \frac{3\Delta x - 2\Delta y - 5\Delta z}{1+(3x-2y-5z)^2}.$$

Täisdiferentsiaal

Ülesanne 12.4

Arvutage funktsiooni $u = 2x^2z^2 - 3yz + 5xy^2z$ muut ja täisdiferentsiaal, kui $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.1$, $\Delta z = -0.1$.

Lahendus

Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$du = u_x \Delta x + u_y \Delta y + u_z \Delta z.$$

Funktsiooni u esimest järku osatuletised on:

$$\begin{aligned} u_x &= 4xz^2 + 5y^2z \\ u_y &= -3z + 10xyz \\ u_z &= 4x^2z - 3y + 5xy^2 \end{aligned}$$

Funktsiooni u täisdiferentsiaal on seega

$$du = (4xz^2 + 5y^2z)\Delta x + (-3z + 10xyz)\Delta y + (4x^2z - 3y + 5xy^2)\Delta z$$

Funktsiooni u täisdiferentsiaal etteantud väärtustel on seega

$$du = (32 + 10) \cdot 0.1 + (-6 + 40) \cdot 0.1 - (32 - 3 + 10) \cdot 0.1 = 4.2 + 3.4 - 3.9 = 3.7.$$

Võrdluseks täpne funktsiooni muut on:

$$\Delta u = u(2.1, 1.1, 1.9) - u(2, 1, 2) = 49.7097 - 46 = 3.7097.$$

Funktsiooni muudu ligikaudne leidmine

Ülesanne 12.5

Leidke funktsiooni $u = \ln(xy)^{\frac{1}{2}}$ ligikaudne muut punktist $(5, 10)$ punkti $(5.05, 9.95)$.

Lahendus

Tuletame meelde, et kui $\Delta x, \Delta y$ on küllalt väikesed, siis funktsiooni $u = f(x, y)$ muut on

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Ülesande tekstist saame, et $\Delta x = 0.05 = \dfrac{1}{20}$ ja $\Delta y = -0.05 = -\dfrac{1}{20}$. Leiame funktsiooni u osatuletise muutuja x järgi, kus suhtume muutujasse y kui konstanti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(xy)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left((xy)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = \frac{1}{2xy} \cdot y = \frac{1}{2x}.$$

Funktsiooni osatuletis muutuja y järgi leitakse analoogiliselt, suhtume muutujasse x kui konstanti:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(xy)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left((xy)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = \frac{1}{2xy} \cdot x = \frac{1}{2y}.$$

Kokkuvõttes saame, et:

$$\Delta u \approx \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{2 \cdot 10} \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{400}.$$

Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine

Ülesanne 12.14

Arvutage ligikaudselt väärtus
$$\sin\left(\frac{6}{7}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right).$$

Lahendus

Kasutame teadmist, et küllalt väikeste $\Delta x, \Delta y$ korral

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Olgu funktsioon $f(x,y) = \sin(x\pi)\cos(y\pi)$. Leiame tema osatuletised:

$$f'_x(x,y) = \pi\cos(x\pi)\cos(y\pi), \qquad f'_y(x,y) = -\pi\sin(x\pi)\sin(y\pi).$$

Valime sellised x_0, y_0, mis oleks võimalikult lähedal esialgsete väärtustele ja mille korral meie arvutused oleks võimalikult lihtsad.

Variant 1:
Valime $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{4}$, siis $\Delta x = \frac{6}{7} - 1 = -\frac{1}{7}$, $\Delta y = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}$. Saame:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{6}{7}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) &\approx \sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi\cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{7} + \pi\sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{20} = \\ &= 0 + \frac{\pi\sqrt{2}}{14} + 0 \approx 0.3173.\end{aligned}$$

Variant 2:
Valime $x_0 = \frac{5}{6}$, $y_0 = \frac{1}{4}$, siis $\Delta x = \frac{6}{7} - \frac{5}{6} = \frac{1}{42}$, $\Delta y = -\frac{1}{20}$. Saame:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{6}{7}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) &\approx \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{42} + \pi\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{20} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \pi\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{1}{42} + \pi\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{20} \approx 0.3633.\end{aligned}$$

Variant 3:
Valime $x_0 = \frac{5}{6}, y_0 = \frac{1}{6}$, siis $\Delta x = \frac{1}{42}, \Delta y = \frac{1}{30}$. Saame:

$$\sin\left(\frac{6}{7}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{42} - \pi\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{30} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{33\pi}{1260} \approx 0.3507.$$

Täpne väärtus on ligikaudu 0.3510.

Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

Ülesanne 13.2

Leidke funktsiooni $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y), \quad (x,y) \in \{(x,y): 0 \le x, y \le \pi\}$ lokaalsed ekstreemumid.

Lahendus

Leiame esiteks funktsiooni f statsionaarsed punktid. Selleks peame lahendama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0. \end{cases}$$

Leiame funktsiooni f osatuletised

$$\begin{aligned} f'_x &= \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y), \\ f'_y &= \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y). \end{aligned}$$

Nüüd võrdsustades osatuletised nulliga saame järgneva võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0, \\ \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0. \end{cases}$$

Lahutades teisest võrrandist esimese saame võrrandi

$$\sin x \cos y \sin(x+y) - \cos x \sin y \sin(x+y) = 0 \Leftrightarrow \sin(x+y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y) = 0.$$

Kasutades siinuse kahe nurga vahe valemit saame võrrandi $\sin(x+y)\sin(x-y) = 0$. Teame, et $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$. Seega arvestades piirangut $(x,y) \in \{(x,y) : 0 \le x, y \le \pi\}$ saame

$$\begin{aligned} &\sin(x+y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0; \text{ või } x = y = \pi; \text{ või } y = \pi - x, \\ &\sin(x-y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \text{ või } x = \pi, y = 0; \text{ või } x = 0, y = \pi. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes meie võrrandisüsteem on lahenduv kui kas $x = y$ või $y = \pi - x$.
Kui $y = x$, siis kasutades esialgse võrrandisüsteemi esimest võrrandit ja siinuse kahe nurga summa valemit saame, et

$$\cos x \sin x \sin 2x + \sin^2 x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}.$$

Saime 4 statsionaarset punkti: $(0,0), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), (\pi, \pi)$.
Kui $y = \pi - x$, siis kasutades esialgse süsteemi esimest võrrandit saame, et

$$\cos x \sin(\pi - x) \sin \pi + \sin x \sin(\pi - x) \cos \pi = 0 \Leftrightarrow -\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi\}.$$

Saime juurde kaks statsionaarset punkti $(0,\pi), (\pi,0)$. Nüüd uurime millistel saadud statsionaarsetel punktidel on lokaalne ekstreemum. Selleks leiame esialgu funktsiooni teist järku osatuletised

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= -2\sin x \sin y \sin(x+y) + 2\cos x \sin y \cos(x+y), \\ f''_{yy} &= -2\sin x \sin y \sin(x+y) + 2\sin x \cos y \cos(x+y), \\ f''_{xy} &= \cos x \cos y \sin(x+y) + \cos x \sin y \cos(x+y) + \sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y) = \\ &= 2\cos(x+y)\sin(x+y) = \sin(2x+2y). \end{aligned}$$

Siis arvutame järgmise determinandi väärtuse

$$W = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = (-2\sin x \sin y \sin(x+y) + 2\cos x \sin y \cos(x+y))^2 - (\sin(2x+2y))^2.$$

On lihtne näha, et $W(0,0) = W(0,\pi) = W(\pi,0) = W(\pi,\pi) = 0$. Seega peaks funktsiooni f neis punktides edasi uurima. Samuti näeme, et $W\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = W\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{9}{4} > 0$, seega nendes punktides leidub lokaalne ekstreemum.
Punktis $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ on $f''_{xx} = -\sqrt{3} < 0$, seega tegemist on lokaalse maksimumiga ja punktis $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ on $f''_{xx} = \sqrt{3} > 0$, seega tegemist on lokaalse miinimumiga.
Kokkuvõttes $\operatorname{locmax} f = f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ja $\operatorname{locmin} f = f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Kahe muutuja funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud piirkonnas

Ülesanne 13.4

Leidke funktsiooni $f(x,y) = (2x^3 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$, $(x,y) \in \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq 4\}$ globaalsed ekstreemumid $\max f$ ja $\min f$.

Lahendus

Leiame esiteks funktsiooni f statsionaarsed punktid. Selleks peame lahendama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0. \end{cases}$$

Leiame funktsiooni f osatuletised

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 6x^2e^{-x^2-y^2} - 2x(2x^3 + 3y^2)e^{-x^2-y^2} = 2xe^{-x^2-y^2}(3x - 2x^3 - 3y^2), \\ f'_y(x,y) &= 6ye^{-x^2-y^2} - 2y(2x^3 + 3y^2)e^{-x^2-y^2} = 2ye^{-x^2-y^2}(3 - 2x^3 - 3y^2). \end{aligned}$$

Võrdsustame need nulliga ja lahendame saadud võrrandisüsteemi. Esiteks paneme tähele, et kui $x = 0$, siis $f'_x(0,y) = 0$ ja teisest võrrandist saame

$$2ye^{-y^2}(3 - 3y^2) = 0 \Leftrightarrow 6y(1 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y \in \{0, -1, 1\}.$$

Saime 3 statsionaarset punkti. Samuti on kerge näha, et kui $y = 0$, siis $f'_y(x,0) = 0$ ning esimesest võrrandist saame

$$2xe^{-x^2}(3x - 2x^3) = 0 \Leftrightarrow 2x^2(3 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, -\sqrt{1.5}, \sqrt{1.5}\right\}.$$

Saime nüüd 2 statsionaarset punkti juurde. Olgu nüüd $x, y \neq 0$, siis

$$\begin{cases} 2xe^{-x^2-y^2}(3x - 2x^3 - 3y^2) = 0 \\ 2ye^{-x^2-y^2}(3 - 2x^3 - 3y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2x^3 - 3y^2 = 0 \\ 3 - 2x^3 - 3y^2 = 0. \end{cases}$$

Lahutades esimesest võrrandist teise, saame $x = 1$ ja seega süsteemi

$$\begin{cases} x = 1 \\ 3 - 2(1)^3 - 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y \in \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}. \end{cases}$$

Kokkuvõttes saime 7 statsionaarset punkti:

$$(0,0), (0,-1), (0,1), \left(-\sqrt{1.5}, 0\right), \left(\sqrt{1.5}, 0\right), \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Kuna meid huvitavad ainult globaalsed ekstreemumid, siis me ei pea uurima, kas tegemist on lokaalsete ekstreemumitega. Piisab, kui arvutame igas neis punktis funktsiooni $f(x,y)$ väärtuse. Saame, et neis punktides on funktsiooni suurim väärtus $f(0,1) = f(0,-1) = \dfrac{3}{e}$ ja funktsiooni väikseim väärtus on $f(-\sqrt{1.5}, 0) = -\dfrac{3\sqrt{1.5}}{e^{1.5}} \approx -0.82$.
Uurime nüüd funktsiooni väärtusi rajal. Rajal kehtib omadus $y^2 = 4 - x^2$, seega rajal avaldub esialgne funktsioon kujul $f(x) = (2x^3 + 12 - 3x^2)e^{-4}$, $-2 \leq x \leq 2$. Ühemuutuja funktsioonide teadmisi kasutades saame, et rajal omandab funktsioon maksimaalse väärtuse $f(2) = \dfrac{16}{e^4} \approx 0.29$ ja minimaalse väärtuse $f(-2) = -\dfrac{16}{e^4}$. Järelikult raja ekstreemumid ei ole globaalsed ekstreemumid.
Seega funktsiooni f globaalseteks ekstreemumiteks on $\max f = f(0,1) = f(0,-1) = \dfrac{3}{e}$ ja $\min f = f(-\sqrt{1.5}, 0) \approx -0.82$.

Ülesanne 13.6

Alleelid A,B ja O määravad neli veregruppi: A (AA või AO), B (BB või BO), O (OO) ja AB. Hardy–Weinbergi seaduse kohaselt on kahte alleelikandvate inimeste osakaal populatsioonis

$$P \approx 2pq + 2pr + 2rq,$$

kus p, q ja r on vastavalt A, B ja O osakaalud populatsioonis. Kasutades fakti, et $p + q + r = 1$, näidake, et P väärtus on kõige rohkem $\frac{2}{3}$.

Lahendus

Asendame võrrandisse $p = 1-q-r$, saame et kahte alleelikandvate inimeste osakaal populatsioonis väljendub ligikaudu funktsioonina

$$P(q,r) = 2(1-q-r)q + 2(1-q-r)r + 2rq = 2q - 2q^2 - 2qr + 2r - 2r^2.$$

Leiame selle funktsiooni ekstreemumid. Selleks leiame funktsiooni osatuletised:

$$P'_q(q,r) = 2 - 4q - 2r, \qquad P'_r(q,r) = 2 - 4r - 2q.$$

Leiame selle funktsiooni statsionaarsed punktid, lahendades võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2 - 4q - 2r = 0 \\ 2 - 4r - 2q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2q - r = 0 \\ 1 - 2r - q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 - 2q \\ 1 - 2(1-2q) - q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ q = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Saime statsionaarse punkti $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Kontrollime, kas tegemist on lokaalse ekstreemumiga. Selleks leiame funktsiooni teist järku osatuletised:

$$P''_{qq}(q,r) = -4, \qquad P''_{rr}(q,r) = -4, \qquad P''_{qr}(q,r) = -2.$$

Ja arvutame välja determinandi:

$$W(q,r) = \begin{vmatrix} P''_{qq} & P''_{qr} \\ P''_{rq} & P''_{rr} \end{vmatrix} = -4 \cdot (-4) - (-2)^2 = 16 - 4 = 12 > 0 \text{ iga } q, r \text{ korral.}$$

Saime, et tegemist on lokaalse ekstreemumiga, ja kuna $P''_{qq}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -4 < 0$, siis tegemist on lokaalse maksimumiga, mille väärtus on $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.
Uurime selle funktsiooni väärtusi rajal. Teame, et $0 \le q, r \le q + r = 1$.
Kui $q = 0$, siis $P(q,r) = 2r - 2r^2$, mille maksimaalseks väärtuseks on $P\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Juhtum $r = 0$ on analoogiline.
Kui $q + r = 1 \Leftrightarrow r = 1 - q$, siis

$$P(q) = 2q - 2q^2 - 2q + 2q^2 + 2 - 2q - 2 + 4q - 2q^2 = 2q - 2q^2,$$

mille maksimaalne võimalik väärtus on samuti $\frac{1}{2}$. Seega funktsiooni P globaalne maksimum on $P_{\max}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Optimiseerimine

Ülesanne 13.12

Laborikatsed näitasid, et x mg ravimi A ja y mg ravimi B koostoime avaldub funktsioonina $f(x,y) = xy - 2x^2 - y^2 + 100x + 60y$ (kus $0 \leq x \leq 55, 0 \leq y \leq 60$). Leidke mõlema ravimi kogused, mis tagavad suurima toime.

Lahendus

Leiame funktsiooni globaalse maksimumi. Selleks leiame esiteks funktsiooni osatuletised

$$f'_x(x,y) = y - 4x + 100, \qquad f'_y(x,y) = x - 2y + 60.$$

Võrdsustame need nulliga ja lahendame saadud võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} y - 4x + 100 = 0 \Leftrightarrow y = 4x - 100 \\ x - 2y + 60 = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 100 \\ x = 2(4x - 100) - 60 \Leftrightarrow x = \dfrac{260}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \cdot \left(\dfrac{260}{7}\right) - 100 \\ x = \dfrac{260}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{340}{7} \\ x = \dfrac{260}{7}. \end{cases}$$

Saime statsionaarse punkti $\left(\frac{260}{7}, \frac{340}{7}\right)$. Uurime, kas tegemist on lokaalse ekstreemumiga. Selleks leiame selle funktsiooni teist järku osatuletised

$$f''_{xx}(x,y) = -4, \quad f''_{yy}(x,y) = -2, \quad f''_{xy}(x,y) = 1.$$

Ja arvutame välja determinandi

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = -4 \cdot (-2) - 1^2 = 7 > 0, \text{ iga } x,y \text{ korral.}$$

Tegemist on seega lokaalse ekstreemumiga, ja kuna $f''_{xx}\left(\frac{260}{7}, \frac{340}{7}\right) = -4 < 0$, siis tegemist on lokaalse maksimumiga, mille väärtus on $f\left(\frac{260}{7}, \frac{340}{7}\right) = \frac{23200}{7} \approx 3314$.
Uurime funktsiooni väärtusi rajapunktides $(0,0), (0,60), (55,0)$ ja $(55,60)$.

$$f(0,0) = 0, \qquad f(0,60) = 0,$$
$$f(55,0) = -550, \qquad f(55,60) = 2750.$$

Ükski neist ei ole suurem meie lokaalsest maksimumist ja seega globaalne maksimum on $f_{\max}\left(\frac{260}{7}, \frac{340}{7}\right) = \frac{23200}{7}$ ehk suurima toime tagavad $\frac{260}{7}$ mg ravimit A ja $\frac{340}{7}$ mg ravimit B.

