

Praktikum 1: Tehted kompleksarvudega. Kompleksarvude hulgad.

1. Näidata, et $(r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ ja $(r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$, $n \in \mathbb{N}$.
 2. Näidata, et $\tan(\arg(x + iy)) = \frac{y}{x}$. Kas on õige, et $\arg(x + iy) = \arctan \frac{y}{x}$?
 3. Näidata, et $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ja $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$. Millal kehtivad võrdused?
 4. Näidata, et $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|$. Millal kehtivad võrdused?
 5. Joonistada järgmised hulgad komplekstasandil:
 - a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < 2\}$,
 - b) $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg z < \pi, 0 < |z| < 2\}$,
 - c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \geq |z - 1 - i|\}$,
 - d) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 2i| < 2, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\}$,
 - e) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2|z - i|\}$.
 6. Näidata, et võrrand $az\bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + b = 0$, kus $A \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ning $|A|^2 - ab > 0$, on sirgete ja ringjoonte üldvõrrand (s.t. see võrrand kirjeldab alati kas sirge või ringjoone ning kõiki sirgeid ja ringjooni on võimalik kirjeldada selle võrrandiga).
- A*** (1 p.) Olgu $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Leida summad $\sum_{k=0}^n \cos k\alpha$ ja $\sum_{k=1}^n \sin k\alpha$.
- B*** (2 p.) Ringjoon raadiusega 1 jagatakse n punktiga võrdseteks osadeks, seejärel ühendatakse üks nendest punktidest kõigi ülejäänutega. Leida saadud kõõlude pikkuste korrutis.

Praktikum 2:

Funktsiooni piirväärtus, pidevus ja diferentseeruvus

1. Missugusteks joonteks kujutab funktsioon $w = Az + C$, kus A ja C on fikseeritud kompleksarvud, sirged $x = a$ ja $y = b$? Teha joonis.
 2. Missugusteks joonteks kujutab funktsioon $w = z^2$ sirged $x = a$ ja $y = b$? Teha joonised.
 3. Leida piirväärtused või näidata, et piirväärtust ei leidu
 - a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n}$,
 - b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n - i}{n + i}$,
 - c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}$,
 - d) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)}{|z|^2}$,
 - e) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{|z|^2 - 1}{z^2 + 1}$.
 4. Näidata, et iga lõplikuks arvaks koonduv jada on tõkestatud.
 5. Näidata, et funktsioon $f(z) = \bar{z}$ on ühtlaselt pidev kogu komplekstasandil.
 6. Näidata, et funktsioon $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$ pole kusagil diferentseeruv.
 7. Tõestada liitfunktsiooni diferentseerimise reegel.
- C*** (2 p.) Olgu $z_0 \in \mathbb{C}$. Defineerime $z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n - \frac{1}{z_n} \right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Uurida jada (z_n) koonduvust (kui mingil sammul tuleb $z_n = 0$, siis loeme jada hajuvaks).
Näpunäide: kasu võib olla suuruse $\frac{z_n - i}{z_n + i}$ uurimisest.
- D*** (2 p.) Näidata, et funktsioon $f(z) = \begin{cases} z^3/\bar{z}^2, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ rahuldab Cauchy-Riemanni võrrandeid punktis $z = 0$, kuid pole diferentseeruv punktis $z = 0$. Kas see on vastuolus teooriaga?