

Ühe muutuja matemaatiline analüüs

Praktikumiülesannete kogu

2021. a. kevadsemester

Valminud Hariduse Infotehnoloogia Sihtasutuse IT Akadeemia programmi toel.

1. Järjestatud korpuse omadused

1. Aksioomidest (A1)–(A4) lähtudes tõestage, et

- 1) nullelement 0 on igas korpuses F üheselt määratud;
- 2) iga $a \in F$ korral on vastandelement $-a$ üheselt määratud;
- 3) võrrandil $a + x = b$ on korpuses F parajasti üks lahend $x := b - a$;
- 4) $-(a + b) = -a - b$.

2. Aksioomidest (M1)–(M4) lähtudes tõestage, et

- 1) ühikelement 1 on igas korpuses F üheselt määratud;
- 2) iga $b \neq 0$ korral on pöördelinelement b^{-1} üheselt määratud;
- 3) kui $a \neq 0$, siis võrrandil $a \cdot x = b$ on korpuses F parajasti üks lahend $x := b \cdot a^{-1}$;
- 4) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

3. Korpuse aksioomidest lähtudes tõestage, et korpuses F kehtivad järgmised väited:

- 1) $0a = 0$ iga $a \in F$ korral;
- 2) kui $ab = 0$, siis kas $a = 0$ või $b = 0$ (s.t. $F \setminus \{0\}$ ei sisalda nullitegureid);
- 3) $(-a)b = -(ab)$ kõikide $a, b \in F$ korral, muuhulgas $(-1)b = -b$;
- 4) $(-a)(-b) = ab$ kõikide $a, b \in F$ korral.

4. Järjestatud korpuse aksioomidest lähtudes tõestage, et järjestatud korpuses F kehtivad järgmised väited:

- | | |
|--|--|
| 1) $a < b \Leftrightarrow -a > -b$, | 5) $[0 < a < b, 0 < c < d] \Rightarrow ac < bd$, |
| 2) $[a < b, c < 0] \Rightarrow ac > bc$, | 6) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$, |
| 3) $a^2 > 0$ iga $a \in F \setminus \{0\}$ korral, muuhulgas $1 > 0$, | 7) $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$, |
| 4) $[a < b, c < d] \Rightarrow a + c < b + d$, | 8) kui $a < b$, siis $a < 2^{-1}(a + b) < b$, kus $2 := 1 + 1$. |

5. Tõestage, et järjestatud korpuses F ei leidu vähimat positiivset elementi.

6. Olgu $F = \{0, 1\}$, kus tehted on defineeritud vastavalt tavalisele liitmisele ja korrutamisele, välja arvatud $1 + 1 = 0$. Näidata, et F on korpus. Kas F on ka järjestatud korpus?

7. Olgu $F = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, kus tehted on defineeritud vastavalt tavalisele liitmisele ja korrutamisele. Näidata, et F on korpus. Kas F on ka järjestatud korpus tavalise reaalarvude järjestuse suhtes?

8*. Olgu $\mathbb{C}$ kompleksarvude hulk, kus tehted on defineeritud vastavalt tavalisele kompleksarvude liitmisele ja korrutamisele. Näidata, et $\mathbb{C}$ on korpus. Kas korpuses $\mathbb{C}$ saab defineerida järjestuse nii, et $\mathbb{C}$ oleks järjestatud korpus?

2. Absoluutväärtuse omadused. Alumine ja ülemine raja.

9. Tõestage järgmised väited:

- | | | |
|--------------------------------|--|---------------------------------|
| 1) $ a \geq 0$, | 4) $ a = \max\{a, -a\}$, | 7) $ a - b \leq a + b $, |
| 2) $ -a = a $, | 5) $ a \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$, | |
| 3) $a \leq a , -a \leq a $, | 6) $ a + b \leq a + b $, | 8) $ a - b \leq a - b $. |

10. Tõestage, et alamhulga ülemine raja järjestatud korpuses on üheselt määratud (eeldusel, et ta on olemas).

11. Tõestage, et kui järjestatud korpuse alamhulgas on suurim (vähim) element, siis see on selle hulga ülemine (alumine) raja.