Lagrange'i kordajate meetod

Ülesanne 14.3

Leidke Lagrange'i meetodiga funktsiooni $f(x,y,z) = x-2y+2z$ tinglikud lokaalsed ekstreemumid lisatingimusel $x^2+y^2+z^2=9$.

Lahendus

Moodustame ülesandele vastava Lagrange'i funktsiooni:

$$J(x,y,z,\lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2+y^2+z^2-9)$$

Leiame Lagrange'i funktsiooni osatuletised iga tundmatu järgi

$$\begin{cases} J'_x = 1 + 2\lambda x, \\ J'_y = -2 + 2\lambda y, \\ J'_z = 2 + 2\lambda z, \\ J'_\lambda = x^2+y^2+z^2-9. \end{cases}$$

Võrdsustame need nulliga ja lahendame saadud süsteemi

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-1}{2x}, \\ -2 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{y}, \\ 2 + 2\lambda z = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-1}{z}, \\ x^2+y^2+z^2-9 = 0. \end{cases} .$$

Esiteks avaldame esimesest kolmest võrrandist Lagrange'i kordaja λ.

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{-1}{2x}, \\ \lambda = \dfrac{1}{y}, \\ \lambda = \dfrac{-1}{z}, \\ x^2+y^2+z^2-9 = 0. \end{cases}$$

Esimese ja teise võrrandi võrdusest saame, et $\dfrac{-1}{2x} = \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = -2x$. Esimese ja kolmanda võrrandi võrdusest saame, et $\dfrac{-1}{2x} = \dfrac{-1}{z} \Rightarrow z = 2x$.
Kasutades saadud võrdusi süsteemi viimasel võrrandil, et saada

$$x^2 + (-2x)^2 + (2x)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}.$$

Järelikult $y = \begin{cases} -2, & \text{kui } x = 1, \\ 2, & \text{kui } x = -1, \end{cases}$ ja $z = \begin{cases} 2, & \text{kui } x = 1, \\ -2, & \text{kui } x = -1. \end{cases}$ Saime kaks tinglikku statsionaarset punkti $(1,-2,2), (-1,2,-2)$, mille korral on Lagrange'i kordaja λ väärtus vastavalt $\dfrac{-1}{2}$ ja $\dfrac{1}{2}$.
Leiame kõik teist järku osatuletised

$$J''_{xx} = J''_{yy} = J''_{zz} = 2\lambda, \qquad J''_{xy} = 0.$$

Uurime, kas nendes punktides on tinglik lokaalne ekstreemum

$$W = \begin{vmatrix} J''_{xx} & J''_{xy} \\ J''_{yx} & J''_{yy} \end{vmatrix} = 4\lambda^2 > 0 \text{ iga } \lambda \text{ puhul.}$$

Saime, et mõlemad tinglikud statsionaarsed punktid on tinglikud lokaalsed ekstreemumid. Määrame kindlaks nende liigi, leides järgneva determinandi väärtuse

$$A = \begin{vmatrix} J''_{xx} & J''_{xy} & J''_{xz} \\ J''_{yx} & J''_{yy} & J''_{yz} \\ J''_{zx} & J''_{zy} & J''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda^3.$$

Saame, et punktis $(1,-2,2)$ on lokaalne maksimum, sest $J''_{xx} = 2\lambda = -1 < 0$ ja $A = 8\lambda^3 = -1 < 0$. Ning punktis $(-1,2,-2)$ on lokaalne miinimum, sest $J''_{xx} = 2\lambda = 1 > 0$ ja $A = 8\lambda^3 = 1 > 0$.

Kokkuvõttes $f_{\max} = f(1,-2,2) = 9$ ja $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ ning $f_{\min} = f(-1,2,-2) = -9$ ja $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Lagrange'i kordajate meetod

Ülesanne 14.4

Sõjalaevalt lastakse rakett välja horisontaalse algkiirusega V_x ja vertikaalse algkiirusega V_y. Raketi laskekaugus on

$$R(V_x, V_y) = \frac{2V_xV_y}{g},$$

kus g on raskuskiirendus. Raketi kineetiline energia on fikseeritud:

$$\frac{m(V_x^2 + V_y^2)}{2} = E.$$

Leidke raketi maksimaalne laskekaugus.

Lahendus

Füüsikalisi omadusi kasutades, eeldame et $0 \le V_x, V_y$. Märkame, et kui V_x või V_y võrduks nulliga, siis raketi laskekaugus oleks samuti null. Olgu nüüd $0 < V_x, V_y$. Leiame funktsiooni tinglikud ekstreemumid. Selleks koostame Lagrange'i funktsiooni

$$J(V_x, V_y, \lambda) = \frac{2V_xV_y}{g} + \lambda\left(\frac{m(V_x^2 + V_y^2)}{2} - E\right).$$

Leiame selle funktsiooni osatuletised

$$\begin{aligned}
J'_{V_x} &= \frac{2V_y}{g} + \lambda m V_x,\\
J'_{V_y} &= \frac{2V_x}{g} + \lambda m V_y,\\
J'_{\lambda} &= \frac{m(V_x^2 + V_y^2)}{2} - E.
\end{aligned}$$

Ja võrdsustame need nulliga, et saada järgmise võrrandisüsteemi

$$\begin{cases}
\dfrac{2V_y}{g} + \lambda m V_x = 0,\\
\dfrac{2V_x}{g} + \lambda m V_y = 0,\\
\dfrac{m(V_x^2 + V_y^2)}{2} - E = 0.
\end{cases}$$

Avaldame esimesest kahest võrrandist Lagrange'i kordaja λ.

$$\begin{cases}
\lambda = -\dfrac{2V_y}{gmV_x},\\
\lambda = -\dfrac{2V_x}{gmV_y},\\
\dfrac{m(V_x^2 + V_y^2)}{2} - E = 0.
\end{cases}$$

Esimese kahe võrrandi võrdusest saame, et

$$-\frac{2V_y}{gmV_x} = -\frac{2V_x}{gmV_y} \Leftrightarrow V_y^2 = V_x^2 \Leftrightarrow V_y = V_x.$$

Siit tuleb välja, et $\lambda = -\dfrac{2}{gm}$ ning võrrandisüsteemi viimasest võrdusest saame

$$\frac{m(V_x^2+V_y^2)}{2} - E = 0 \Leftrightarrow \frac{m(2V_x^2)}{2} = E \Leftrightarrow V_x^2 = \frac{E}{m}.$$

Saime tingliku statsionaarse punkti $\left(\sqrt{\frac{E}{m}}, \sqrt{\frac{E}{m}}\right)$. Uurime, kas tegemist on tingliku lokaalse ekstreemumiga, selleks leiame kõik teist järku osatuletised

$$J''_{V_xV_x} = \lambda m, \qquad J''_{V_yV_y} = \lambda m, \qquad J''_{V_xV_y} = \frac{2}{g}.$$

Kuna $J''_{V_xV_x} = \lambda m = -\frac{2}{g} < 0$, siis võib olla on tegemist lokaalse maksimumiga. Kui uurime ekstreemumi piisavaid tingimusi selgub, et

$$W = \begin{vmatrix} J''_{V_xV_x} & J''_{V_xV_y} \\ J''_{V_yV_x} & J''_{V_yV_y} \end{vmatrix} = \lambda^2 m^2 - \frac{4}{g^2} = \frac{4}{g^2} - \frac{4}{g^2} = 0.$$

Kuna determinant on võrdne nulliga, tuleb funktsiooni selles punktis täiendavalt uurida. Uurime, kuidas funktsiooni R väärtus käitub selle punkti ümbruses. Raketi kineetilise energia valemist saame, et $V_y = \sqrt{\frac{2E}{m} - V_x^2}$. Siis $R(V_x, V_y) = R(V_x) = \frac{2V_x\sqrt{\frac{2E}{m} - V_x^2}}{g}$. Olgu $|\Delta x|$ küllaltki väike, siis $R\left(\sqrt{\frac{E}{m}}\right) - R\left(\sqrt{\frac{E}{m}} + \Delta x\right) = \frac{2E}{mg} - \frac{2E - m(\Delta x)^2}{mg} \geq 0$. Järelikult on tegemist maksimumpunktiga ja raketi maksimaalne laskekaugus on $\frac{2E}{mg}$.

Tuletis antud suunas, gradient

Ülesanne 14.10

Temperatuur $T(x, y)$ (kraadi °C) igas punktis xy-tasandil on $T(x, y) = x^2 e^{-y}$. Millises suunas kasvab temperatuur punktis $(2, 1)$ kõige kiiremini? Mis on see suurim kasvukiirus selles punktis?

Lahendus

Leiame funktsiooni $T(x, y)$ gradiendi punktis $(2, 1)$, sest gradient on vektor, mis näitab pinna kiireima tõusu suunda. Funktsiooni $T(x, y)$ gradient avaldub kujul

$$\nabla T(x, y) = (T'_x(x, y), T'_y(x, y)).$$

Leiame seega funktsiooni $T(x, y)$ osatuletised

$$T'_x(x, y) = 2xe^{-y}, \qquad T'_y(x, y) = -x^2 e^{-y}.$$

Leiame nüüd gradiendi punktis $(2, 1)$

$$\nabla T(2, 1) = (T'_x(2, 1), T'_y(2, 1)) = (2 \cdot 2e^{-1}, -2^2 e^{-1}) = (4e^{-1}, -4e^{-1}) = \frac{4}{e}(1, -1).$$

Saime, et temperatuur muutub kõige rohkem suunas $(1, -1)$ ja selle kasvukiirus selles punktis on gradiendi vektori pikkus ehk

$$|\nabla T(2, 1)| = \left| \frac{4}{e} \cdot (1, -1) \right| = \frac{4}{e} \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{e}.$$

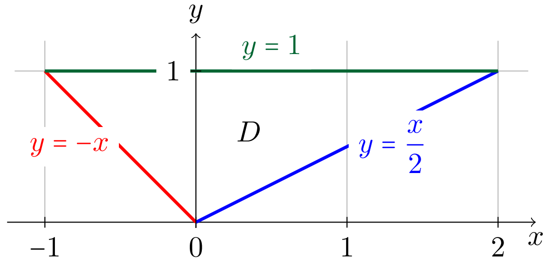
Kahekordse integraali arvutamine

Ülesanne 15.1

Joonistage integreerimispiirkond D ning asetage integreerimisrajad kahekordses integraalis, kui D on kolmnurk tippudega $(0,0),(2,1),(-1,1)$.

Lahendus

Joonistame integreerimispiirkonna D.



Kui integreerida alguses argumendi y järgi ja siis argumendi x järgi, siis peame esitama argumendi x piirkonnas $[a,b]$ ja argument y funktsioonina argumendist x. Jooniselt on näha, et argument x muutub lõigus $[-1,2]$, aga argument y jaoks saame $\varphi(x) \le y \le 1$, kusjuures

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x, \text{ kui } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{x}{2}, \text{ kui } 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Seega peame integreerimispiirkonna jaotama kaheks sirgega $x = 0$ ja saame integraali kujul

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} f(x,y)\,dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{1} f(x,y)\,dy.$$

Kui integreerida alguses argumendi x järgi ja siis argumendi y järgi, siis peame esitama argumendi y piirkonnas $[a,b]$ ja argument x funktsioonina argumendist y. Jooniselt on näha, et argument y muutub lõigus $[0,1]$, ja argument x jaoks saame $-y \le x \le 2y$. Seega integraal esitub kujul

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{-y}^{2y} f(x,y)\,dx.$$

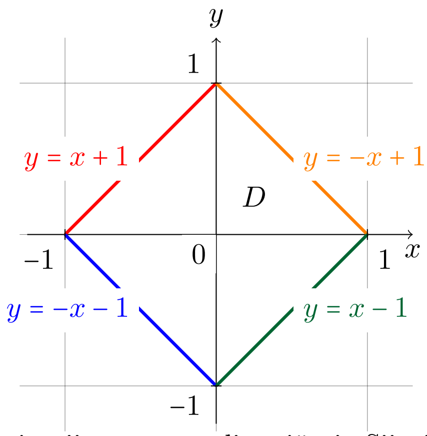
Kahekordse integraali arvutamine

Ülesanne 15.3

Leidke integraal $\iint_D (y - 2x^2)\,dx\,dy$, kus D on piiratud kinnise joonega $|x| + |y| = 1$.

Lahendus

Joonistame integreerimispiirkonna D.



Integreerime alguses argumendi y järgi ja siis argumendi x järgi. Siis jooniselt on näha, et argument x muutub lõigus $[-1, 1]$ ja argument y jaoks saame $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, kus

$$y_1(x) = \begin{cases} -x-1, & -1 \le x \le 0 \\ x-1, & 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{ja } y_2(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ -x+1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Seega peame integreemispiirkonna jaotama kaheks sirgega $x = 0$. Saame integraali

$$\iint_D (y-2x^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1}(y-2x^2)\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{-x+1}(y-2x^2)\,dy\,dx =$$
$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{y^2}{2} - 2x^2y\right)\Bigg|_{y=-x-1}^{y=x+1} dx + \int_{0}^{1}\left(\frac{y^2}{2} - 2x^2y\right)\Bigg|_{y=x-1}^{y=-x+1} dx =$$
$$= \int_{-1}^{0}(-4x^3 - 4x^2)\,dx + \int_{0}^{1}(4x^3 - 4x^2)\,dx = \left(-x^4 - \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(x^4 - \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1} = 1 - \frac{4}{3} + 1 - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}.$$

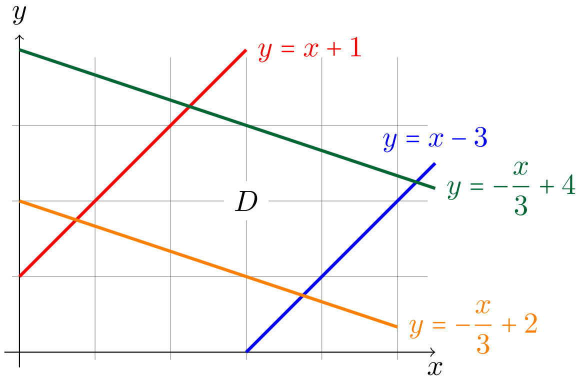
Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Ülesanne 16.1

Leidke integraal $\iint_D (y-x)dxdy$, kus D on rööpkülik, mis on piiratud sirgetega $y = x+1, y = x-3, y = -\dfrac{x}{3}+2$ ja $y = -\dfrac{x}{3}+4$.

Lahendus

Joonistame integreerimispiirkonna D.



Kui me integreeriks otse argumentide x ja y järgi, siis me peaks jaotama integreerimispiirkonna kolmeks osaks. Kui me aga integreeriks rööpküliku külgede järgi, siis saaksime integreerimispiirkonnaks ristküliku, mis oleks palju lihtsam. Vaatame alguses punast ja sinist joont, kui viime y ja x samale poole võrdusmärki, saame $y-x=1$ ja $y-x=-3$. Need annavad piirid suurusele $y-x$ piirkonnas D. Seega piirkonnas D kehtib võrratus $-3 \le y-x \le 1$ ja analoogiliselt rohelise ja oranži joonega kehtib $2 \le y + \dfrac{x}{3} \le 4$. Arvutuste lihtsustamiseks teeme muutujavahetuse

$$u = y - x, \qquad v = y + \frac{x}{3}, \qquad (u,v) \in \Delta.$$

Integreerimispiirkond Δ on eelnevate võrratuste põhjal ristkülik

$$\Delta = \{(u,v)\colon -3 \le u \le 1, 2 \le v \le 4\}.$$

Muutujavahetuse jakobiaan on kujul

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{4}{3} \neq 0.$$

Omadusest $|J(u,v)| = \dfrac{1}{|J(x,y)|}$ saame, et $|J(u,v)| = \dfrac{3}{4}$.
Seega saame integraali

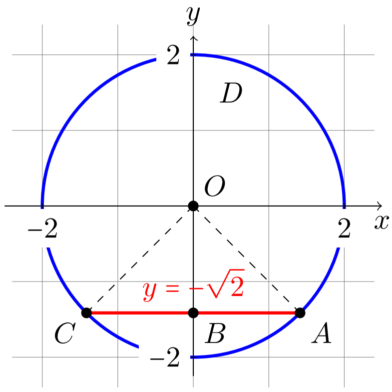
$$\int_{-3}^{1}\int_{2}^{4} u\cdot\frac{3}{4}\,dv\,du = \frac{3}{4}\int_{-3}^{1}\int_{2}^{4} u\,dv\,du = \frac{3}{4}\int_{-3}^{1} uv\Big|_{v=2}^{v=4} du = \frac{3}{4}\int_{-3}^{1} 2u\,du = \frac{3}{4}\cdot u^2\Big|_{-3}^{1} = \frac{3}{4}(1-9) = -6.$$

Üleminek polaarkoordinaatidele

Ülesanne 16.3

Leidke integraal $\iint_D dxdy$, kus $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 4, y \ge -\sqrt{2}\}$, minnes üle polaarkoordinaatidele.

Lahendus



Joonistame integreerimispiirkonna D. Polaarkoordinaatidele üle minnes teeme muutujavahetuse $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ Selle muutujavahetuse jakobiaan on

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Sirge $y = -\sqrt{2}$ avaldub polaarkoordinaatides kujul $r\sin\varphi = -\sqrt{2}$, kus $r = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sin\varphi}$.

