

Praktikum 3-4: Elementaarfunktsioonid

1. Leida funktsiooni $f(z) = \sqrt[4]{z-1}$ see haru, mille puhul $f(2) = -1$.
 2. a) Näidata, et üldiselt $\sqrt[4]{z^2} \neq (\sqrt[4]{z})^2$.
b) Missuguste $m, n \in \mathbf{N}$ korral $\sqrt[n]{z^m} = (\sqrt[n]{z})^m$?
 3. Leida piirkonnas $D = \{z \in \mathbf{C} : \pi/6 < \arg z < \pi/2\}$ regulaarne funktsioon, mis kujutab piirkonna D ülemiseks pooltasandiks $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.
 4. Missugusteks joonteks kujutab funktsioon $f(z) = e^z$ jooned $\operatorname{Re} z = a$ ja $\operatorname{Im} z = b$?
 5. Kas $\ln(-1 + \sqrt{3}i)^2 = 2\ln(-1 + \sqrt{3}i)$? Aga kas $\operatorname{Ln}(-1 + \sqrt{3}i)^2 = 2\operatorname{Ln}(-1 + \sqrt{3}i)$?
 6. Leida $(\ln z)'$.
 7. Missugusteks joonteks kujutab funktsioon $f(z) = \ln z$ jooned $|z| = R$ ja jooned $\arg z = \varphi$?
 8. Arvutada i^i . (Märkus: $z^A = e^{A \operatorname{Ln} z}$).
 9. Missuguseks hulgaks kujutab funktsioon $f(z) = i \frac{z-1}{z+1}$ ühikringi ülemise poole?
 10. Näidata, et $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ iga kompleksarvu z korral.
 11. Lahendada võrrandid
a) $\cos z = 10$, b) $\tan z = i$.
 12. Näidata, et $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$ ja $\operatorname{ch} z = \cos iz$.
- E*.** (1 p.) Kas leidub selline murdlineaarne funktsioon, mis kujutab ühikringi ülemise poole ühikringiks? Põhjendada.
- F*.** (2 p.) Kas on võimalik leida multifunktsiooni $f(z) = \sqrt{1-z^2}$ selline haru, mis oleks regulaarne kogu komplekstasandil, millest on välja lõigatud lõik $[-1, 1]$? Põhjendada.

Praktikum 5: Integreerimine

1. a) Arvutada $\int_{\gamma} \sqrt{z-a} dz$, kus γ on ringjoon raadiusega r ja keskpunktiga a ja $\sqrt{\cdot}$ tähistab ruutjuure peaharu.
b) Arvutada $\int_{\gamma} e^z dz$, kus γ on ruut küljepikkusega 2 ja keskpunktiga nullpunktis.
c) Arvutada $\int_{\gamma} \ln z dz$, kus γ on ühikringjoon.
d) Arvutada $\int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z} dz}{z+i}$.
e) Arvutada $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, kus γ on sirglõik otspunktidega $-1-i$ ja $-1+i$.
 2. Näidata, et $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{2\pi}{3}$, kus γ on ringjoone $|z| = 2$ ülemises pooltasandis asuv osa.
 3. Arvutada $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1}$, kus γ on ringjoone $|z| = 2$ ülemises pooltasandis asuv osa
a) kompleksmuutuja funktsiooni integraali definitsiooni abil,
b) Newton-Leibnizi valemi abil,
c) Cauchy valemi abil reaalmuutuja integraalile taandades.
- G*.** (2 p.) Näidata, et iga ühikringis regulaarse ja kuni rajani pideva funktsiooni f korral kehtib võrratus $\max_{|z|=1} \left| f(z) - \frac{1}{z} \right| \geq 1$. (Seetõttu ei saa funktsiooni $\frac{1}{z}$ ühikringjoonel ühtlaselt lähendada ühikringis regulaarsete funktsioonidega, näiteks polünoomidega.)
- H*.** (2 p.) Olgu f regulaarne kogu komplekstasandil.
a) Näidata, et kui leidub $M > 0$ nii, et $|f(z)| > M$ iga $z \in \mathbf{C}$ korral, siis f on konstantne.
b) Näidata, et kui $\operatorname{Re} f$ on tõkestatud alt või ülalt, siis f on konstantne.