12. Tõestage, et kui $a = \sup X$, siis alamhulk $Y := \{\lambda x + 1 : x \in X\}$ on iga $\lambda > 0$ korral ülalt tõkestatud ning $\sup Y = \lambda a + 1$.

13. Olgu $X \neq \emptyset$ ja $Y \neq \emptyset$ sellised reaalarvude hulgad, et $x \leq y$ kõikide $x \in X$ ja $y \in Y$ korral. Tõestage, et X on ülalt ja Y on alt tõkestatud ning $\sup X \leq \inf Y$.

14. Leidke $\min X, \max X, \inf X$ ja $\sup X$, kui

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $X := [0, 1)$, | 3) $X := \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, | 5) $X := \left\{ \frac{n^2+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$. |
| 2) $X := \left\{ \frac{1}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$, | 4) $X := \left\{ \frac{(-1)^n + 2}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$, | |

15. Olgu X ja Y täieliku järjestatud korpuse F mittetühjad alamhulgad. Tõestage järgmised väited.

- 1) Kui X ja Y on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $X + Y := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ning $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.
- 2) Kui X ja Y on alt tõkestatud, siis on ka hulk $X + Y$ alt tõkestatud ning $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.
- 3) Kui X on ülalt ja Y alt tõkestatud, siis on hulk $X - Y := \{x - y : x \in X, y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ning $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$.
- 4) Kui X on alt ja Y ülalt tõkestatud, siis on hulk $X - Y := \{x - y : x \in X, y \in Y\}$ alt tõkestatud ning $\inf(X - Y) = \inf X - \sup Y$.
- 5) Olgu X ja Y sellised hulgad, mille kõik elemendid on mittenegatiivsed. Kui X ja Y on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $X \cdot Y := \{xy : x \in X, y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ning $\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y$.

16*. Leidke järgmised suurused:

$$\sup \{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor : n \in \mathbb{N} \}, \quad \sup \left\{ \frac{(n+m)^2}{2nm} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

17*. Tõestage, lähtudes reaalarvude aksioomidest ja omadustest (märkige iga teisenduse kohale, mida kasutate), et sualiste positiivsete reaalarvude $a_1, \dots, a_n$ korral, mis rahuldavad seost $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, kehtib võrratus $a_1 + \dots + a_n \geq n$.

3. Arvjadad. Jada piirväärtuse omadused

18. Koondugu jada (x_n) ja hajugu jada (y_n) . Mida võib öelda jadade $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$ koondumise kohta? Tooge sobivaid näiteid.

19. Hajugu mõlemad jadad (x_n) ja (y_n) . Kas jadad $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$ samuti hajuvad? Tooge sobivaid näiteid.

20. Kehtigu $\lim_n x_n = 0$ ning hajugu jada (y_n) . Kas kehtib ka $\lim_n x_n y_n = 0$? Tooge sobivaid näiteid.

21. 1) Tõestage, et kui $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) ja (x_{n_k}) on jada (x_n) osajada, siis $x_{n_k} \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$).

2) Tooge näide hajuvast jadast, millel on koonduv osajada.

22. 1) Olgu $\lim_n x_n = a > 0$. Näidake, et leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $x_n > 0$ iga $n \geq N$ korral.

2) Sõnastage ja tõestage analoogiline väide juhul $a < 0$.

23. Tõestage, et arvjada (x_n) on tõkestatud parajasti siis, kui leidub selline $K > 0$, et $|x_n| \leq K$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

24. 1) Olgu $N \in \mathbb{N}$ ja olgu (x_n) selline jada, et $x_n = a$ iga $n \geq N$ korral. Näidake, et $\lim_n x_n = a$.

2) Tooge näide hajuvast jadast (x_n) , kus $x_n = a$ lõpmata paljude indeksite n korral.

25. Veenduge, et kui $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow a$, siis ka $z_n \rightarrow a$, kus $(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots)$, s.t.

$$z_n := \begin{cases} x_k, & \text{kui } n = 2k - 1, \\ y_k, & \text{kui } n = 2k. \end{cases}$$

26. 1) Tõestage, et kui $x_n \leq y_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ning $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow b$, siis $a \leq b$.