Teame, et $|OA| = 2$ ja $|OB| = \sqrt{2}$, siis $\cos\angle BOA = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, millest saame, et nurk $\angle BOA = \dfrac{\pi}{4}$. Kuna kolmnurk OAC on võrdhaarne, siis järelikult $\angle AOC = \dfrac{\pi}{2}$ ehk täisnurk. Kokkuvõttes saame integreerimispiirkonna esitada kujul

$$\Delta = \{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le \varrho(\varphi)\}, \text{ kus } \varrho(\varphi) = \begin{cases} 2, \text{ kui } 0 \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}, \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sin\varphi}, \text{ kui } \frac{5\pi}{4} \le \varphi \le \frac{7\pi}{4}, \\ 2, \text{ kui } \frac{5\pi}{4} \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Seega integreerimispiirkond on kolmeosaline ja integraali esitame kujul

$$\iint_D dx\,dy = I_1 + I_2 + I_3,$$

kus

$$I_1 = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^2 r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^2 d\varphi = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} 2\,d\varphi = 2\varphi\bigg|_0^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{5\pi}{2},$$

$$I_2 = \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \int_0^2 r\,dr\,d\varphi = \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^2 d\varphi = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} 2\,d\varphi = 2\varphi\bigg|_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$I_3 = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_0^{\frac{-\sqrt{2}}{\sin\varphi}} r\,dr\,d\varphi = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{\frac{-\sqrt{2}}{\sin\varphi}} d\varphi = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2\varphi}\,d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\bigg|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} = 2.$$

Kokkuvõttes $\iint_D dx\,dy = 3\pi + 2$.

Märkus!

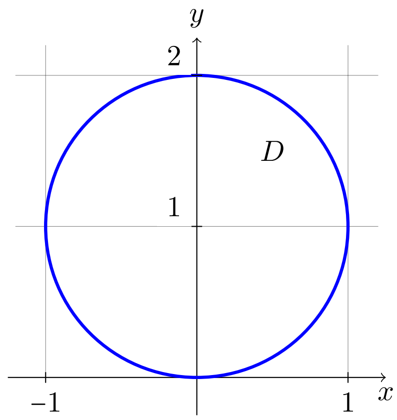
Kuna integreerimispiirkonna pindala avaldub valemiga $\iint_D dx\,dy$, siis eelmises ülesandes saaksime $I_1 + I_2$ asemel kasutada ringi pindala valemit, millest $I_1 + I_2 = \dfrac{3}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 = 3\pi$.

Üleminek polaarkoordinaatidele

Ülesanne 16.4

Leidke integraal $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kus $D = \{(x,y)\colon x^2+(y-1)^2 \le 1\}$.

Lahendus



Joonistame integreerimispiirkonna D. Polaarkoordinaatidele üle minnes teeme järgneva muutujavahetuse

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Selle põhjal saame jakobiaaniks $J(r,\varphi) = r$, ning

integreeritava funktsiooni kujul

$$\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} = |r| = r.$$

Esitame ringjoone $x^2+(y-1)^2 = 1$ polaarkoordinaatides

$$\begin{aligned} &r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi - 1)^2 = 1 \\ &r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2r\sin\varphi + 1 = 1 \\ &r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) - 2r\sin\varphi = 0 \\ &r(r-2\sin\varphi) = 0 \end{aligned}$$

Võrdus $r(r-2\sin\varphi) = 0$ kehtib nullpunktis $(r=0)$ ja siis kui $r = 2\sin\varphi$. Kui $\pi < \varphi < 2\pi$, siis polaarraadius $r = 2\sin\varphi < 0$ ja kui $0 \le \varphi \le \pi$, siis $r \ge 0$. Seega $0 \le \varphi \le \pi$ ning integreerimispiirkond omandab kuju

$$\Delta = \{0 \le \varphi \le \pi, 0 \le r \le 2\sin\varphi\}.$$

Seega meie integraal on

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\varphi} r\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^\pi \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^\pi \sin^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^\pi \left(\frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}\right) d\varphi = \frac{8}{3}\cdot \left.\frac{\frac{\cos 3\varphi}{3} - 3\cos\varphi}{4}\right|_0^\pi = \frac{2}{9}(-8\cos\pi)\Big|_0^\pi = \frac{2}{9}\cdot(8+8) = \frac{32}{9}.$$

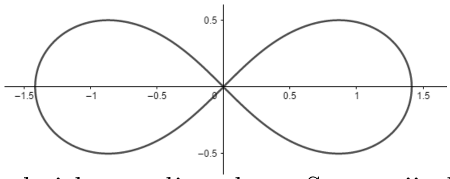
Tasandilise kujundi pindala

Ülesanne 17.1

Leidke xy-tasandil asetseva kujundi pindala, kui kujund on piiratud joonega $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ (Bernoulli lemniskaat).

Lahendus

Vaatleme joonist integreerimispiirkonnast.



Jooniselt on näha, et kujund on sümmeetriline nii y-telje kui ka x-telje suhtes. Seega piisab, kui leiame selle kujundi pindala S_D I veerandis ning kogupindala jaoks korrutame saadud pindala neljaga. Tasandilise kujundi D pindala avaldub integraalina $S_D = \iint_D dx\,dy$. Arvutuste lihtsustamiseks läheme üle polaarkoordinaatidele

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Siis kujundit piirav joon omandab kuju

$$\begin{aligned} (r^2\cos^2\varphi)^2 &= 2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi) \\ (r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi))^2 &= 2r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) \\ r^4 &= 2r^2\cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Võrdus $r^4 = 2r^2\cos 2\varphi$ kehtib nullpunktis $(r=0)$ ja siis kui $r^2 = 2\cos 2\varphi$ ehk $r = \sqrt{2\cos 2\varphi}$. Hetkel huvitab meid ainult kujundi pindala I veerandis. Paneme tähele, et polaarraadiuse juurealune $2\cos 2\varphi < 0$, kui $\varphi > \frac{\pi}{4}$, seega peab $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Kokkuvõttes $0 \le r \le \sqrt{2\cos 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ ja muutujavahetuse jakobiaan on $J(r,\varphi) = r$. Kujundi pindala esimeses veerandis on järelikult

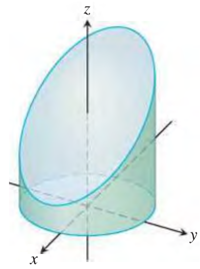
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Kogu kujundi pindala on seega $S_D = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$.

Keha ruumala

Ülesanne 17.5

Leidke keha E ruumala, kui see on tõkestatud pindadega
$x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ x + z = 3.$



Lahendus

Keha ruumala esitub valemina $V_E = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, kui kujundi põhi ehk D on tasandil $z = 0$.
Üldjuhul kehtib valem

$$V_E = \iiint_E dx\,dy\,dz. \qquad (*)$$

Võrrandist $x^2 + y^2 = 4$ saame, et kui $-2 \le x \le 2$, siis y esitub funktsioonina argumendist x ning kehtivad võrratused $-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$ ning võrranditest $z = 0$, $x + z = 3$ ja et $x \le 2$ saame, et $0 \le z \le 3 - x$.
Kasutades valemit $(*)$ saame keha ruumala leidmiseks integraali

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{3-x} dz\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(3-x)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} 2(3-x)\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Seda viimast on sellisel kujul üpriski tülikas integreerida. Läheme seega äsja saadud kahekordses integraalis üle polaarkoordinaatidele. Polaarkoordinaatides esitub silinder $x^2+y^2 = 4$ kujul $r^2 = 4$, millest saame $0 \le r \le 2$ ja $0 \le \varphi \le 2\pi$. Muutujavahetuse jakobiaan on $J(r,\varphi) = r$. Järelikult saame kahekordse integraali esitada kujul

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (3 - r\cos\varphi)r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3r - r^2\cos\varphi)\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^2 d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(6 - \frac{8}{3}\cos\varphi\right)d\varphi = \left(6\varphi - \frac{8}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi.$$

Kokkuvõttes saime keha E ruumalaks $V_E = 12\pi$.

Märkus!

Ülesandes esinev kahekordne integraal ühtib integraaliga, mis saaksime kasutades valemit $V_E = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, kus $z = f(x,y) = 3 - x$.

Keha ruumala

Ülesanne 17.6

Leidke keha E ruumala V_E, mis on piiratud järgnevate pindadega: koordinaattasandid, silinder $x^2+y^2=1$ ja pind $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, kus $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$ ja $y\ge 0$.

Lahendus

Kasutame ruumala leidmiseks valemit $V_E=\iiint_E dx\,dy\,dz$.

Ülesande tekstist saame, et $0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$, ning tingimustest $x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1$ saame, et kui $0\le x\le 1$, siis y esitub funktsioonina argumendi x järgi ning $0\le y\le\sqrt{1-x^2}$. Seega

$$V_E=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dy\,dx,$$

mille edasi integreerimine sellisel kujul oleks päris keeruline. Läheme üle polaarkoordinaatidele. Siis

$$\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{4-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}=\sqrt{4-r^2}.$$

Polaarnurk φ on $x\ge 0, y\ge 0$ tõttu $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ ning polaarraadius r on tingimuse $x^2+y^2\le 1$ tõttu $0\le r\le 1$. Muutujavahetuse jakobiaan on $J(r,\varphi)=r$.
Seega polaarkoordinaatidele üleminnes saame

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\sqrt{4-r^2}\,d\varphi\,dr=\int_0^1\frac{\pi}{2}r\sqrt{4-r^2}\,dr=$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,dr$$

Diferentsiaalmärgi alla viimise võtte abil ($d(4-r^2)=(4-r^2)'\,dr=-2r\,dr$)

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,dr=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{-\sqrt{4-r^2}}{2}\,d(4-r^2)=\frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{-(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{8}{3}-\sqrt{3}\right)=\frac{\pi(8-3\sqrt{3})}{6}.$$

Kokkuvõttes keha E ruumala on $V_E=\dfrac{\pi(8-3\sqrt{3})}{6}$.

Märkus!

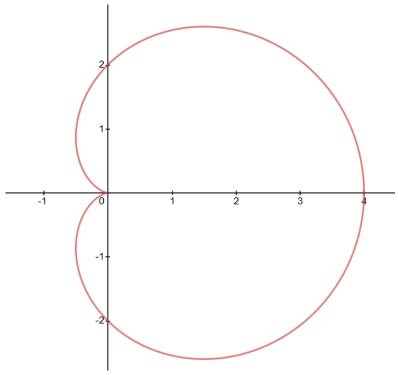
Ülesandes esinev kahekordne integraal ühtib integraaliga, mis saaksime kasutades keha ruumala leidmiseks valemit $V_E=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, kus $z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Tasandilise kujundi massikese

Ülesanne 17.14

Leidke xy-tasandil asetseva homogeense kujundi massikeskme $C = (\bar{x}, \bar{y})$ koordinaadid, kui kujund on piiratud joontega: kardioid $r = 2(1 + \cos\varphi)$ ja polaartelg $\varphi = 0$.

Lahendus



Massikese asub punktis $C = (\bar{x}, \bar{y})$, kus

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{m_D} \displaystyle\iint_D x\varrho(x,y)\,dx\,dy \\ \bar{y} = \dfrac{1}{m_D} \displaystyle\iint_D y\varrho(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

ning kus m_D on keha mass, mis on leitav integraaliga

$$m_D = \iint_D \varrho(x,y)\,dx\,dy.$$

Homogeense kujundi tihedus on konstantne iga kujundi punkti korral ehk $\varrho(x,y) = \varrho$ iga x, y korral. Kuna piiravad jooned on juba esitatud polaarkoordinaatides, siis teeme muutujavahetuse polaarkoordinaatidele. Ülesande teksti põhjal $0 \le \varphi \le \pi$ ning $0 \le r \le 2(1 + \cos\varphi)$ ja muutujavahetuse jakobiaan on $J(r,\varphi) = r$. Leiame keha massi.

$$m_D = \iint_D \varrho\,dx\,dy = \int_0^\pi \int\limits_0^{2(1+\cos\varphi)} \varrho r\,dr\,d\varphi = \varrho \int_0^\pi \int\limits_0^{2(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \varrho \int_0^\pi \frac{(2(1+\cos\varphi))^2}{2}\,d\varphi =$$
$$= \varrho \int_0^\pi 2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = 2\varrho \int_0^\pi \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$
$$= 2\varrho \left(\frac{3\varphi}{2} + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^\pi = 3\pi\varrho.$$

Leiame massikeskme $\bar{y}$ koordinaadi

$$\bar{y} = \frac{1}{3\pi\varrho} \int_0^\pi \int\limits_0^{2(1+\cos\varphi)} \varrho r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{1}{3\pi\varrho}\varrho \int_0^\pi \int\limits_0^{2(1+\cos\varphi)} r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi \frac{(2(1+\cos\varphi))^3}{3} \sin\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi \frac{(2(1+\cos\varphi))^3}{3} \sin\varphi\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi \frac{8}{3}(1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi\,d\varphi = \frac{8}{9\pi} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi\,d\varphi =$$
$$= \frac{8}{9\pi} \int_0^\pi -(1+\cos\varphi)^3\,d(\cos\varphi + 1) = \frac{8}{9\pi} \frac{-(1+\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_0^\pi = \frac{8}{9\pi}(0 + 4) = \frac{32}{9\pi}.$$

Leiame nüüd massikeskme $\bar{x}$ koordinaadi

$$\bar{x} = \frac{1}{3\pi\varrho} \int_0^\pi \int\limits_0^{2(1+\cos\varphi)} \varrho r^2 \cos\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{1}{3\pi\varrho}\varrho \int_0^\pi \int\limits_0^{2(1+\cos\varphi)} r^2 \cos\varphi\,dr\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi \frac{(2(1+\cos\varphi))^3}{3} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi \frac{8}{3}(1+\cos\varphi)^3 \cos\varphi\,d\varphi =$$
$$= \frac{8}{9\pi} \int_0^\pi (\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi)\,d\varphi.$$

Integreerime igat liidetavat eraldi. Teise ja neljanda integraali juures kasutame valemit

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}.$$

Saame

$$\int_0^\pi \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi\Big|_0^\pi = 0,$$

$$\int_0^\pi 3\cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi 3\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \left(\frac{3\varphi}{2} + \frac{3\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^\pi = \frac{3\pi}{2},$$

$$\int_0^\pi 3\cos^3\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi 3(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi 3(1-\sin^2\varphi)\, d\sin\varphi =$$

$$= (3\sin\varphi - \sin^3\varphi)\Big|_0^\pi = 0,$$

$$\int_0^\pi \cos^4\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \int_0^\pi \frac{1+2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos^2 2\varphi}{4}\right) d\varphi = \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1+\cos 4\varphi}{8}\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8}\right) d\varphi = \frac{3\pi}{8}.$$

Kokkuvõttes

$$\bar{x} = \frac{8}{9\pi}\int_0^\pi (\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi)\, d\varphi = \frac{8}{9\pi}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = \frac{8}{9\pi}\cdot\frac{15\pi}{8} = \frac{5}{3}.$$

Kujundi massikese on seega punktis $C = \left(\frac{5}{3}, \frac{32}{9\pi}\right)$.

Kolmekordse integraali arvutamine

Ülesanne 18.2

Leidke integraal $\iiint_E \frac{dx\,dy\,dz}{1-x-y}$, kus $E = \{(x,y,z)\colon 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 5,\ 2 \le z \le 4\}$.

Lahendus

$$\iiint_E \frac{dx\,dy\,dz}{1-x-y} = \int_2^4 \int_2^5 \int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{1-x-y} = \int_2^4 \int_2^5 -\ln|1-x-y|\Big|_0^1 dy\,dz =$$
$$= \int_2^4 \int_2^5 (-\ln|-y| + \ln|1-y|)\,dy\,dz$$

Kuna $y \ge 2$, siis $|-y| = y$ ja $|1-y| = y-1$. Saame

$$\int_2^4 \int_2^5 (\ln(y-1) - \ln y)\,dy\,dz = \int_2^4 \int_2^5 \ln(y-1)\,dy\,dz - \int_2^4 \int_2^5 \ln y\,dy\,dz.$$

Integraalid $\int_2^5 \ln(y-1)\,dy$ ja $\int_2^5 \ln y\,dy$ leiame ositi integreerides.

$$\int_2^5 \ln(y-1)\,dy = y\ln(y-1)\Big|_2^5 - \int_2^5 \frac{y}{y-1}\,dy = 5\ln 4 - \int_2^5 \frac{y-1+1}{y-1}\,dy =$$
$$= 5\ln 4 - \int_2^5 \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) dy = 5\ln 4 - 5 - \ln 4 + 2 = 4\ln 4 - 3$$

Ning analoogiliselt

$$\int_2^5 \ln y\,dy = 5\ln 5 - 2\ln 2 - 3.$$

Kokkuvõttes

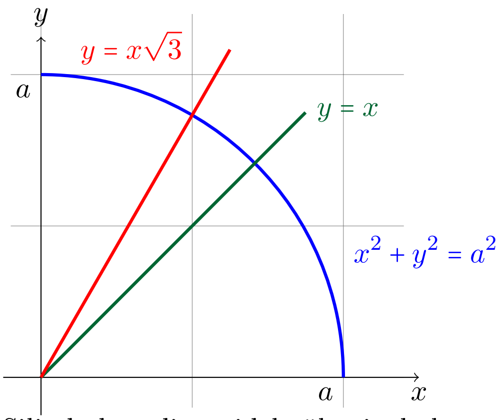
$$\int_2^4 \int_2^5 \ln(y-1)\,dy\,dz - \int_2^4 \int_2^5 \ln y\,dy\,dz = \int_2^4 (4\ln 4 - 3)\,dz - \int_2^4 (5\ln 5 - 2\ln 2 - 3)\,dz =$$
$$= \int_2^4 (4\ln 4 - 5\ln 5 + 2\ln 2)\,dz = 2(4\ln 4 - 5\ln 5 + 2\ln 2) = 2(4\ln 4 - 5\ln 5 + \ln 4) = 10\ln\frac{4}{5}.$$

Üleminek silinderkoordinaatidele

Ülesanne 18.3

Üleminekuga silinderkoordinaatidele leidke integraal $\iiint_E xz\,dx\,dy\,dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=a^2$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$ ja tasanditega $z=0, z=1,\ y=x$ ja $y=x\sqrt{3}$.

