

## Praktikum 6-7: Astmeread. Tayloriga rida.

1. Uurida järgmiste ridade absoluutset koonduvust:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n},$

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n-2} \left( \frac{4+3i}{z-i-1} \right)^{2n-1},$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^n)(z-1)^{2n}}{n!},$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n\sqrt{n}},$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(z+2i)^{3n+1}}{2n-1},$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{z^n-1}.$

2. Arendada järgmised funktsioonid Tayloriga ritta punktis  $a$  ning leida rea koonduvuspiirkond:

a)  $f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad a = 2;$

e)  $f(z) = \int_0^z \frac{\sin \zeta}{\zeta} d\zeta, \quad a = 0;$

b)  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}, \quad a = 0;$

f)  $f(z) = \frac{1}{(2+z^2)^3}, \quad a = 0;$

c)  $f(z) = \frac{1+iz}{1-iz}, \quad a = 0;$

g)  $f(z) = \ln(\sqrt{z^2+1}+z), \quad a = 0.$

d)  $f(z) = e^{\pi z}, \quad a = i;$

3. Olgu astmerida  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  selline, et leidub piirväärtus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ . Näidata, et siis selle astmerea koonduvusraadius on  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ .

4. Olgu  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  ja  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n$ , ning olgu nende ridade koonduvusraadiused vastavalt  $R_1$  ja  $R_2$ . Näidata, et siis  $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ , kus  $b_n = \sum_{k=0}^n c_k d_{n-k}$  ning selle rea koonduvusraadius  $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ .

5. Tõestada L'Hospitali reegel: olgu  $f$  ja  $g$  regulaarsed punktis  $a$  ning olgu  $f(a) = g(a) = 0$ , kusjuures  $g$  pole konstantselt 0 punkti  $a$  ümbruses. Siis  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$ , kusjuures mõlemad piirväärtused (kas lõplikud või lõpmatud) leiduvad.

6. Kas leidub selline ühikringis regulaarne funktsioon, mis rahuldaks

a)  $f(z) = |z|^2$  vahemikus  $(-1,1)$ ?

b)  $f(z) = |z|^3$  vahemikus  $(-1,1)$ ?

I.\* (2 p.) (Üldistatud Liouville'i teoreem). Olgu  $f$  regulaarne kogu komplekstasandil, kusjuures leiduvad positiivsed konstandid  $K$  ja  $M$  ning naturaalarv  $k$  nii, et  $|f(z)| \leq M|z|^k$ , kui  $|z| > K$ . Tõestada, et siis  $f$  on ülimalt  $k$ -nda astme polünoom.

J.\* (2 p.) Olgu  $f$  regulaarne kogu komplekstasandil ning olgu  $|f(z)| \leq Me^{|z|}$  iga  $z \in \mathbf{C}$  korral. Näidata, et siis funktsiooni  $f$  Tayloriga rida punktis  $a = 0$  rahuldavad võrratust  $|c_n| \leq M \left( \frac{e}{n} \right)^n$ .