2) Olgu $x_n \leq c$ ($n \in \mathbb{N}$). Tõestage, et kui $x_n \rightarrow a$, siis $a \leq c$.

27. 1) Tõestage, et kui $x_n \leq z_n \leq y_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ja $\lim_n x_n = \lim_n y_n = a$, siis $\lim_n z_n = a$.

2) Olgu $0 \leq x_n \leq y_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tõestage, et kui $\lim_n y_n = 0$, siis $\lim_n x_n = 0$.

28. Olgu $\lim_n x_n = a$ ja $\lim_n y_n = b$. Veenduge, et $\lim_n \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}$ ning

$\lim_n \min\{x_n, y_n\} = \min\{a, b\}$.

29. Tõestage, et kui $x_n \rightarrow 0$ ja (y_n) on tõkestatud jada, siis $x_n y_n \rightarrow 0$.

30. Tõestage, et kui $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow b$, siis

1) $x_n + y_n \rightarrow a + b$;

4) $\lambda x_n \rightarrow \lambda a$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ puhul;

6) $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ ($b \neq 0, y_n \neq 0$).

2) $x_n - y_n \rightarrow a - b$;

5) $\frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$ ($a \neq 0, x_n \neq 0$);

3) $x_n y_n \rightarrow ab$;

31*. Olgu (a_n) jada, mille korral osajada $(a_{mk})_{k=1}^\infty$ koondub iga $m = 2, 3, 4, \dots$ korral. Kas sel-
lest järeldub, et jada (a_n) koondub?

32*. Olgu antud jadad (x_n) ja (y_n) , kus $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, ning $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ ja

$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, kui $n \in \mathbb{N}$. Tõestage, et $\lim x_n = \lim y_n$ (seda piirväärtust nimetatakse ka arvude a ja b aritmeetilis-geomeetriliseks keskmiseks).

4. Jada piirväärtuse definitsioon ja arvutamine

33. Lähtudes jada piirväärtuse definitsioonist, tõestage järgmised koondumised.

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \sqrt{2n}} = 0; & 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n}{2 + n} = 7; & 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 5}{8n - 3} = \frac{1}{2}; \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + 5n} = 0; & 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}} = 0; & 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 8}{n^2 - 25} = 0. \end{array}$$

34. 1) Tõestage, et kui $\lim_n x_n = a$, siis $\lim_n |x_n| = |a|$.

2) Veenduge, et vastupidine väide on üldjuhul väär.

3) Tõestage, et $\lim_n x_n = 0$ parajasti siis, kui $\lim_n |x_n| = 0$.

35. Tõestage, et $\lim_n |x_n| = \infty$ parajasti siis, kui $\lim_n \frac{1}{x_n} = 0$.

36. Tõestage, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral leidub ratsionaalarvude jada (x_n) omadusega $x_n \rightarrow a$. (Kasutage asjaolu, et $\mathbb{Q}$ on tihe korpuses $\mathbb{R}$.)

37. Leida järgmiste jadade piirväärtused:

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - (-1)^n; & 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{1,1^n} + \sqrt[n]{3}; & 7) \lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n + \frac{1}{(-2)^n}; \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7n - 3}{(3n + 2)^2}; & 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{(1 - 2n)^2}; & 8) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+1)} - n); \\ 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} + n^2 \sin n\pi; & 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 1}{3^n - 2}; & 9) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n(n+1)} - n); \end{array}$$

38*. Fibonacci jada (F_n) on defineeritud järgmiselt: $F_0 = F_1 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, kui $n \in \mathbb{N}$.

Kas jada $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ koondub? (Põhjendage!) Jaatava vastuse korral leidke piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

39*. Olgu $x_1 = A$, $x_2 = B$, kus $0 < B < A$. Kehtigu seos $\frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n+1}}$ iga $n \geq 2$ korral.

Tõestage, et jada (x_n) koondub ja leidke selle piirväärtus.

40*. Olgu $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}$. Leidke piirväärtus $\lim_n x_n$.