Lahendus



Silinderkoordinaatidele üleminekul teeme järgneva muutujavahetuse

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h. \end{cases}$$

Selle jakobiaan on sama, mis polaarkoordinaatidele üleminekul ehk $J(r,\varphi,h)=r$.
Sellisel üleminekul silindri võrrand esitub kujul $(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=a^2$, millest $r^2=a^2$ ehk piirkonnas E kehtib $0\leq r\leq a$.
Tingimustest $x\geq 0, y\geq 0$ saame, et piirkonnas E kehtib $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$.
Võrdus $y=x$ esitub kujul $r\sin\varphi=r\cos\varphi$. See võrdus kehtib nullpunktis ja kui $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\tan\varphi=1$ ehk saime üheks piiravaks tasandiks $\varphi=\frac{\pi}{4}$.
Analoogiliselt saame võrdusest $y=x\sqrt{3}$ teise piirava tasandi $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Kokkuvõttes $\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$.
Argumendi h puhul kehtib $0\leq h\leq 1$. Kokkuvõttes saame integraali

$$\iiint_E xz\,dx\,dy\,dz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^a\int_0^1 r\cos\varphi\ hr\,dh\,dr\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^a r^2\cos\varphi\ \frac{h^2}{2}\Big|_0^1\,dr\,d\varphi =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^a \frac{1}{2}r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^a r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{a^3}{3}\cos\varphi\,d\varphi =$$
$$= \frac{a^3}{6}\sin\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{a^3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{12}.$$

Üleminek sfäärkoordinaatidele

Ülesanne 19.1

Üleminekuga sfäärkoordinaatidele leidke integraal $\iiint_E \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, kus E on kera $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Lahendus

Sfäärilistele koordinaatidele üle minnes teeme muutujavahetuse

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

kus $r \ge 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ ning $\theta \in [0, \pi]$. Selle muutujavahetuse jakobiaan on

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Avaldis $x^2+y^2+(z-2)^2$ on seega sfäärkoordinaatides $r^2-4r\cos\theta+4$.
Kuna tegemist on keraga, mille keskpunkt on nullpunktis, raadiusega 1, siis $0 \le r \le 1$ ning $0 \le \varphi \le 2\pi$.
Saame, et integraal sfäärilistes koordinaatides on

$$\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\,d\varphi\,d\theta\,dr = \int_0^1\int_0^\pi \frac{2\pi r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\,d\theta\,dr.$$

Kui integreerime θ järgi, siis suhtume argumenti r kui konstanti, sel juhul

$$d(r^2-4r\cos\theta+4) = (r^2-4r\cos\theta+4)'_\theta\,d\theta = 4r\sin\theta\,d\theta.$$

Seega diferentsiaalimärgi alla viies saame integraali kujul

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^\pi \frac{\frac{\pi}{2}r\,d(r^2-4r\cos\theta+4)}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\,dr &= \int_0^1\int_0^\pi \pi r\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\,dr = \\ &= \int_0^1 \pi r\left(\sqrt{(r+2)^2}-\sqrt{(r-2)^2}\right)dr = \\ &= \int_0^1 \pi r(|r+2|-|r-2|)\,dr.\end{aligned}$$

Et $r+2>0$ ning $r-2<0$, siis $|r+2| = r+2$ ja $|r-2| = -(r-2)$. Seega saame integraali

$$\int_0^1 \pi r(r+2-(-(r-2)))\,dr = \int_0^1 \pi r(r+2+r-2))\,dr \int_0^1 2\pi r^2\,dr = \frac{2\pi}{3}.$$

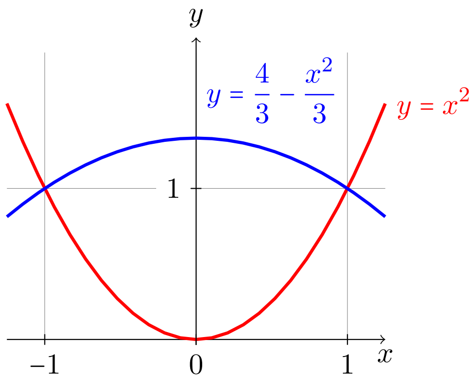
Keha ruumala leidmine

Ülesanne 19.2

Leidke keha ruumala, mis on piiratud pindadega: silindrid $y = x^2$ ja $3y = 4 - x^2$ ning tasandid $z = 0$ ja $z = 9$.

Lahendus

Kasutame keha ruumala leidmiseks valemit $V_E = \iiint_E dx\,dy\,dz$. Vaatleme keha joonist xy-tasandil. Näeme, et kehas E esitub argument y funktsioonina argumendist x ning $x^2 \le y \le \frac{4}{3} - \frac{x^2}{3}$.



Leiame silindrite $y = x^2$ ja $3y = 4 - x^2$ lõikepunktid xy-tasandil. Selleks lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} y = x^2 \\ 3y = 4 - x^2 \end{cases}$, kasutame asendusvõtet, asendades teises võrrandis y esimese võrrandi y väärtusega. Saame teiseks võrrandiks $3x^2 = 4 - x^2$, kust tuleb, et $x^2 = 1$ ehk $x \in \{-1, 1\}$ ning esimesest võrrandist järelikult $y = 1$. Nüüd teame, et $-1 \le x \le 1$.

Seega keha ruumala leiame kolmekordse integraaliga

$$\int_0^9 \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{\frac{4}{3}-\frac{x^2}{3}} dy\,dx\,dz = \int_0^9 \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{3} - \frac{4x^2}{3}\right) dx\,dz = \int_0^9 \frac{16}{9}\,dz = 16.$$

Keha mass ja massikese

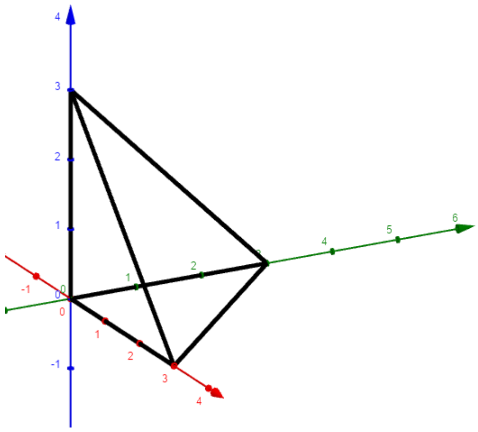
Ülesanne 19.8

Leidke tasanditega $x + y + z = a, x = 0, y = 0$ ja $z = 0$ piiratud püramiidi mass, kui püramiidi tihedus igas punktis on võrdne punkti aplikaadiga.

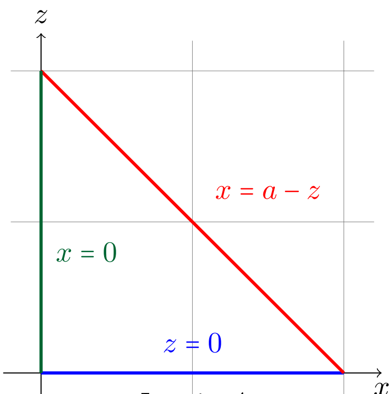
Lahendus

GeoGebraga tehtud joonis, kus $a = 3$. Punane telg on x-telg, roheline on y-telg ning sinine on z-telg.
Keha E massi leidmiseks kasutame valemit

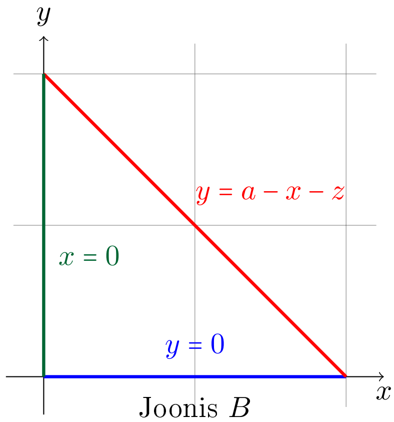
$$m_E = \iiint_E \varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$



Ülesande teksti põhjal püramiidi tihedus punktis (x, y, z) on $\varrho(x, y, z) = z$.
Määrame kindlaks integraali rajad. Selle jaoks aitab joonise tegemine.



Joonis A



Joonis B

Joonis A on keha väljalõige xz-tasandil. Joonis B on keha väljalõige tasandiga, mis on paralleelne xy-tasandiga. Kolmekordse määratud integraali $\iiint_E dx\, dy\, dz$ vastuses ei tohi esineda muutujaid x, y ja z. Seega peab vähemalt välise integraali raja väärtused olema konstantsed. Valime selleks argumendi z, siis $z \in [0, a]$. Valime, et keskmises integraalis integreeriksime argumendi x järgi. Kuna z on meil juba fikseeritud, siis argument x esitub funktsioonina $x(z)$ ning joonise A põhjal $0 \le x \le a - z$. Selliste valikute korral integreerime järelikult sisemises integraalis argumendi y järgi, ning kuna argumendid x ja z on juba fikseeritud, siis y esitub funktsioonina $y(x, z)$ ning jooniselt B tuleb $0 \le y \le a - x - z$. Seega saame integraali

$$\begin{aligned} m_E &= \int_0^a \int_0^{a-z} \int_0^{a-x-z} z\, dy\, dx\, dz = \int_0^a \int_0^{a-z} (az - xz - z^2)\, dx\, dz = \\ &= \int_0^a \left(az(a - z) - \frac{z(a - z)^2}{2} - z^2(a - z) \right) dz = \int_0^a \left(\frac{a^2 z}{2} - z^2 a + \frac{z^3}{2} \right) dz = \\ &= \left(\frac{a^2 z^2}{4} - \frac{z^3 a}{3} + \frac{z^4}{8} \right) \Bigg|_0^a = \frac{a^4}{24}. \end{aligned}$$

Keha mass on järelikult $m_E = \dfrac{a^4}{24}$.

Keha mass ja massikese

Ülesanne 19.14

Leidke homogeense keha massikeskme koordinaadid, kui keha on piiratud pindadega $x + y + z = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Lahendus

Keha E massikeskme $C = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ leidmiseks kasutame valemit

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{m_E} \iiint_E x\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ \bar{y} = \dfrac{1}{m_E} \iiint_E y\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ \bar{z} = \dfrac{1}{m_E} \iiint_E z\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \end{cases}$$

kus m_E on keha mass, mis on leitav valemiga

$$m_E = \iiint_E \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Paneme tähele, et ülesandes olev keha on sarnane kehaga, mis on ülesandes 19.8. Ainukeseks erinevuseks on see, et tasandi võrrandis on väärtus a asendatud arvuga 4. Seega integraali rajade leidmine toimub analoogiliselt ning keha massiks saame

$$\begin{aligned} m_E &= \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_0^{4-x-z} \varrho\,dy\,dx\,dz = \varrho \int_0^4 \int_0^{4-z} (4-x-z)\,dx\,dz = \\ &= \varrho \int_0^4 \left(4(4-z) - \frac{(4-z)^2}{2} - (4-z)z \right) dz = \varrho \int_0^4 \left(8 + \frac{z^2}{2} - 4z \right) dz = \\ &= \varrho \left(8z + \frac{z^3}{6} - 2z^2 \right) \Bigg|_0^4 = \varrho \left(32 + \frac{32}{3} - 32 \right) = \frac{32\varrho}{3}. \end{aligned}$$

Leiame nüüd massikeskme koordinaadi $\bar{z}$.

$$\bar{z} = \frac{3}{32\varrho} \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_0^{4-x-z} \varrho z\,dy\,dx\,dz = \frac{3}{32} \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_0^{4-x-z} z\,dy\,dx\,dz.$$

Paneme tähele, et ülesandes 19.8 juba leidsime sarnase integraali, kasutame ära teadmist, et

$$\int_0^a \int_0^{a-z} \int_0^{a-x-z} z\,dy\,dx\,dz = \frac{a^4}{24}$$

ning saame, et

$$\bar{z} = \frac{3}{32} \cdot \frac{4^4}{24} = \frac{3}{32} \cdot \frac{32}{3} = 1.$$

Massikeskme koordinaadid $\bar{x}$ ning $\bar{y}$ on analoogiliselt võrdsed ühega.
Kokkuvõttes keha massikese asub punktis $C = (1, 1, 1)$.

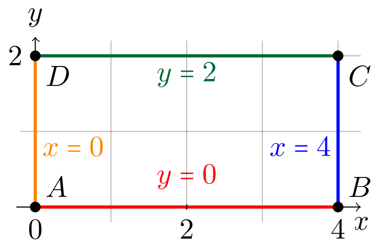
Esimest liiki joonintegraalid

Ülesanne 20.1

Arvutage integraal $\int_L xy\,ds$, kui L on ristküliku $ABCD$ kontuur, kus $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (4,2)$, $D = (0,2)$.

Lahendus

Arvutame joonintegraali iga ristküliku serva kohta eraldi.



Lõigus AB kehtivad võrratused $0 \le x \le 4$ ning y esitub funktsioonina $y(x) = 0$. Joonintegraal üle lõigu AB on seega

$$\int_{AB} xy\,ds = \int_0^4 x \cdot 0\sqrt{1 + (0')^2}\,dx = 0.$$

Lõigus BC kehtivad võrratused $0 \le y \le 2$ ning x esitub funktsioonina $x(y) = 4$. Joonintegraal üle lõigu BC on seega

$$\int_{BC} xy\,ds = \int_0^4 4y\sqrt{1 + (4')^2}\,dy = \int_0^4 4y\,dy = 8.$$

Lõigus CD kehtivad võrratused $0 \le x \le 4$ ning y esitub funktsioonina $y(x) = 2$. Joonintegraal üle lõigu CD on seega

$$\int_{CD} xy\,ds = \int_0^4 x \cdot 2\sqrt{1 + (2')^2}\,dx = \int_0^4 2x\,dx = 16.$$

Lõigus DA kehtivad võrratused $0 \le y \le 2$ ning x esitub funktsioonina $x(y) = 0$. Joonintegraal üle lõigu DA on seega

$$\int_{DA} xy\,ds = \int_0^2 0y\sqrt{1 + (0')^2}\,dy = 0.$$

Kokkuvõttes saame

$$\int_L xy\,ds = \int_{AB} xy\,ds + \int_{BC} xy\,ds + \int_{CD} xy\,ds + \int_{DA} xy\,ds = 8 + 16 = 24.$$

Esimest liiki joonintegraali rakendus

Ülesanne 20.2

Leidke järgmise joone pikkus $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3, A = (0,0,0), B = (3,3,2)$.

Lahendus

Joon AB on antud parameetri t järgi. Leiame parameetri t väärtuse, kui joon on punktis A ning siis kui joon on punktis B. Ehk lahendame vastavalt võrrandisüsteemid

$$\begin{cases} 3t = 0 \\ 3t^2 = 0 \\ 2t^3 = 0 \end{cases} \qquad \text{ning} \qquad \begin{cases} 3t = 3 \\ 3t^2 = 3 \\ 2t^3 = 2 \end{cases} \text{, kust } t = 0 \text{ ja } t = 1 \text{ vastavalt.}$$

Seega parameeter t muutub piirkonnas $[0,1]$.
Joone pikkuse leidmiseks kasutame valemit

$$\ell_{AB} = \int_{AB} ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt, \text{ kus } \alpha \le t \le \beta.$$

Tuletised parameetri t järgi on

$$x'(t) = 3, \quad y'(t) = 6t, \quad z'(t) = 6t^2.$$

Seega

$$\ell_{AB} = \int_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}\, dt = \int_0^1 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}\, dt =$$
$$= \int_0^1 3\sqrt{(1 + 2t^2)^2}\, dt = \int_0^1 3(2t^2 + 1)\, dt = 5.$$

Esimest liiki joonintegraali rakendus

Ülesanne 20.3

Leidke vertikaalse silinderpinna pindala, kui pinna alumine serv asetseb xy-tasandil ja ülemine serv on järgmiste pindade lõikejoon $x^2 + y^2 = 16, z = y$.

