

Praktikum 12: Konformne kujutamine.

1. Kujutada ülemine pooltasand konformselt ühikringiks, kusjuures punkt z_0 , $\operatorname{Im} z_0 > 0$ kujutub nullpunktiks ning tasandi pööre punktis z_0 on $\alpha \in \mathbb{R}$.
 2. Kujutada piirkond $D = \{x \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\pi/3\}$ konformselt ühikringiks nii, et $f(e^{i\pi/3}) = 0$ ja $\arg f'(e^{i\pi/3}) = -\pi/3$.
 3. Kujutada piirkond $D = \left\{x \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$ konformselt ühikringiks nii, et $f(0) = 1$ ja $f(i\pi/3) = 0$.
 4. Missuguseks hulgaks kujutab funktsioon $f(z) = \tan z$ piirkonna $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$?
 5. Leida konformne kujutus f , mis teisendab piirkonna $D = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \sqrt{2}, |z-1| < \sqrt{2}\}$ ühikringiks nii, et $f(0) = 0$ ja $\arg f'(0) = \pi/2$.
 6. Olgu $a > 0$. Missuguseks piirkonnaks kujutab funktsioon $f(z) = z + \frac{a^2}{z}$ hulga $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > a\}$? Kas see kujutus on konformne? Leida selle kujutuse pöördkujutus.
 7. Olgu f konformne kujutus piirkonnast D piirkonda G . Olgu $D_{\mathbb{R}}$ ja $G_{\mathbb{R}}$ piirkondadele D ja G vastavad piirkonnad tasandil $\mathbb{R}^2$. Tähistame $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ ja $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$, $(x, y) \in D_{\mathbb{R}}$. Olgu φ harmooniline funktsioon piirkonnas $G_{\mathbb{R}}$. Defineerime $\Phi(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$, $(x, y) \in D_{\mathbb{R}}$. Näidata, et siis Φ on harmooniline piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$.
- R.*** (2 p.) Olgu f regulaarne lõpmatuspunktis. Missugusel tingimusel on f pööratav mingis lõpmatuse ümbruses?
- S.*** (2 p.) Leida piirkonna $B(0, 4) \setminus \overline{B(2, 1)}$ konformne kujutus rõngaks $B(0, 1) \setminus \overline{B(0, r)}$ (r võib ise sobivalt valida, $0 < r < 1$).
- T.**** Olgu antud piirkonnad D ja G kolmemõõtmelises ruumis. Millistel tingimustel leidub üksühene kujutus f piirkonnast D piirkonda G , nii, et kui φ on harmooniline funktsioon piirkonnas G , siis $\Phi = \varphi \circ f$ on harmooniline funktsioon piirkonnas D (s.t. $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$)? Siin võiksid huvi pakkuda ka erijuhud, näiteks:
- a) Millised lineaarsed funktsioonid teisendavad harmoonilised funktsioonid harmoonilisteks?
 - b) Kas on võimalik kujutada ühikera ühikkeraks nii, et suvaline ühikera punkt kujutuks keskpunktiks ning harmoonilised funktsioonid teiseksid harmoonilisteks funktsioonideks?
 - c) Kas saab ühikera kujutada poolruumiks (või vastupidi) nii, et harmoonilised funktsioonid kujutuksid harmoonilisteks funktsioonideks?
 - d) Leida (mittelineaarseid) näiteid selliste kujutuste kohta.