5. Alumine ja ülemine piirväärtus

41. Olgu (x_n) tõkestatud jada. Tõestage, et $\lim_n x_n = \sup \{ \inf \{ x_n : n \geq k \} : k \in \mathbb{N} \}$ ja $\overline{\lim}_n x_n = \inf \{ \sup \{ x_n : n \geq k \} : k \in \mathbb{N} \}$.
42. Tõestage, et $\inf_n x_n \leq \lim_n x_n \leq \overline{\lim}_n x_n \leq \sup_n x_n$.
43. Olgu (x_n) ja (y_n) tõkestatud jadad, kusjuures iga n korral $x_n \leq y_n$. Tõestage, et $\lim_n x_n \leq \lim_n y_n$ ja $\overline{\lim}_n x_n \leq \overline{\lim}_n y_n$.
44. Olgu (x_n) tõkestatud jada.
- 1) Tõestage, et kui $c > 0$, siis $\lim_n (cx_n) = c \cdot \lim_n x_n$ ja $\overline{\lim}_n (cx_n) = c \cdot \overline{\lim}_n x_n$.
 - 2) Tõestage, et kui $c < 0$, siis $\lim_n (cx_n) = c \cdot \overline{\lim}_n x_n$ ja $\overline{\lim}_n (cx_n) = c \cdot \lim_n x_n$.
45. Olgu (x_n) ja (y_n) tõkestatud jadad. Tõestage, et $\lim_n x_n + \lim_n y_n \leq \lim_n (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_n x_n + \overline{\lim}_n y_n \leq \overline{\lim}_n (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_n x_n + \overline{\lim}_n y_n$.
Tooge näiteid, millal võrratused kehtivad rangete rangete võrratustena.
46. Olgu jada (x_n) koonduv ning (y_n) tõkestatud. Tõestage, et $\overline{\lim}_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \overline{\lim}_n y_n$.
47. Tooge näide arvjadast (x_n) , mille osapiirväärtuste hulk oleks antud arvuhulk $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$.
48. Tooge näide arvjadast (x_n) , mille osapiirväärtuste hulgas esineks kõik arvud arvjadast $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Milliseid osapiirväärtusi omab jada (x_n) kindlasti veel?
49. Tooge näited järgmistest arvjadadest (x_n) :
- 1) millel puudusid lõplikud osapiirväärtused,
 - 2) millel oleks üks lõplik osapiirväärtus, ent mis poleks koonduv jada,
 - 3) mille osapiirväärtuste hulk oleks lõpmatu,
 - 4) mille osapiirväärtuste hulk oleks $\mathbb{R}$.
50. Leidke järgmiste jadade (x_n) jaoks $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\lim_n x_n$ ja $\overline{\lim}_n x_n$.
- 1) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$,
 - 2) $x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right)$,
 - 3) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (n-1)^n}{2n}$,
 - 4) $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$,
 - 5) $x_n = (-1)^n n$,
 - 6) $x_n = -n(2 + (-1)^n)$,
 - 7) $x_n = n^{-n}$,
 - 8) $x_n = \frac{1}{n-10,2}$.
51. Leidke järgmiste jadade osapiirväärtuste hulk.
- 1) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$,
 - 2) $x_n = \left(\cos \frac{2n\pi}{3} \right)^n$,
 - 3) $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, \dots$,
 - 4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$,
 - 5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots$,
 - 6) $x_n = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 2 \cdot (-1)^n$.
- 52*. Olgu (a_n) positiivsete liikmetega jada nii, et $\lim_n \frac{a_n}{n} = 0$ ja $\overline{\lim}_n \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \in \mathbb{R}$.
Leidke $\lim_n \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n^2}$.

6. Funktsiooni piirväärtuse definitsioon ja omadused

53. Veenduge, et kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ eksisteerib, siis on ta üheselt määratud.

54. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui eksisteerivad $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: A$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =: B$, siis $A \leq B$.

55. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leq B$ iga $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui leidub lõplik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: A$, siis $A \leq B$.

56. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ iga $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) =: A$, siis $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$.