Lahendus

Kuna alumine serv on xy-tasandil, siis $y \geq 0, z \geq 0$. Võrrand $x^2 + y^2 = 16$ kirjeldab xy-tasandil ringjoont, mille keskpunkt asub nullpunktis ning mille raadius on 4. Tingimuse $y \geq 0$ tõttu huvitab meid ainult ringjoone ülemine osa, mille parameetriline võrrand (polaarnurga suhtes) on

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = 4\sin t \end{cases}, \text{ kus } t \in [0, \pi].$$

Kasutame seega valemit

$$S_{ABCD} = \int_{AB} f(x, y)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt, \text{ kus } \alpha \leq t \leq \beta.$$

Funktsioon $f(x(t), y(t)) = y(t) = 4\sin t$. Tuletised parameetri t järgi on

$$x'(t) = -4\sin t, \qquad y'(t) = 4\cos t.$$

Seega vertikaalse silinderpinna pindala on

$$\int_0^{\pi} 4\sin t\sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi} 4\sin t \cdot 4\, dt = \int_0^{\pi} 16\sin t\, dt = 32.$$

Teist liiki joonintegraalid

Ülesanne 20.5

Arvutage integraal $\int_{AB} y dx$, kus joon AB: $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, \pi/2]$.

Lahendus

Tegemist on ringjoone kaarega esimeses veerandis. Kasutame teist liiki joonintegraali leidmiseks valemit

$$AB\colon\ x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta\colon \int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)x'(t)\,dt.$$

Ülesande tekstist saame, et $f(t) = y(t) = \sin t$ ning $x'(t) = -\sin t$. Seega rakendades eelnevat valemit saame integraaliks

$$\int_{AB} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot (-\sin t)\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt = -\frac{\pi}{4}.$$

Diferentsiaalvõrrandi lahend

Ülesanne 22.1

Näidake, et antud funktsioon on temale järgneva diferentsiaalvõrrandi lahendiks

$$x = y\int_0^y \frac{\sin t}{t}dt, \qquad y\frac{dx}{dy} = x + y\sin y.$$

Lahendus

Selleks, et antud funktsioon oleks diferentsiaalvõrrandi lahendiks, peab funktsiooni asetamine võrrandisse muutma võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes.
Leiame $\frac{dx}{dy}$ ehk $x'(y)$. Saame, et

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y\int_0^y \frac{\sin t}{t}dt\right) = \int_0^y \frac{\sin t}{t}dt + y\frac{\sin y}{y} = \int_0^y \frac{\sin t}{t}dt + \sin y,$$

kuna matemaatilise analüüsi põhiteoreemi (KM1 konspektis) kohaselt

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Diferentsiaalvõrrandi vasak pool on seega

$$\text{v.p.} = y\frac{dx}{dy} = y\left(\int_0^y \frac{\sin t}{t}dt + \sin y\right) = y\int_0^y \frac{\sin t}{t}dt + y\sin y.$$

Ning parem pool on

$$\text{p.p.} = x + y\sin y = y\int_0^y \frac{\sin t}{t}dt + y\sin y.$$

Kuna v.p. = p.p., siis tegemist on tõepoolest selle diferentsiaalvõrrandi lahendiga.

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Ülesanne 22.3

Leidke antud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üld- ja erilahend.

$$\sin x\,dy - y\cos x\,dx = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Lahendus

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamise esimese sammuna eraldame muutujad. Selleks jagame esialgse võrrandi mõlemad pooled läbi avaldisega $\sin x \cdot y$. Võrrand omandab siis kuju

$$\frac{dy}{y} - \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = 0. \qquad (1)$$

Võrrand (1) on nüüd eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrand (ehk dx kordaja sõltub ainult muutujast x ning dy kordaja sõltub ainult muutujast y). Selle lahendamiseks integreerime võrrandit liikmeti

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Millest

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{d\sin x}{\sin x} = C_1$$
$$\ln|y| - \ln|\sin x| = C_1.$$

Võtame võrrandi mõlemad pooled e astmesse ning kasutame logaritmfunktsiooni omadust $e^{\ln x} = x$. Võrrandi vasak pool on siis

$$e^{\ln|y| - \ln|\sin x|} = e^{\ln|y|} \cdot e^{-\ln|\sin x|} = \frac{|y|}{|\sin x|}.$$

Võrrandi parem pool on $e^{C_1} = C_2$, kus $C_2 = e^{C_1} > 0$.
Kokkuvõttes saime võrrandi $|y| = |\sin x| C_2$. Absoluutväärtused saavad muuta ainult märki, seega saame need konstanti C_2 ära peita, ehk saame võrrandi $y = \sin x \cdot C_3$, kus $C_3 \neq 0$.
Tuletame meelde, et lahenduse alguses jagasime võrrandi läbi avaldisega $y\sin x$, seda võisime teha parajasti siis, kui $y\sin x \neq 0$. Märkame aga, et esialgses võrrandis $y = 0$ on ka diferentsiaalvõrrandi lahendiks. Seega diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks saame

$$\begin{cases} y = \sin x \cdot C_3, \ \text{kus } C_3 \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ehk } y = \sin x \cdot C, \ \text{kus } C \in \mathbb{R}.$$

Diferentsiaalvõrrandi erilahendi puhul peab lisaks kehtima tingimus $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Seega peab kehtima
$\sin\frac{\pi}{2} \cdot C = 1$, millest $C = 1$.
Kokkuvõttes saime diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks $y = \sin x \cdot C$, kus $C \in \mathbb{R}$ ning tingimust $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ rahuldavaks erilahendiks on $y = \sin x$.

Märkus!

Edaspidi me konstante enam ei indekseeri. See tähendab, et igal sammul tähistame konstanti tähisega C. Tuleb lihtsalt mainida iga kord, kui C tingimus muutub. Näiteks kui tähistame e^C, kus $C \in \mathbb{R}$, ümber tähisega C, siis mainime, et nüüd $C > 0$.

Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 22.6

Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend $y' - y\cot x = 2x\sin x$.

Märkus!

Kasutame lineaarse diferentsiaalvõrrandi $y' + P(x)y = Q(x)$ lahendamiseks konstantide varieerimise meetodit, mis koosneb kahest sammust.
Esimese sammuna lahendame vastava homogeense võrrandi

$$y' + P(x)y = 0.$$

Selle lahend on $y_h = Ce^{-\int P(x)\,dx}$.
Teise sammuna otsime mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi lahendit kujul

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx},$$

kus konstanti C oleme loenud nüüd otsitavaks argumendi x funktsiooniks.

Lahendus

Esimese sammuna lahendame vastava homogeense võrrandi

$$y' - y\cot x = 0, \quad \text{kus } y' = \frac{dy}{dx},\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Tegemist on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga. Eraldame muutujad jagades võrrandi mõlemat poolt avaldisega $\frac{y}{dx}$. Saame võrrandi

$$\frac{dy}{y} - \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = 0.$$

Paneme tähele, et ülesandes 22.3 juba lahendasime selle võrrandi. Seega homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendiks on

$$y_h = C\sin x,\ C \in \mathbb{R}.$$

Teise sammuna leiame esialgse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi lahendit kujul $y = C\sin x$, kus konstanti C loeme otsitavaks argumendi x funktsiooniks ehk

$$y = C(x)\sin x.$$

Funktsiooni y tuletis on $y' = C'(x)\sin x + C(x)\cos x$. Asendame y ning y' esialgsesse diferentsiaalvõrrandisse. Saame

$$\begin{aligned}
C'(x)\sin x + C(x)\cos x - C(x)\sin x\cot x &= 2x\sin x\\
C'(x)\sin x + C(x)\cos x - C(x)\cos x &= 2x\sin x\\
C'(x)\sin x &= 2x\sin x\\
C'(x) &= 2x\\
dC(x) &= 2x\,dx\\
\int dC(x) &= \int 2x\,dx\\
C(x) &= x^2 + C,\ \text{kus } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Saime diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks $y = (x^2 + C)\sin x$.

Ülesanne 22.6

Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üld- ja erilahend $y' + y\cos x = \cos x,\ y(0) = 1$.

Lahendus

Esimese sammuna lahendame vastava homogeense võrrandi

$$y' + y\cos x = 0. \qquad (1)$$

Tegemist on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga. Eraldame muutujad jagades võrrandi mõlemat poolt avaldisega $\dfrac{y}{dx}$. Saame võrrandi

$$\frac{dy}{y} + \cos x\,dx = 0.$$

Integreerime võrrandit liikmeti ning saame

$$\ln|y| = -\sin x + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Võttes võrrandi mõlemad pooled e astmesse saame

$$|y| = e^{-\sin x}e^{C}.$$

Tähistame $C = e^{C}$ ja peidame absoluutväärtuse märgid selle konstandi sisse ära. Saame

$$y = e^{-\sin x}C,\ \ C \neq 0. \qquad (2).$$

Kuna muutujate eraldamisega me eeldasime, et $y \neq 0$, peame nüüd kontrollima kas $y = 0$ sobib võrrandi (1) lahendiks. Näeme, et sobib küll, ning lahend $y = 0$ ei esine võrrandis (2). Selle parandamiseks piisab, kui lubame konstandil olla null. Seega homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$y_h = e^{-\sin x}C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Teise sammuna leiame esialgse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi lahendit kujul
$y = Ce^{-\sin x}$, kus konstanti C loeme otsitavaks argumendi x funktsiooniks ehk

$$y = C(x)e^{-\sin x}.$$

Funktsiooni y tuletis on $y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x$. Asendame y ning y' esialgsesse diferentsiaalvõrrandisse. Saame

$$\begin{aligned}
C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x &= \cos x\\
C'(x)e^{-\sin x} &= \cos x\\
C'(x) &= \cos x e^{\sin x}\\
dC(x) &= \cos x e^{\sin x}\,dx\\
\int dC(x) &= \int e^{\sin x}\,d\sin x\\
C(x) &= e^{\sin x} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on seega

$$y = \left(e^{\sin x} + C\right)e^{-\sin x} = 1 + Ce^{-\sin x}.$$

Diferentsiaalvõrrandi erilahend rahuldab lisaks tingimust $y(0) = 1$ ehk

$$1 + Ce^{-\sin 0} = 1, \quad \text{millest } C = 0.$$

Kokkuvõttes tingimust $y(0) = 1$ rahuldav erilahend on

$$y = 1 + 0\cdot e^{-\sin x} = 1.$$

Homogeensed funktsiooonid

Ülesanne 23.1

Leidke funktsiooni $z = \dfrac{x+y}{x^2-y^2}$ jaoks homogeensuse aste k.

Lahendus

Funktsiooni $f(x,y)$ nimetatakse k-astme homogeenseks funktsiooniks, kui

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y)$$

iga $t > 0$ korral.
Ülesande tekstis antud funktsiooni korral saame, et

$$f(tx,ty) = \frac{tx+ty}{(tx)^2+(ty)^2} = \frac{t(x+y)}{t^2(x^2+y^2)} = t^{-1}f(x,y).$$

Järelikult funktsiooni homogeensuse aste on $k = -1$.

Homogeensed diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 23.2

Leidke homogeense diferentsiaalvõrrandi $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ üldlahend.

Lahendus

Kontrollime algul, kas tegemist on ikka homogeense diferentsiaalvõrrandiga. Selleks kontrollime, kas võrduse parem pool on 0-astme homogeenne funktsioon ehk kas $f(tx, ty) = f(x, y)$.

$$f(tx, ty) = \frac{2txty}{(tx)^2 - (ty)^2} = \frac{t^2 2xt}{t^2(x^2 + y^2)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = f(x, y)$$

Kuna $f(tx, ty) = f(x, y)$, siis tegemist on tõepoolest homogeense diferentsiaalvõrrandiga. Homogeensete diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks teeme muutujavahetuse

$$\frac{y}{x} = z, \quad \text{millest} \quad y = zx,$$

kus

$$z = z(x), \quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Diferentsiaalvõrrand omandab seega kuju

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{2x^2 z}{x^2 - z^2 x^2}.$$

Tegemist on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga. Eraldame muutujad, saame

$$\begin{aligned}
z + x\frac{dz}{dx} &= \frac{2x^2 z}{x^2 - z^2 x^2} \\
x\frac{dz}{dx} &= \frac{x^2 2z}{x^2(1 - z^2)} - z \\
x\frac{dz}{dx} &= \frac{2z - z(1 - z^2)}{1 - z^2} \\
x\frac{dz}{dx} &= \frac{z^3 + z}{1 - z^2} \qquad (1) \\
\frac{1 - z^2}{z^3 + z}\, dz &= \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

Võrrandi vasakul poolel lahutame murru osamurdudeks, ehk viime kujule

$$\frac{1 - z^2}{z(z^2 + 1)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2 + 1},$$

kus A, B ja C on otsitavad. Saame, et $A = 1$, $B = -2$ ja $C = 0$ ehk

$$\frac{1 - z^2}{z(z^2 + 1)} = \frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2 + 1}.$$

Diferentsiaalvõrrandit edasi lahendades saame

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2 + 1}\right) dz &= \frac{dx}{x} \\
\int \left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2 + 1}\right) dz &= \int \frac{dx}{x} \\
\int \frac{dz}{z} - \int \frac{2z}{z^2 + 1}\, dz &= \int \frac{dx}{x} \\
\int \frac{dz}{z} - \int \frac{d(z^2 + 1)}{z^2 + 1} &= \int \frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln|z| - \ln|z^2+1| &= \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
\frac{|z|}{z^2+1} &= |x|C, \quad C = e^C > 0 \\
\frac{z}{z^2+1} &= xC, \quad C \neq 0.
\end{aligned}$$

Tagasi asendades $z = \dfrac{y}{x}$ saame

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2}+1} &= xC \\
\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2+x^2}{x^2}} &= xC \\
\frac{yx}{y^2+x^2} &= xC \\
y &= (y^2+x^2)C, \quad C \neq 0.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et võrrandis (1) me jagasime avaldisega $z^3+z = z(z^2+1)$, mille tõttu sealt edasi eeldasime, et $z \neq 0$, millest $y \neq 0$. Esialgsest diferentsiaalvõrrandist on aga näha, et $y = 0$ sobib diferentsiaalvõrrandi lahendiks.
Järelikult homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = (x^2+y^2)C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Ülesanne 24.1

Leidke Bernoulli diferentsiaalvõrrandi $y' = (y + y^2)\cos x$ üldlahend.

Lahendus

Bernoulli diferentsiaalvõrrandit $y' + P(x)y = Q(x)y^a$, kus $a \neq 1$ ja $a \neq 0$ saab taandada lineaarseks võrrandiks, kui

1. jagame võrrandi pooled suurusega y^a,
2. teeme muutujavahetuse $z = y^{1-a}$, millest $z' = (1-a)y^{-a}y'$.

Esimese sammuna jagame võrrandi pooled suurusega y^2. Saame diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{y'}{y^2} = \left(\frac{1}{y} + 1\right)\cos x.$$

Teise sammuna teeme eelmainitud muutujavahetuse ehk $z = y^{-1}$ ja $z' = -y^{-2}y'$. Diferentsiaalvõrrand omandab siis kuju

$$-z' = (z+1)\cos x.$$

Natuke teisendades saame, et

$$z' + z\cos x = -\cos x.$$

Tegemist on lineaarse diferentsiaalvõrrandiga. Selle lahendamiseks lahendame esiteks vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$z' + z\cos x = 0. \qquad (1)$$

Saame

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{z} + \cos x\,dx &= 0\\
\ln|z| + \sin x &= C, \quad C \in \mathbb{R}\\
|z|e^{\sin x} &= C, \quad C = e^C > 0\\
ze^{\sin x} &= C, \quad C \neq 0\\
z &= Ce^{-\sin x}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Kuna diferentsiaalvõrrandis (1) muutujate eraldamisel jagasime suurusega z, siis eeldasime, et $z \neq 0$. Kuid on näha, et $z = 0$ sobib diferentsiaalvõrrandi (1) lahendiks ja see ei kajastu võrrandis (2), kus $C \neq 0$. Seega võrrandi (1) lahendiks on

$$z_h = Ce^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamise teise sammuna otsime nüüd lahendit kujul

$$z = C(x)e^{-\sin x},$$

millest $z' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x$. Sellisel juhul saame, et

$$\begin{aligned}
C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x} &= -\cos x\\
C'(x)e^{-\sin x} &= -\cos x\\
C'(x) &= -\cos x e^{\sin x}\\
\int dC(x) &= -\int \cos x e^{\sin x}\,dx\\
\int dC(x) &= -\int e^{\sin x}\,d\sin x
\end{aligned}$$

$$C(x) = -e^{\sin x} + C$$

Järelikult diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$z = (-e^{\sin x} + C)e^{-\sin x} = Ce^{-\sin x} - 1.$$

Esialgset muutujavahetust $z = \dfrac{1}{y}$ tagasi asendades saame, et

$$\frac{1}{y} = Ce^{-\sin x} - 1,$$

millest

$$y \cdot (Ce^{-\sin x} - 1) = 1.$$

Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 24.3

Leidke eksaktse diferentsiaalvõrrandi $x\,dx + y\,dy = \dfrac{-y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ üldlahend.