57. Olgu f ja g määratud hulgal D ning olgu a hulga D kuhjumispunkt. Tõestage, et kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, siis

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda A \text{ (kus } \lambda \in \mathbb{R}),$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = AB,$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ (kus } g(x) \neq 0 \forall x, B \neq 0).$$

58. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse ε - δ -definitsioonist, tõestage järgmised koondumised.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{x} = 1;$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^3 = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0;$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 1}{x + 5} = 1;$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x + 2} = 2;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} (3x - 1) = -4;$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 5}{x - 3} = -9;$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9;$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x + 2} = -1;$$

$$15) \lim_{x \rightarrow -4+} \sqrt{x + 4} = 0;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2) = 10;$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{8}{x - 3} = 2;$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1-} \sqrt{1 - x} = 0.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3;$$

59. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse definitsioonist, tõestage järgmised koondumised.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{2x + 1} = \frac{1}{2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{x + 1} = 3;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + 1} = \infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{3x + 2} = \frac{1}{3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{3x + 7} = \frac{5}{3};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x + 1} = -\infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{3x + 2} = \frac{1}{3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 5}{3x + 1} = \frac{2}{3};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - x} = -\infty.$$

60*. Leidke järgmised piirväärtused ($a, b > 0$, tähis $\lfloor \alpha \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu α):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}.$$

7. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine

61. Arvutage järgmised piirväärtused.

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 15};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 + x - 2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x^2+1}}{1 - \sqrt{x^2+1}};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+2x}}{1 - \sqrt{1+2x}};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{1 - \sqrt{x+3}};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x-2};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}, n \in \mathbb{N}.$$

62. Arvutage järgmised piirväärtused.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 5x^4 + 1}{3x^5 + 2x^3 - 6};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{5x^4 + x - 6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 3x + 2}{3x^2 + x - 6};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+7}}{x+5};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+7}}{x+5};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x);$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 3x}} - \sqrt{2x}).$$

63. Arvutage järgmised ühepoolsed piirväärtused.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x-2}{|x-2|};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{|x-2|};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{|3-x|}{3-x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{|3-x|}{3-x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x}{x-1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x}{x-1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x^2-4}{|x+2|};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2-4}{|x+2|};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{\sqrt{x+1}}{x^3+1}.$$

64*. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} - x)$.

65*. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$.

8. Elementaarfunktsioonid. Pidevad funktsioonid. Pöördfunktsioon

66. Leidke järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = \log_{10}(x^2 - 3); & 3) f(x) = \arccos \frac{2x}{x+1}; & 5) f(x) = \sqrt{2 \arctan x - 3}; \\ 2) f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{2+x}; & 4) f(x) = \sqrt{\ln \sin x}; & 6) f(x) = \log_2(x - |x|). \end{array}$$

67. Tõestage, et kui funktsioonid $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidevad punktis $a \in D$, siis ka funktsioonid $f \pm g$, λf ja $f g$ on punktis a pidevad.

68. Tõestage, et iga polünoom on kogu arvteljel $\mathbb{R}$ pidev funktsioon.

69. Tõestage ε - δ -definitsioonist lähtudes, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

$$1) f(x) = \sqrt{x-2}; \quad 2) f(x) = \cos x; \quad 3) f(x) = \ln x.$$

70. Millised järgnevatest on elementaarfunktsioonid?

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = \ln(\arctan(x^2 + 1)); & 3) f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \geq 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0; \end{cases} & 4) f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases} \\ 2) f(x) = |x|; & & \end{array}$$

71. Leidke järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{2^x}{2^x + 1}; & 3) f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x < 1, \\ x^2, & \text{kui } 1 \leq x < 4, \\ 2^x, & \text{kui } x \geq 4. \end{cases} \\ 2) f(x) = \arccos \frac{x^2}{4}, x \in [-2, 0]; & \end{array}$$

72*. Olgu D mingi intervall. Öeldakse, et funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on *kumer*, kui mistahes arvude $x, y \in D$ ja mistahes arvu $\lambda \in [0, 1]$ korral kehtib võrratus

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

(Piltlikult öeldes tähendab funktsiooni f kumerus seda, et f graafik on nõgus.)

Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Kas sellest, et f on kumer lõigus $[a, b]$ järeldub, et f on pidev lõigus $[a, b]$?