Lahendus

Viime diferentsiaalvõrrandi kujule $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$. Korrutame võrrandi mõlemad pooled avaldisega x^2+y^2 ning siis viime avaldise $-y\,dx - x\,dy$ võrrandi vasakule poole. Saame

$$\left(x^3 + xy^2 + y\right)\,dx + \left(x^2y + y^3 + x\right)\,dy = 0. \qquad (1)$$

Võrrandi eksaktsuseks on tarvilik ja piisav, kui kehtib võrdus

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Kontrollime eksaktsuse tingimuse täidetust

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy^2 + y) = 2xy + 1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + y^3 + x) = 2xy + 1.$$

Eksaktset diferentsiaalvõrrandit saab kirjutada ka kujul $du(x,y) = 0$. Üldlahendi $u(x,y) = C$ leiame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

abil. Integreerime esimese võrduse mõlemaid pooli argumendi x järgi, kus loeme muutujat y konstantseks ja saame

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y),$$

kus $C(y)$ on suvaline funktsioon muutujast y. Võrrandi (1) korral saame, et

$$u(x,y) = \int (x^3 + xy^2 + y)\,dx + C(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + xy + C(y)$$

Valime nüüd sellise $C(y)$, et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ ehk

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + xy + C(y)\right) &= x^2y + y^3 + x \\ x^2y + x + C'(y) &= x^2y + y^3 + x \\ C'(y) &= y^3 \\ C(y) &= \frac{y^4}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Valime konkreetseks $C(y)$ sellise funktsiooni, kus $C = 0$ ehk $C(y) = \dfrac{y^4}{4}$. Saime otsitavaks funktsiooniks $u(x,y) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2y^2}{2} + xy + \dfrac{y^4}{4}$.

Kokkuvõttes eksaktse diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + xy + \frac{y^4}{4} = C.$$

Diferentsiaalvõrrandite numbriline lahendamine

Ülesanne 24.5

Leidke Euleri meetodi abil diferentsiaalvõrrandi

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1$$

lahendi lähisväärtused argumendi väärtustel $x_i = x_0 + 0.1i$, $(i = 1, 2, 3)$.

Lahendus

Valem diferentsiaalvõrrandi ligikaudseks lahendamiseks Euleri meetodiga on

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

kus $h = x_i - x_{i-1}$.
Ülesande tekstist on teada, et $y(1) = 1$ ehk $x_0 = 1$ ja $y_0 = 1$ ning $h = 0.1$.
Sellisel juhul

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot \frac{1}{1} = 1.1 \ .$$

Saime, et $y_1 = 1.1$ ja ülesande tekstist $x_1 = 1.1$. Seega

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1 \cdot \frac{1.1}{1.1} = 1.2 \ .$$

Saime, et $y_2 = 1.2$ ja ülesande tekstist $x_2 = 1.1$. Seega

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.2 + 0.1 \cdot \frac{1.2}{1.2} = 1.3 \ .$$

Teist järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine võrrandi järgu alandamise teel

Ülesanne 25.2

Lahendage diferentsiaalvõrrand

$$xy'' = y' + x^2$$

järgu alandamise teel.

Lahendus

Järgu alandamiseks teeme muutujavahetuse $u = y'$, millest $u' = y''$.
Saame diferentsiaalvõrrandi

$$xu' = u + x^2.$$

Natuke teisendades saame (esimest järku) lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$u' - \frac{u}{x} = x. \qquad (1)$$

Sellele vastav homogeenne diferentsiaalvõrrand on

$$u' - \frac{u}{x} = 0.$$

Tegemist on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga. Muutujaid eraldades saame

$$\frac{du}{u} - \frac{dx}{x} = 0,$$

mille lahendiks on

$$u_h = xC, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Konstantide varieerimise teel leiame võrrandi (1) lahendi. Selleks otsime lahendit kujul

$$u = xC(x), \quad \text{millest } u' = C(x) + xC'(x).$$

Saame, et

$$\begin{aligned} C(x) + xC'(x) - \frac{xC(x)}{x} &= x \\ C(x) + xC'(x) - C(x) &= x \\ C'(x) &= 1 \\ C(x) &= x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Järelikult võrrandi (1) üldlahend on

$$u = x(x + C_1) = x^2 + xC_1.$$

Tagasi asendades $u = y'$ saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + xC_1 \\ dy &= (x^2 + xC_1)\,dx. \end{aligned}$$

Mõlemalt poolelt integraali võttes saame esialgse diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2C_1}{2} + C_2 = \frac{x^3}{3} + x^2C_1 + C_2,$$

kus $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ja viimases võrduses tähistasime $C_1 = \frac{C_1}{2}$.

Ülesanne 25.2

Lahendage diferentsiaalvõrrand

$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$$

järgu alandamise teel.

Lahendus

Järgu alandamiseks teeme muutujavahetuse $u = y'$, millest $u' = y''$.
Saame diferentsiaalvõrrandi

$$xu' = u \ln \frac{u}{x}.$$

Võrrandi mõlemat poolt jagades avaldisega x saame homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$u' = \frac{u}{x} \ln \frac{u}{x}.$$

Homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks teeme muutujavahetuse

$$z = \frac{u}{x}, \text{ millest } u = zx \text{ ning } u' = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$\begin{aligned}
z + x\frac{dz}{dx} &= z \ln z \qquad (1)\\
x\frac{dz}{dx} &= z(\ln z - 1) \quad \Big| : \frac{xz(\ln z - 1)}{dx} \qquad (2)\\
\frac{dz}{z(\ln z - 1)} &= \frac{dx}{x}\\
\frac{d(\ln z - 1)}{\ln z - 1} &= \frac{dx}{x}\\
\ln|\ln z - 1| &= \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}\\
\ln z - 1 &= xC_1, \quad C_1 \neq 0. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Sammul (2) jagasime avaldisega $\ln z - 1$, mille tõttu pidime eeldama, et $\ln z - 1 \neq 0$ ehk z ei ole võrdne konstantse funktsiooniga $z = e$. Paneme aga tähele, et see on sobiv võrrandi (1) lahend ja see lahend ei kajastu enam real (3). Selle parandamiseks olgu nüüd $C_1 \in \mathbb{R}$. Saame

$$\begin{aligned}
\ln z - 1 &= xC_1\\
\ln z &= xC_1 + 1\\
z &= e^{xC_1+1}.
\end{aligned}$$

Tagasi asendades $z = \dfrac{u}{x}$ saame võrrandi

$$u = xe^{xC_1+1}.$$

Tagasi asendades $u = y'$ saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$dy = xe^{xC_1+1}\, dx.$$

Kui $C_1 = 0$, siis saame esialgse võrrandi lahendiks

$$y = \frac{ex^2}{2} + C_2, \; C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kui $C_1 \neq 0$, siis võrduse paremal poolel integreerime ositi ja saame, et

$$\int xe^{xC_1+1}\, dx = \frac{xe^{xC_1+1}}{C_1} - \int \frac{e^{xC_1+1}}{C_1}\, dx = \frac{xe^{xC_1+1}}{C_1} - \frac{e^{xC_1+1}}{C_1^2} + C_2 = \frac{e^{xC_1+1}}{C_1^2}(xC_1 - 1) + C_2$$

Saame esialgse diferentsiaalvõrrandi lahendiks, kui $C_1 \neq 0$

$$y = \frac{e^{xC_1+1}}{C_1^2}(xC_1 - 1) + C_2, \quad C_1 \neq 0,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Ülesanne 25.3

Lahendage teist järku konstantsete kordajatega lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand

$$y'' + 7y' + 17y = 0.$$

Lahendus

Diferentsiaalvõrrandile vastav karakteristlik võrrand, mida lahendame, on

$$k^2 + 7k + 17 = 0.$$

Saame lahenditeks

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 17}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{-19}}{2} = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2} i.$$

Saame $k_1 = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2} i$ ja $k_2 = -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2} i$, millest $\alpha = -\frac{7}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{19}}{2}$ Kuna karakteristliku võrrandi lahendid on kompleksarvulised, siis võrrandi üldlahend on kujul

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad \text{kus } \alpha = -\frac{a}{2}, \ \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-D}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Järelikult võrrandi üldlahend on

$$y = e^{-\frac{7}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x\right).$$

Ülesanne 25.3

Lahendage teist järku konstantsete kordajatega lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand

$$y'' = 2(3y' - 5y); \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 4.$$

Lahendus

Viime võrrandi liikmed ühele poole. Saame

$$y'' - 6y' + 10 = 0$$

Diferentsiaalvõrrandile vastav karakteristlik võrrand, mida lahendame, on

$$k^2 - 6k + 10 = 0.$$

Saame lahenditeks

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = 3 \pm i \quad \text{ ehk } k_1 = 3 + i, \ k_2 = 3 - i,$$

millest $\alpha = 3$, $\beta = 1$. Kuna karakteristliku võrrandi lahendid on kompleksarvulised, siis võrrandi üldlahend on kujul

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad \text{kus } \alpha = -\frac{a}{2}, \ \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-D}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Järelikult võrrandi üldlahend on

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

Erilahend rahuldab ka tingimusi $y(0) = 1$ ning $y'(0) = 4$. Leiame funktsiooni y tuletise

$$y' = 3e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{3x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Saame tingimuste võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 4, \end{cases}$$

millest saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 1 \\ 3e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = 4. \end{cases}$$

Peale lihtsustamist saame

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 3C_1 + C_2 = 4, \end{cases}$$

millest $C_1 = 1$ ja $C_2 = 1$.
Kokkuvõttes tingimusi $y(0) = 1$ ning $y'(0) = 4$ rahuldavaks erilahendiks on

$$y = e^{3x}(\cos x + \sin x).$$

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 26.1

Lahendage teist järku konstantsete kordajatega lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand

$$y'' - 2y' - 3y = 3 - 4e^x \quad (1).$$

Märkus!

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarse mittehomogeenne diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + ay' + by = F(x)$$

lahendamine toimub kahes etapis.
1)
Lahendame vastava lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + ay' + by = 0,$$

millest saame üldlahendi y_h.
2)
Leiame esialgse võrrandi mingi erilahendi Y, mis sarnaneb kuju poolest funktsiooniga $F(x)$. Kokkuvõttes saame esialgse võrrandi üldlahendi kujul

$$y = y_h + Y.$$

Lahendus

1)
Lahendame võrrandile (1) vastava lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y'' - 2y' - 3y = 0. \quad (2)$$

Võrrandile (2) vastav karakteristlik võrrand on

$$k^2 - 2k - 3 = 0.$$

Karakteristliku võrrandi lahenditeks on

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2.$$

Saame $k_1 = -1$ ja $k_2 = 3$. Kuna karakteristliku võrrandi lahendid on reaalsed ja erinevad, siis võrrandi (2) üldlahend on kujul

$$y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Saame lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

2)
Leiame võrrandi (1) mingi erilahendi Y. Kuna esialgse võrrandi parem pool on kujul $C + pe^x$, siis otsime erilahendit Y kujul

$$Y = A + Be^x.$$

Paneme tähele, et $Y'' = Y' = Be^x$. Esialgsesse võrrandisse (1) asendades saame, et

$$\begin{aligned} Be^x - 2Be^x - 3A - 3Be^x &= 3 - 4e^x \\ -3A - 4Be^x &= 3 - 4e^x \end{aligned}$$

Kuna e^x kordaja peab olema võrrandi mõlemal poolel sama, siis $B = 1$ ning seega $A = -1$. Saame erilahendi

$$Y = -1 + e^x.$$

Kokkuvõttes saame esialgse diferentsiaalvõrrandi (1) lahendiks

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + e^x - 1.$$

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 26.2

Lahendage teist järku konstantsete kordajatega lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \quad (1).$$

Lahendus

1)
Lahendame võrrandile (1) vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + 2y' + y = 0. \quad (2)$$

Karakteristlik võrrand on

$$k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Karakteristliku võrrandi lahenditeks on

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1.$$

Saame $k_1 = k_2 = -1$. Kuna karakteristliku võrrandi lahendid on reaalsed ja võrdsed, siis võrrandi (2) üldlahend on kujul

$$y_h = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Võrrandi (2) üldlahend on

$$y_h = e^{-x}(C_1 + C_2 x).$$

2)
Leiame võrrandi (1) mingi erilahendi Y. Kuna $k_1 = k_2 = -1$, mis esinevad esialgse diferentsiaalvõrrandi paremal poolel e astendajas, siis erilahendi Y otsime kujul

$$Y = Ax^2 e^{-x}, \text{ millest } Y' = 2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x} \text{ ja } Y'' = 2Ae^{-x} - 4xAe^{-x} + Ax^2 e^{-x}.$$

Esialgsesse võrrandisse (1) asendades saame, et

$$2Ae^{-x} - 4xAe^{-x} + Ax^2 e^{-x} + 2(2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x}) + Ax^2 e^{-x} = 3e^{-x}$$
$$2Ae^{-x} = 3e^{-x}$$
$$A = \frac{3}{2}.$$

Saame erilahendi

$$Y = \frac{3}{2}x^2 e^{-x}.$$

Kokkuvõttes saame võrrandi (1) üldlahendiks

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3}{2}x^2 e^{-x}.$$

Ülesanne 26.2

Lahendage teist järku konstantsete kordajatega lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand

$$y'' + 3y' + 2y = 6e^{-5x}. \quad (1)$$

Lahendus

1)
Lahendame võrrandile (1) vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + 3y' + 2y = 0. \quad (2)$$

Karakteristlik võrrand on
$$k^2 + 3k + 2 = 0.$$
Karakteristliku võrrandi lahenditeks on
$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}.$$
Saame $k_1 = -2$ ja $k_2 = -1$. Kuna karakteristliku võrrandi lahendid on reaalsed ja erinevad, siis võrrandi (2) üldlahend on kujul
$$y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
Võrrandi (2) üldlahend on
$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$
2)
Otsime võrrandi (1) mingi erilahendi Y. Kontrollime, kas tegemist on erijuhuga, kus k_1 või k_2 esinevad võrrandi (1) e astendajas. Näeme, et ei esine, seega erilahendi Y otsime kujul
$$Y = Ae^{-5x}, \text{ millest } Y' = -5Ae^{-5x} \text{ ja } Y'' = 25Ae^{-5x}.$$
Esialgsesse võrrandisse (1) asendades saame, et
$$\begin{aligned} 25Ae^{-5x} + 3(-5Ae^{-5x}) + 2(Ae^{-5x}) &= 6e^{-5x} \\ 12Ae^{-5x} &= 6e^{-5x} \\ A &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
Saame erilahendiks
$$Y = \frac{1}{2}e^{-5x}.$$
Kokkuvõttes saame võrrandi (1) üldlahendiks
$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-5x}.$$

Teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 27.1

Lahendage teist järku lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand,

$$y'' + y' \tan x - y\cos^2 x = 0; \quad y_1 = e^{\sin x}$$

kasutades Liouville'i-Ostrogradski valemit.

Lahendus

Liouville'i-Ostrogradski valemi abil saame leida diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

teise erilahendi y_2. Täpsemalt

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx,$$

kus y_1 on eelnevalt teadaolev erilahend.
Siin ülesandes on $p_1(x) = \tan x$, $p_2(x) = \cos^2 x$ ning $y_1 = e^{\sin x}$. Leiame e astendajas oleva integraali $-\int p_1(x)\,dx$.

$$-\int \tan x\,dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{d\cos x}{\cos x} = \ln|\cos x| + C$$

Siin võtame konstandiks $C = 0$. Saame nüüd leida teise erilahendi Liouville'i Ostrogradski valemi abil

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{\sin x}\int \frac{e^{\ln|\cos x|}}{(e^{\sin x})^2}\,dx = e^{\sin x}\int \frac{|\cos x|}{e^{2\sin x}}\,dx \overset{(*)}{=} e^{\sin x}\int \frac{\cos x}{e^{2\sin x}}\,dx = \\ &= e^{\sin x}\int \frac{d\sin x}{e^{2\sin x}} = e^{\sin x}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2\sin x} + C\right) = -\frac{e^{-\sin x}}{2} + Ce^{\sin x}. \end{aligned}$$

Tahame ainult ühte erilahendit, seega võtame $C = 0$. Üldlahend on seega

$$y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}.$$

Märkus!

Põhjendame, miks on võrduses $(*)$ absoluutväärtuse ärajätmine võimalik. Kui $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, siis kehtib $|\cos x| = \cos x$ ning arvutades nagu ülal tegime, saame $y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}$. Kui aga $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, siis $|\cos x| = -\cos x$, mistõttu erilahend $y_2^* = \frac{e^{-\sin x}}{2} = -y_2$, kus y_2 on erilahend, mis saadi, kui $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ja seega $y = C_1 y_1 - C_2 y_2$. Tähistades $-C_2$ ümber tähisega C_2, saame y jaoks ühise üldkuju $y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}$, mis sobib nii intervalli $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ kui ka intervalli $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ jaoks.

Teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 27.2

Lahendage teist järku lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand

$$y'' + y' + e^{-2x}y = e^{-3x}; \quad y_1 = \cos e^{-x}.$$

Lahendus

Lahendame alguses esialgse homogeense võrrandi

$$y'' + y' + e^{-2x}y = 0. \tag{1}$$

Meil on teada üks erilahend $y_1 = \cos e^{-x}$. Leiame teise erilahendi Liouville'i–Ostrogradski valemi abil

$$\begin{aligned} y_2 &= \cos e^{-x} \int \frac{e^{-\int dx}}{\cos^2 e^{-x}}\, dx = \cos e^{-x} \int \frac{e^{-x}}{\cos^2 e^{-x}}\, dx = \\ &= -\cos e^{-x} \int \frac{d(e^{-x})}{\cos^2 e^{-x}} = -\cos e^{-x}(\tan e^{-x} + C) = -\sin e^{-x}. \end{aligned}$$

Kuna tahtsime ühte erilahendit, siis võtsime $C = 0$. Homogeense võrrandi (1) üldlahend on seega

$$y_h = C_1 \cos e^{-x} + C_2 \sin e^{-x}.$$

Mittehomogeense lahendi leidmiseks kasutame konstantide varieerimise meetodit, kus lahendit otsime kujul

$$Y = C_1(x) \cos e^{-x} + C_2(x) \sin e^{-x}.$$

Selle tuletis on

$$Y' = C_1'(x) \cos e^{-x} + C_1(x) e^{-x} \sin e^{-x} + C_2'(x) \sin e^{-x} - C_2(x) e^{-x} \cos e^{-x}.$$

Kuna meil on kaks otsitavat funktsiooni ja ainult üks võrrand, siis võtame teiseks võrrandiks seose

$$C_1'(x) \cos e^{-x} + C_2'(x) \sin e^{-x} = 0.$$

Seda arvestades saame Y' kirjutada kujul

$$Y' = C_1(x) e^{-x} \sin e^{-x} - C_2(x) e^{-x} \cos e^{-x} = e^{-x}(C_1(x) \sin e^{-x} - C_2(x) \cos e^{-x})$$

ning seega Y'' on

$$Y'' = -Y' + e^{-x}(C_1'(x) \sin e^{-x} - C_1(x) e^{-x} \cos e^{-x} - C_2'(x) \cos e^{-x} - C_2(x) e^{-x} \sin e^{-x}).$$

Asetame saadud väärtused esialgseses võrrandisse. Paneme tähele, et võrrandi vasakul poolel mitu liidetavat taanduvad välja. Saame

$$\begin{aligned} e^{-x}(C_1'(x) \sin e^{-x} - C_2'(x) \cos e^{-x}) &= e^{-3x}, \\ C_1'(x) \sin e^{-x} - C_2'(x) \cos e^{-x} &= e^{-2x}. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes tuleb meil lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} C_1'(x) \sin e^{-x} - C_2'(x) \cos e^{-x} = e^{-2x}, \\ C_1'(x) \cos e^{-x} + C_2'(x) \sin e^{-x} = 0. \end{cases}$$

Avaldame esimesest võrrandist $C_1'(x)$ ning asendame saadud väärtuse teise võrrandisse

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{e^{-2x} + C_2'(x)\cos e^{-x}}{\sin e^{-x}}, \\ \dfrac{e^{-2x} + C_2'(x)\cos e^{-x}}{\sin e^{-x}} \cos e^{-x} + C_2'(x)\sin e^{-x} = 0. \end{cases}$$

Teist võrrandit lahendades saame

$$\begin{aligned} \frac{e^{-2x} + C_2'(x)\cos e^{-x}}{\sin e^{-x}} \cos e^{-x} + C_2'(x)\sin e^{-x} = 0, \quad & \Big| \cdot \sin e^{-x} \\ e^{-2x}\cos e^{-x} + C_2'(x)\cos^2 e^{-x} + C_2'(x)\sin^2 e^{-x} = 0, & \\ C_2'(x) = -e^{-2x}\cos e^{-x}, & \qquad (2) \\ C_2(x) = -\int e^{-2x}\cos e^{-x}\,dx, \quad & \Big| u = e^{-x}, \ \ du = -e^{-x}\,dx \\ C_2(x) = \int u\cos u\,du = u\sin u + \cos u + C, & \\ C_2(x) = e^{-x}\sin e^{-x} + \cos e^{-x} + C. & \end{aligned}$$

Kuna otsime ühte erilahendit, siis võtame $C = 0$. Kasutades võrdust (2) saame võrrandisüsteemi esimese võrrandi kujule

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{e^{-2x} - e^{-2x}\cos^2 e^{-x}}{\sin e^{-x}}, \\ C_1'(x) &= \frac{e^{-2x}(1 - \cos^2 e^{-x})}{\sin e^{-x}}, \\ C_1'(x) &= \frac{e^{-2x}\sin^2 e^{-x}}{\sin e^{-x}}, \\ C_1'(x) &= e^{-2x}\sin e^{-x}, \\ C_1(x) &= \int e^{-2x}\sin e^{-x}, \quad \Big| u = e^{-x} \\ C_1(x) &= -\int u\sin u\,du = u\cos u - \sin u + C, \\ C_1(x) &= e^{-x}\cos e^{-x} - \sin e^{-x} + C. \end{aligned}$$

Kuna otsime ühte erilahendit, siis võtame $C = 0$. Järelikult saame erilahendiks

$$Y = (e^{-x}\cos e^{-x} - \sin e^{-x})\cos e^{-x} + (e^{-x}\sin e^{-x} + \cos e^{-x})\sin e^{-x} = e^{-x}.$$

Kokkuvõttes saame esialgse diferentsiaalvõrrandi lahendiks

$$y = C_1\cos e^{-x} + C_2\sin e^{-x} + e^{-x}.$$

Lineaarsed kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 28.1

Lahendage diferentsiaalvõrrand
$$y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}.$$

Lahendus

Lahendame esialgu homogeense diferentsiaalvõrrandi
$$y''' + y'' = 0. \tag{1}$$
Sellele vastav karakteristlik võrrand on
$$\begin{aligned} k^3 + k^2 &= 0, \\ k^2(k+1) &= 0. \end{aligned}$$
Saame, et $k_1 = -1$ ning $k_2 = k_3 = 0$, sellest järeldub, et homogeense diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendiks on
$$y_h = C_1e^{-x} + (C_2x + C_3)e^{0x} = C_1e^{-x} + C_2x + C_3.$$
Esialgse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendi leidmiseks kasutame konstantide varieerimise meetodit, kus otsime lahendit kujul
$$Y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)x + C_3(x),$$
mille tuletis on
$$Y' = C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} + C_2'(x)x + C_2(x) + C_3'(x).$$
Kuna tundmatuid on meil kolm, aga võrrandeid on meil ainult üks, võtame teiseks võrrandiks seose
$$C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)x + C_3'(x) = 0.$$
Seda arvestades saame Y' kirjutada kujul
$$Y' = -C_1(x)e^{-x} + C_2(x),$$
mille tuletis on seega
$$Y'' = -C_1'(x)e^{-x} + C_1(x)e^{-x} + C_2'(x).$$
Kuna tundmatuid on meil kolm, aga võrrandeid on meil kaks, võtame kolmandaks võrrandiks seose
$$-C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x) = 0.$$
Seda arvestades saame Y'' kirjutada kujul
$$Y'' = C_1(x)e^{-x},$$
mille tuletis on seega
$$Y''' = C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x}.$$
Asetame need esialgsesse võrrandisse ning saame
$$\begin{aligned} C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} + C_1(x)e^{-x} &= \frac{x-1}{x^2}, \\ C_1'(x)e^{-x} &= \frac{x-1}{x^2}, \\ C_1'(x) &= \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}. \end{aligned}$$

Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{e^x}{x^2}, \\ C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)x + C_3'(x) = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x) = 0. \end{cases}$$

Asendame võrrandisüsteemi esimese võrduse $C_1'(x)$ väärtuse võrrandisüsteemi teise ja kolmandasse võrrandisse ning avaldame teisest võrrandist $C_3'(x)$ ja kolmandast võrrandist $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{e^x}{x^2}, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + C_2'(x)x + C_3'(x) = 0, \\ -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + C_2'(x) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{e^x}{x^2}, \\ C_3'(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - C_2'(x)x, \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Asendame teises võrrandis $C_2'(x)$ väärtuse kolmandasse võrrandisse ning saame

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{e^x}{x^2}, \\ C_3'(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1, \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Ositi integreerides $\dfrac{e^x}{x^2}$ saame

$$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = e^x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int e^x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)dx = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Võtame esimese võrrandi mõlemalt poolelt integraali, siis saame, et

$$C_1(x) = \int \frac{e^x}{x}\,dx - \int \frac{e^x}{x^2}\,dx = \int \frac{e^x}{x}\,dx + \frac{e^x}{x} - \int \frac{e^x}{x}\,dx = \frac{e^x}{x}.$$

Kolmanda võrrandi mõlemat poolt integreerides saame, et

$$C_2(x) = \ln|x| + \frac{1}{x},$$

ning teise võrrandi mõlemat poolt integreerides saame

$$C_3(x) = -\frac{1}{x} - x.$$

Kokkuvõttes saame erilahendi kujul

$$Y = \frac{e^x}{x}e^{-x} + \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)x - \frac{1}{x} - x = x\ln|x| + 1 - x.$$

Ehk esialgse diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{-x} + C_2x + C_3 + x\ln|x| + 1 - x = \\ &= C_1e^{-x} + (C_2 - 1)x + (C_3 + 1) + x\ln|x| = \\ &= C_1e^{-x} + C_2x + C_3 + x\ln|x|, \end{aligned}$$

kus viimases võrduses tähistasime $C_2 = C_2 - 1$ ning $C_3 = C_3 + 1$.

Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine

Ülesanne 28.2

Lahendage diferentsiaalvõrrand

$$y''' = (y'')2.$$

Lahendus

Teeme muutujavahetuse $z = y''$, saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$z' = z^2.$$

Eraldades muutujad ning integreerides Võrrandi mõlemat poolt saame, et

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z^2} &= dx, \\ -\frac{1}{z} &= x + C_1, \\ z &= -\frac{1}{x + C_1}. \end{aligned}$$

Tagasi asendades $z = y''$, saame

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{1}{x + C_1}, \\ y' &= -\ln|x + C_1| + C_2, \\ y &= -\int (\ln|x + C_1| + C_2)\, dx. \end{aligned}$$

Integraali $\int \ln|x + C_1|\, dx$ jaoks teeme muutujavahetuse $t = x + C_1$, ning siis integreerime ositi

$$\int \ln|x + C_1|\, dx = \int \ln|t|\, dt = t\ln|t| - \int \frac{1}{t} t\, dt = t\ln|t| - t = (x + C_1)\ln|x + C_1| - x - C_1.$$

Kokkuvõttes saame üldlahendiks

$$\begin{aligned} y &= -(x + C_1)\ln|x + C_1| + x + C_1 + C_2x + C_3 \\ &= -x\ln|x + C_1| - C_1\ln|x + C_1| + x + C_2x + C_3, \end{aligned} \tag{1}$$

kus viimases võrduses tähistasime $C_3 = C_1 + C_3$.
Ülesande alguses, kui eraldasime muutujaid, jagasime avaldisega z^2. Seega sealt alates eeldasime, et $z \neq 0$. Paneme aga tähele, et konstantne funktsioon $z = 0$ sobib diferentsiaalvõrrandi $z' = z^2$ lahendiks. Vaatame nüüd olukorda, kus $z = 0$, siis saame, et

$$\begin{aligned} z &= 0, \\ y'' &= 0, \\ y' &= C_1, \\ y &= C_1x + C_2. \end{aligned}$$

Näeme, et see lahend esineb juba võrduses (1), seega me ei pea lahendit täiendama.

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Ülesanne 28.4

Näidake, et funktsioonide süsteem

$$y = x + e^{-x}, \quad z = e^{x},$$

on antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendiks.

$$y' = 1 - \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{1}{y - x}.$$

Lahendus

Leiame y' ning z'

$$y' = 1 - e^{-x}, \qquad z' = e^{x}.$$

Esimest diferentsiaalvõrrandit vaadates näeme, et

$$\text{v.p.} = 1 - e^{-x}, \qquad \text{p.p.} = 1 - \frac{1}{e^{x}} = 1 - e^{-x}.$$

Kuna v.p. = p.p., siis esimene võrrand diferentsiaalvõrrandite süsteemist on rahuldatud.
Teist diferentsiaalvõrrandit vaadates näeme, et

$$\text{v.p.} = e^{x}, \qquad \text{p.p.} = \frac{1}{x + e^{-x} - x} = \frac{1}{e^{-x}} = e^{x}.$$

Kuna v.p. = p.p., siis ka teine võrrand diferentsiaalvõrrandite süsteemist on rahuldatud. Kuna mõlemad diferentsiaalvõrrandid diferentsiaalvõrrandite süsteemist on rahuldatud, siis antud funktsioonide süsteem on tõepoolest antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendiks.

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Ülesanne 28.6

Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad z' = y + x - \frac{z}{x}.$$

Lahendus

Märkame, et esimene võrrand ei sõltu teisest. Tegemist on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga. Muutujaid eraldades ja integreerides saame, et

$$y = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C_1 = \ln(x^2+1) + C_1,$$

kus $C_1 \in \mathbb{R}$. Asetades lahendi teise võrrandisse saame lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$z' + \frac{z}{x} = \ln(x^2+1) + x + C_1. \tag{1}$$

Leiame alguses sellele vastava homogeense diferentsiaalvõrrani $z' + \frac{z}{x} = 0$ lahendi. Tegemist on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga, mille lahendiks on

$$z_h = \frac{C_2}{x}.$$

Erilahendi leiame konstantide varieerimise meetodiga, kus otsime lahendit kujul

$$z = \frac{C_2(x)}{x}, \quad \text{millest } z' = \frac{C_2'(x)x - C_2(x)}{x^2}.$$

Asetades need võrrandisse (1) saame

$$\begin{aligned}\frac{C_2'(x)x - C_2(x)}{x^2} + \frac{C_2(x)}{x^2} &= \ln(x^2+1) + x + C_1,\\ C_2'(x) &= x\ln(x^2+1) + x^2 + xC_1.\end{aligned}$$

Võtame võrrandi mõlemalt poolelt integraali. Saame

$$C_2(x) = \frac{x^2\ln(x^2+1)}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2C_1}{2} + C_2,$$

sest esimest liiget integreerides teeme muutujavahetuse $u = x^2+1$ ning siis ositi integreerides tuleb

$$\begin{aligned}\int x\ln(x^2+1)\,dx &= \int \frac{\ln u}{2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\ln u - \int u\cdot\frac{1}{u}\,du\right) =\\ &= \frac{1}{2}\left(u\ln u - \int 1\,du\right) = \frac{1}{2}(u\ln u - u) + C =\\ &= \frac{1}{2}\big((x^2+1)\ln(x^2+1) - (x^2+1) + C\big) =\\ &= \frac{x^2\ln(x^2+1)}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{C}{2} =\\ &= \frac{x^2\ln(x^2+1)}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2} - \frac{x^2}{2} + C.\end{aligned}$$

Järelikult teise võrrandi üldlahend on

$$z = \frac{x\ln(x^2+1)}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2x} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{xC_1}{2} + \frac{C_2}{x}.$$

Kokkuvõttes

$$\begin{cases} y = \ln(x^2+1) + C_1, \\ z = \dfrac{x\ln(x^2+1)}{2} + \dfrac{\ln(x^2+1)}{2x} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{xC_1}{2} + \dfrac{C_2}{x}. \end{cases}$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Ülesanne 29.1

Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\frac{dx}{dt} = z - y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = z - x.$$

Lahendus

Peame meeles, et siin ülesandes on $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$. Asendame teise võrrandi esimesse ja kolmandasse võrrandisse.

$$\begin{cases} x' = y' - y, \\ y' = z, \\ z' = y' - x. \end{cases} \tag{1}$$

Kui võtta teisest võrrandist tuletise saame võrrandi

$$y'' = z'.$$

Asendame selle kolmandasse võrrandisse, et saada

$$\begin{cases} x' = y' - y, \\ y' = z, \\ y'' = y' - x. \end{cases}$$

Võtame kolmandast võrrandist tuletise ning saame

$$y''' = y'' - x' \text{ ehk } x' = y'' - y'''.$$

Asendame selle esimesse võrrandisse, et saada

$$y'' - y''' = y' - y.$$

Saame kõrgemat järku konstantsete kordajatega lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y''' - y'' + y' - y = 0.$$

Selle karakteristlik võrrand on

$$\begin{aligned} &k^3 - k^2 + k - 1 = 0, \\ &k(k^2 + 1) - (k^2 + 1) = 0, \\ &(k^2 + 1)(k - 1) = 0. \end{aligned}$$

Selle lahenditeks on $k_1 = 1$, $k_2 = i$, $k_3 = -i$. Sellest järeldame, et

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t.$$

Leiame y tuletise

$$y' = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 e^t.$$

Võrrandisüsteemi (1) teisest võrrandist saame, et

$$z = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 e^t.$$

Järelikult z tuletis on

$$z' = -C_1 \cos t - C_2 \sin t + C_3 e^t.$$

Esialgse võrrandisüsteemi kolmandast võrrandist saame seega, et

$$x = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 e^t + C_1 \sin t + C_2 \cos t - C_3 e^t = (C_2 - C_1) \sin t + (C_1 + C_2) \cos t.$$