9. Elementaarfunktsioone sisaldavad piirväärtused.

73. Lähtudes võrratustest $\sin x < x < \tan x$ ($0 < x < \pi/2$), tõestage, et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

74. Arvutage järgmised piirväärtused.

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x},$ | 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x},$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin \frac{x}{2})^2}{2x^2},$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\sin 5x},$ | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\arcsin 5x},$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x};$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3},$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin 2x},$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}.$ |

75. Näidata, et

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$ | 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0.$ |
|--|---|---|

76. Arvutage järgmised ühepoolsed piirväärtused.

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{ \sin x },$ | 3) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + e^{1/x}},$ | 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x ;$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{ \sin x },$ | 4) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1 + e^{1/x}};$ | 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x .$ |

77. Arvutage järgmised piirväärtused.

- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x},$ | 6) $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{10^{\frac{\cos x}{x+1}}}{5^{\frac{\sin x}{x+1}}},$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{x^2},$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 2+} \left(\frac{x-2}{2x^2 - 3x - 2}\right)^{\ln \frac{x-2}{x+1}},$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x,$ | 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + \sin x}\right),$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^{3x^2};$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - \sin x} - \sqrt[4]{1 + \sin x}}{x},$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt[3]{x+1}\right)}{(x^2 + x) \ln \left(1 + \frac{1}{ x }\right)},$ | 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x + 15} \arctan \frac{2x+4}{x^2 + x - 2},$ |
| | 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(x+1) - \ln x),$ |
| | 12) $\lim_{x \rightarrow 1-} (\sin x)^{\frac{x}{x-1}}.$ |

78*. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right).$

10. Pidevate funktsioonide omadused. Katkevad funktsioonid

79. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sellised pidevad funktsioonid, et $f(x) = g(x)$ iga $x \in \mathbb{Q}$ korral. Tõestage, et siis $f = g$, s.t. $f(x) = g(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

80. 1) Olgu funktsioon f pidev punktis a ja olgu $f(a) > 0$. Näidake, et siis leidub punkti a selline ümbrus, milles funktsiooni f väärtused on kõik positiivsed.

2) Sõnastage ja tõestage analoogiline väide olukorra $f(a) < 0$ kohta.

81. Funktsioon f on pidev intervallis $[0, \infty)$ ning $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$. Tõestage, et f on tõkestatud intervallis $[0, \infty)$.

82. Määrake katkevuse liik ja kõrvaldage (kui võimalik) funktsiooni katkevus punktis $x = 0$.

- | | | |
|-------------------------------------|---|----------------------------|
| 1) $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$; | 3) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$; | 5) $f(x) = (1+x)^{1/x}$; |
| 2) $f(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$; | 4) $f(x) = \frac{\arcsin x}{2 \tan 5x}$; | 6) $f(x) = \ln \sin x $. |

83. Uurige järgmiste funktsioonide pidevust.

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \leq 1, \\ x^3, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$ | 3) $f(x) = \begin{cases} \ln x , & \text{kui } x < 0, \\ x, & \text{kui } x = 0, \\ x^2 + 1, & \text{kui } 1 < x < 2, \\ 5, & \text{kui } x \geq 2; \end{cases}$ |
| 2) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{kui } x \leq 1, \\ 3 - ax^2, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$ | 4) $f(x) = \frac{ 3x - 2 }{3x - 2}$. |

84. Tõestage, et Dirichlet' funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ei ole pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}$.

85. Tõestage, et seosega

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

määratud funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev ainult punktis $a = 0$.

86. Tooge näited funktsioonidest $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis üheski punktis $a \in \mathbb{R}$ ei ole pidev, kuid

- 1) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(x)^2$, on pidev funktsioon;
- 2) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(f(x))$, on pidev funktsioon;
- 3) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(f(x))$, pole samuti pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}$.

87. Näidake, et kui $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev, siis ka seosega $g(x) := |f(x)|$ määratud funktsioon $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev. Tooge näide selle kohta, et vastupidine väide on väär.

88. Olgu $f(x) := 2^k - 1$, kui $x \in [k-1, k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Uurige selle funktsiooni pidevust.

89*. Vaatleme funktsiooni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{kui } x = \frac{m}{n}, \text{ kus } m \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \in \mathbb{N} \text{ ning } m \text{ ja } n \text{ on ühistegurita,} \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Uurige funktsiooni f pidevust.

11. Ühtlane pidevus. Landau sümbolid ja ekvivalentsed suurused

90. Millised järgmistest funktsioonidest on ühtlaselt pidevad hulgas X ? Põhjendada.

- 1) $f(x) = 3 \sin x - 4 \cos x, X = \mathbb{R};$
- 2) $f(x) = x^2, X = [0, 1];$
- 3) $f(x) = x^2, X = \mathbb{R};$
- 4) $f(x) = \sqrt{x}, X = [0, \infty);$
- 5) $f(x) = \frac{1}{x}, X = (0, 1];$
- 6) $f(x) = \ln(2x + 3) + \frac{2x^2 - 1}{x^3 + 1}, X = (0, 10);$
- 7) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} X = [-\pi, \pi];$
- 8) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, X = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

91. Teha kindlaks, kas vaadeldavas protsessis $\alpha = o(\beta), \beta = o(\alpha)$ või $\alpha \sim \beta$.

- 1) $\alpha_n = \frac{1}{n}, \beta_n = \frac{1}{n!},$ kui $n \rightarrow \infty;$
- 2) $\alpha(x) = \frac{x+1}{x^3-1}, \beta(x) = \frac{1}{x},$ kui $|x| \rightarrow \infty;$
- 3) $\alpha(x) = x^3 - 1, \beta(x) = \sqrt[3]{x-1},$ kui $x \rightarrow 1;$
- 4) $\alpha(x) = \sin x + \tan 2x, \beta(x) = 3x, x \rightarrow 0;$
- 5) $\alpha(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1, \beta(x) = \frac{x}{n},$ kui $x \rightarrow 0;$
- 6) $\alpha(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, \beta(x) = \frac{1}{x^2},$ kui $|x| \rightarrow \infty.$

92. Leida C ja k nii, et vaadeldavas protsessis $\alpha \sim C\beta^k$.

- 1) $\alpha_n = \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^3 + 2}}, \beta_n = \frac{1}{n},$ kui $n \rightarrow \infty;$
- 2) $\alpha(x) = \sin x - \tan x, \beta(x) = x,$ kui $x \rightarrow 0;$
- 3) $\alpha(x) = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x-1}}, \beta(x) = x, x \rightarrow 0;$
- 4) $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \beta(x) = x, x \rightarrow 0;$
- 5) $\alpha(x) = \ln(e^x + 1), \beta(x) = x,$ kui $x \rightarrow \infty;$
- 6) $\alpha(x) = \ln(e^x + 1), \beta_n = e^x,$ kui $x \rightarrow -\infty.$

93*. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu f lõigus $[0, n]$ pidev funktsioon, kusjuures $f(0) = f(n)$. Tõestage, et leiduvad arvud $x_1, x_2 \in [0, n]$, mille korral $x_2 - x_1 = 1$ ja $f(x_2) = f(x_1)$.

94*. Tõestage, et **ei leidu** pidevat funktsiooni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis saavutaks kõik oma väärtused täpselt kaks korda.

95*. Olgu funktsioon f pidev lõplikus vahemikus (a, b) . Näidata, et funktsiooni f saab jätkata pidevaks funktsiooniks lõigul $[a, b]$ parajasti siis, kui f on ühtlaselt pidev vahemikus (a, b) .

12. Diferentseeruvad funktsioonid

96. Tuletise definitsioonist lähtudes leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

- | | | |
|-------------------|---------------------------|------------------------|
| 1) $f(x) = x^2$; | 4) $f(x) = \cos x$; | 7) $f(x) = \sqrt{x}$; |
| 2) $f(x) = x^3$; | 5) $f(x) = \frac{1}{x}$; | 8) $f(x) = b^x$; |
| 3) $f(x) = x^n$; | 6) $f(x) = e^x$; | 9) $f(x) = \log_a x$. |

97. Tõestage, et kui funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on punktis $a \in D$ diferentseeruv, siis on ta selles punktis pidev.