Kokkuvõttes saime lahenditeks

$$\begin{cases} x = (C_2 - C_1) \sin t + (C_1 + C_2) \cos t, \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t, \\ z = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 e^t. \end{cases}$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Ülesanne 29.2

Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$y' = \frac{z}{(z-y)^2}, \qquad z' = \frac{y}{(z-y)^2}$$

integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Lahendus

Lahutame teisest võrrandist esimese võrrandi, saame muutujavahetusega $u = z - y$ eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi.

$$\begin{aligned}
z' - y' &= \frac{y-z}{(z-y)^2}, \\
(z-y)' &= -\frac{1}{z-y}, \qquad \Big| u = z - y \\
u' &= -\frac{1}{u}, \\
u\,du &= -\,dx, \\
\frac{u^2}{2} &= -x + C_1, \\
u^2 &= -2x + C_1, \\
(z-y)^2 &= -2x + C_1, \qquad (1) \\
C_1 &= 2x + (z-y)^2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Liidame mõlemad esialgsed võrrandid kokku ning kasutame võrdust (1). Muutujavahetusega $u = z + y$ saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi.

$$\begin{aligned}
y' + z' &= \frac{z+y}{C_1 - 2x}, \qquad \Big| u = z + y \\
u' &= \frac{u}{C_1 - 2x}, \\
\frac{du}{u} &= \frac{dx}{C_1 - 2x}, \\
\ln|u| &= -\frac{1}{2}\ln|C_1 - 2x| + C_2, \\
u &= \frac{C_2}{\sqrt{|C_1 - 2x|}}, \\
z + y &= \frac{C_2}{\sqrt{|C_1 - 2x|}}.
\end{aligned}$$

Asendades avaldise (2) saadud võrdusse saame, et

$$\begin{aligned}
z + y &= \frac{C_2}{z-y}, \\
(z+y)(z-y) &= C_2, \\
z^2 - y^2 &= C_2.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes saame diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldlahendiks

$$\begin{cases} 2x + (z-y)^2 = C_1, \\ z^2 - y^2 = C_2. \end{cases}$$

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 29.7

Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y; \quad u(y, y) = 2y.$$

Lahendus

Loeme muutujat y parameetriks ning lahendame vastava hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{du}{dx} = x + y.$$

Tegemist on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga. Eraldame muutujad ning integreerime

$$\begin{aligned} du &= (x + y)\, dx, \\ \int du &= \int (x + y)\, dx, \\ u &= \frac{x^2}{2} + xy + C(y). \end{aligned}$$

Kuna u on kahemuutuja funktsioon, siis integreerimiskonstant $C(y)$ võib sõltuda argumendist y. Tingimusest $u(y, y) = 2y$ saame, et

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} + y^2 + C(y) &= 2y, \\ C(y) &= 2y - \frac{3y^2}{2}. \end{aligned}$$

Tingimust $u(y, y) = 2y$ rahuldavaks erilahendiks on seega

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + 2y - \frac{3y^2}{2}.$$

Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 30.1

Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = x - y,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y)$.

Märkus!

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi

$$p(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = r(x, y, u)$$

lahendamiseks lahendatakse ekvivalentset ülesannet, mis on harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{p(x, y, u)} = \frac{dy}{q(x, y, u)} = \frac{du}{r(x, y, u)}.$$

Sellele harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemile saab leida kaks lineaarselt sõltumatut üldlahendit

$$\psi_1(x, y, u) = C_1,$$
$$\psi_2(x, y, u) = C_2,$$

siis osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$\varphi(\psi_1, \psi_2) = 0,$$

kus φ on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Lahendus

Lahendame vastava harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{x - y}.$$

Esimesest võrdusest saame, et

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$
$$x\,dx = y\,dy,$$
$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1,$$
$$x^2 - y^2 = C_1, \tag{1}$$
$$x = \sqrt{y^2 + C_1}. \tag{2}$$

Võrdusest (1) saame, et $\psi_1(x, y, u) = x^2 - y^2$. Teisest võrdusest saame, et

$$\frac{dy}{x} = \frac{du}{x - y},$$
$$\frac{(x - y)\,dy}{x} = du,$$
$$\left(1 - \frac{y}{x}\right) dy = du.$$

Asendame avaldise x kasutades võrdust (2) ning integreerime mõlemat poolt, saame

$$\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+C_1}}\right)dy = du,$$
$$\int\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+C_1}}\right)dy = \int du,$$
$$\int dy - \frac{1}{2}\int\frac{d(y^2+C_1)}{\sqrt{y^2+C_1}} = \int du,$$
$$y-\sqrt{y^2+C_1}+C_2 = u,$$
$$y-x+C_2 = u,$$
$$C_2 = u-y+x.$$

Järelikult $\psi_2(x,y,u) = u-y+x$. Kokkuvõttes saime lahendiks

$$\varphi(x^2-y^2, u-y+x) = 0,$$

kus φ on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon. Sellest lahendist on võimalik avaldada otsitav funktsioon u kui teises argumendis oleva funktsiooni kirjutame kujul

$$u-y+x = f(x^2-y^2),$$

ning avaldame u

$$u = f(x^2-y^2)+y-x,$$

kus f on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Märkus!

Teine viis, kuidas oleks saanud leida $\psi_2(x,y,u)$, oleks olnud panna tähele, et

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{x-y} = \frac{dx-dy+du}{y-x+x-y} = \frac{dx-dy+du}{0}.$$

Ning otsinud funktsiooni $z(x,y,u)$ nii, et tema täisdiferentsiaal oleks olnud $dz = dx-dy+du$. Kuna nimetaja võrdumine nulliga sümmeetrilises süsteemis tähendab lugeja võrdumist nulliga ehk teisisõnu $dz = 0$, millest saame, et $z = C_2$.
Lisaks tingimustest $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} = 1$ ning $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$ saame üheks konkreetseks funktsiooniks $z = x-y+u$. Kokkuvõttes $x-y+u = C_2$, millest saame, et $\psi_2(x,y,u) = x-y+u$.

Ülesanne 30.1

Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = x^2+y^2,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x,y)$.

Lahendus

Lahendame vastava harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{x^2+y^2}.$$

Esimesest võrdusest saame analoogiliselt eelmise ülesandega

$$x^2 = y^2 + C_1,$$
$$x = \sqrt{y^2 + C_1},$$
$$x^2 - y^2 = C_1.$$

Saame, et $\psi_1(x,y,u) = x^2 - y^2$. Korrutame harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi esimese murru lugejat ja nimetajat avaldisega $-y$ ja teise murru lugejat ja nimetajat avaldisega $-x$. Saame harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi kujul

$$\frac{-y\,dx}{-y^2} = \frac{-x\,dy}{-x^2} = \frac{du}{x^2 + y^2}.$$

Liidame kõik süsteemi nimetajad ja lugejad omavahel kokku, saame

$$\frac{-y\,dx}{-y^2} = \frac{-x\,dy}{-x^2} = \frac{du}{x^2 + y^2} = \frac{-y\,dx - x\,dy + du}{-y^2 - x^2 + x^2 + y^2} = \frac{-y\,dx - x\,dy + du}{0}.$$

Olgu $z(x,y,u)$ selline funktsioon, mille korral tema täisdiferentsiaal on $dz = -y\,dx - x\,dy + du$. Kuna nimetaja võrdumine nulliga sümmeetrilises süsteemis tähendab lugeja võrdumist nulliga, saame murrust $\frac{dz}{0}$, et $dz = 0$.

On näha, et $\frac{\partial z}{\partial x} = -y$. Loeme muutujat y parameetriks ning siis saame, et

$$\frac{dz}{dx} = -y,$$
$$dz = -y\,dx,$$
$$z = -yx + C(y,u),$$

kus integreerimiskonstant $C(y,u)$ võib sõltuda muutujast y ja u. Tingimusest $\frac{\partial z}{\partial y} = -x$ saame, et

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(-yx + C(y,u)) = -x,$$
$$-x + \frac{\partial}{\partial y}C(y,u) = -x,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}C(y,u) = 0,$$
$$C(y,u) = C(u)$$

ehk integreerimiskonstant $C(y,u)$ ei sõltu muutujast y ning võib kirjutada $C(y,u) = C(u)$. Tingimusest $\frac{\partial z}{\partial u} = 1$ saame, et

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 1,$$
$$\frac{\partial}{\partial u}(-yx + C(u)) = 1,$$
$$\frac{\partial}{\partial u}C(u) = 1,$$
$$C(u) = u + C.$$

Kuna otsime ühte kindlat funktsiooni z, siis võtame $C = 0$. Seega saame, et $z = -yx + u$ ning tingimusest $dz = 0$ järeldub, et $z = C_2$. Järelikult saame

$$-yx + u = C_2, \qquad \text{millest } u = C_2 + yx.$$

Kokkuvõttes saame harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendiks

$$\varphi\left(x^2 - y^2, -yx + u\right) = 0,$$

kus φ on suvaline funktsioon. Sellest on võimalik avaldada otsitava funktsiooni u, kui teises argumendis oleva funktsiooni kirjutame kujul

$$-yx + u = f(x^2 - y^2),$$

ning avaldame suuruse u kujul

$$u = yx + f(x^2 - y^2),$$

kus f on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 32.1

Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y, z)$.

Lahendus

Lahendame vastava harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2\,dz}{z}.$$

Esimesest võrdusest saame, et

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y}, \\ xC_1 &= y, \\ C_1 &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Teisest võrdusest saame, et

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \frac{2\,dz}{z}, \\ \ln|y| &= 2\ln|z| + C_2, \\ y &= z^2 C_2, \\ C_2 &= \frac{y}{z^2}. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saame osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks

$$u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{y}{z^2}\right),$$

kus f on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Ülesanne 32.2

Leidke võrrandi
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+(y+x^2)\frac{\partial u}{\partial y}=u$$
selline integraalpind $u=u(x,y)$, mis läbib joont
$$x=2,\quad u=y-4.$$

Lahendus

Lahendame vastava harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y+x^2}=\frac{du}{u}.$$
Esimese ja viimase liikme võrdusest saame, et
$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u},$$
$$u=xC_1,$$
millest $C_1=\frac{u}{x}$. Esimese ja teise liikme võrdusest saame, et
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y+x^2}$$
$$\frac{y+x^2}{x}=\frac{dy}{dx}.$$
Saame lineaarse hariliku diferentsiaalvõrrandi
$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x. \tag{1}$$
Sellele vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendiks on
$$y_h=Cx.$$
Erilahendi leiame konstantide varieerimise meetodiga, kus
$$Y=C(x)x,\quad \text{millest } Y'=C'(x)x+C(x).$$
Asetades need võrrandisse (1) saame
$$\begin{aligned}C'(x)x+C(x)-C(x)&=x,\\ C'(x)x&=x,\\ C'(x)&=1,\\ C(x)&=x.\end{aligned}$$
Seega võrrandi (1) lahend on
$$y=C_2x+x^2,\quad \text{millest saame } C_2=\frac{y-x^2}{x}.$$
Seega saame üldlahendiks $f\left(\frac{u}{x},\frac{y-x^2}{x}\right)=0$, kus f on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon. Sellest on võimalik avaldada otsitava funktsiooni u, kui esimeses argumendis oleva funktsiooni kirjutame kujul

$$\frac{u}{x} = F\left(\frac{y - x^2}{x}\right),$$

kus F on pidevalt diferentseeruv funktsioon, siis $u = xF\left(\frac{y - x^2}{x}\right)$. Seega saame tingimustest $u = y - 4$ ja $x = 2$, et

$$y - 4 = 2F\left(\frac{y - 2^2}{2}\right), \qquad \text{millest } \frac{y-4}{2} = F\left(\frac{y-4}{2}\right).$$

Sellest võrdusest järeldub, et F on samasusteisendus (ehk $F(x) = x$ iga argumendi x korral). Siis saame järeldada, et

$$u = xF\left(\frac{y - x^2}{x}\right) = x\frac{y - x^2}{x} = y - x^2.$$

Eksami näidisülesanded

Ülesanne 32.5

Lahendage lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$(y - ze^z)\frac{\partial u}{\partial x} + ze^z\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y, z)$.

Lahendus

Lahendame vastava harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{y - ze^z} = \frac{dy}{ze^z} = \frac{dz}{-y}.$$

Teisest võrdusest saame, et

$$\begin{aligned}\frac{dy}{ze^z} &= \frac{dz}{-y},\\ -y\,dy &= ze^z\,dz,\\ -\frac{y^2}{2} &= ze^z - e^z + C_1,\\ C_1 &= y^2 + 2ze^z - 2e^z.\end{aligned}$$

Kasutame võrdsete murdude omadust ning liidame kõik murru lugejad ja nimetajad kokku, saame

$$\frac{dx}{y - ze^z} = \frac{dy}{ze^z} = \frac{dz}{y} = \frac{d(x + y + z)}{y - ze^z + ze^z - y} = \frac{d(x + y + z)}{0}.$$

Et nimetaja võrdumine nulliga sümmeetrilises süsteemis tähendab lugeja võrdumist nulliga, saame

$$d(x + y + z) = 0, \qquad \text{millest } x + y + z = C_2.$$

Kokkuvõttes osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$u = f\left(y^2 - 2ze^z + 2e^z, x + y + z\right),$$

kus f on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Eksami näidisülesanded

Ülesanne 32.6

Lahendage lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^{-1} \frac{\partial u}{\partial y} = e^{y^2} - 1, \quad (x, y > 0),$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y)$.

Lahendus

Lahendame vastava harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{x^2} = y\, dy = \frac{du}{e^{y^2} - 1}.$$

Kasutades esimest võrdust saame

$$\frac{dx}{x^2} = y\, dy,$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{x} + C_1,$$

millest saame

$$C_1 = y^2 + \frac{2}{x}.$$

Kasutades teist võrdust saame

$$\begin{aligned} y\, dy &= \frac{du}{e^{y^2} - 1}, \\ \left(ye^{y^2} - y\right) dy &= du, \\ \int ye^{y^2}\, dy - \int y\, dy &= \int du, \\ \frac{1}{2} \int e^{y^2}\, d(y^2) - \int y\, dy &= \int du, \\ \frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{y^2}{2} &= u + C_2, \\ 2u - e^{y^2} + y^2 &= C_2. \end{aligned}$$

Saame esialgse osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendiks

$$f\left(2u - e^{y^2} + y^2, y^2 + \frac{2}{x}\right) = 0,$$

kus f on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon. Sellest on võimalik avaldada otsitava funktsiooni u, kui esimeses argumendis oleva funktsiooni kirjutame kujul

$$2u - e^{y^2} + y^2 = \varphi\left(y^2 + \frac{2}{x}\right),$$

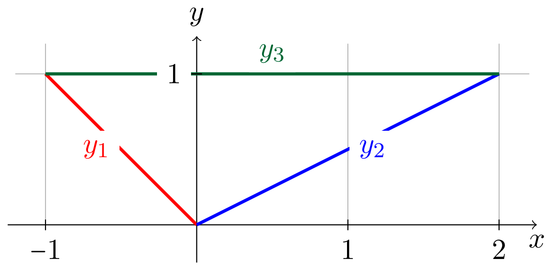
ning avaldame suuruse u kujul

$$u = \frac{e^{y^2} - y^2}{2} + \varphi_1\left(y^2 + \frac{2}{x}\right),$$

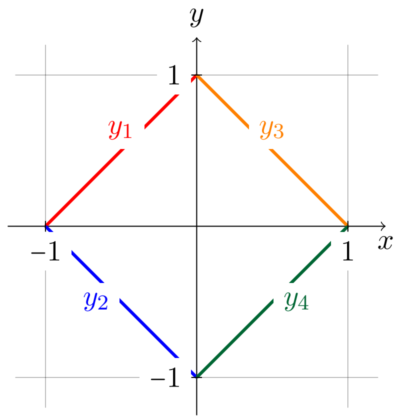
kus φ on suvaline pidevalt diferentseeruv funktsioon ja

$$\varphi_1\left(y^2 + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(y^2 + \frac{2}{x}\right).$$

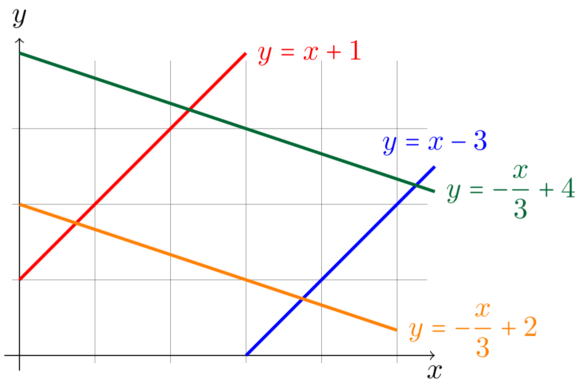
Lahendus



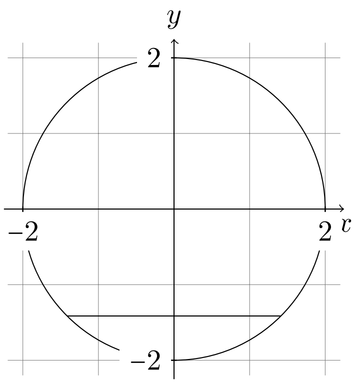
Lahendus



Lahendus



Lahendus



Lahendus