98. Kasutades pöördfunktsiooni tuletise leidmise valemit, leida tuletis funktsioonidest

- | | | |
|---------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1) $f(x) = \ln x$; | 2) $f(x) = \arcsin x$; | 3) $f(x) = \arctan x$. |
|---------------------|-------------------------|-------------------------|

99. Näidake, et funktsioon $y = |x|$ ei ole punktis $x = 0$ diferentseeruv.

100. Olgu $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx, & \text{kui } x \geq 0, \\ -x^2 + lx, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$ Milliste konstantide k ja l korral on f diferentseeruv?

101. Tooge näide mittediferentseeruvast funktsioonist f , mille korral funktsioon $g(x) = f(x)^2$ on diferentseeruv.

102. Funktsioon $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv paarisfunktsioon lõigus $[-1, 1]$. Leidke $f'(0)$.

103*. Tooge näide funktsioonist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis on diferentseeruv täpselt ainult punktides $a = 0$ ja $a = 1$. (Mujal ei tohi f olla diferentseeruv: veenduge ka selles.)

104*. On antud funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Millistes punktides on f diferentseeruv?

105*. Olgu f diferentseeruv vahemikus $(a, a + \delta)$ ($\delta > 0$) ning eeldame, et leidub piirväärtus (lõplik või lõpmatu) $A := \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$.

- 1) Tõestage, et kui f on paremalt pidev punktis a , siis $f'_+(a) = A$.
- 2) Kas on võimalik, et $f'_+(a) \in \mathbb{R}$, aga $f'_+(a) \neq A$?
- 3) Kas on võimalik, et $f'_+(a) = \infty$, aga $f'_+(a) \neq A$?

13. Funktsiooni tuletise arvutamine

106. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

a1) $f(x) = \sin^3 x$;

a4) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$;

a7) $f(x) = \frac{e^x}{x} + \sqrt{2x}$;

a2) $f(x) = \ln \tan x$;

a5) $f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2}$;

a8) $f(x) = (\cos x) \cdot \tan \alpha$;

a3) $f(x) = 2^{\cos x}$;

a6) $f(x) = e^x \sin x$;

a9) $f(x) = x^a a^x \ (a > 0)$;

a10) $f(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$;

a14) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$;

a11) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$;

a15) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;

a12) $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$;

a16) $f(x) = \ln(1+4x^2) + \arctan 2x$;

a13) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$;

a17) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

b1) $f(x) = x^x$;

b3) $f(x) = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{(x^2+4)^5 (3x-1)^8}{(6x^3+1)^2 e^{\sin 5x}}}$;

b2) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$;

c7) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } x < 0, \\ \tan x, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

c1) $f(x) = |x|$;

c2) $f(x) = x|x|$;

c3) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 2, & \text{kui } x < 1, \\ x^2 + 1, & \text{kui } x \geq 1; \end{cases}$

c8) $f(x) = \begin{cases} (5-x)^2, & \text{kui } x > 1, \\ e^{1-x^2} + 15, & \text{kui } x \leq 1; \end{cases}$

c4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 2, \\ x^3 - 4, & \text{kui } x \geq 2; \end{cases}$

c9) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right), & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$

c5) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 0, \\ \sin x, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

c6) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kui } x < 0, \\ x^4, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

c10) $f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & \text{kui } x \geq 0, \\ \frac{2^x}{\sqrt{1+3x^2}}, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$

107*. Olgu $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-2021)$. Leida $f'(0)$.

108*. Olgu $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ kus n on mingi naturaalarv. Missuguste n väärtuste

korral funktsioon on

a) pidev;

b) diferentseeruv punktis 0;

c) pidevalt diferentseeruv?

14. Kõrgemat järku tuletised. Puutuja ja normaal

109. Leidke f'' , kui

1) $f(x) = e^{-x^2}$;

4) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;

7) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } x < 0, \\ 2x^3, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

2) $f(x) = x^2 \ln x$;

5) $f(x) = x|x|$;

3) $f(x) = e^x \cos x$;

6) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 0, \\ x^3, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } x < 0, \\ x^3 + 1, & \text{kui } x \geq 0. \end{cases}$

110. Olgu f ja g n korda diferentseeruvad punktis x . Leidke valem $(f(x)g(x))^{(n)}$ arvutamiseks.

111. Olgu f kolm korda diferentseeruv punktis x . Leidke $(f^3(x))'''$.

112. Leidke joonel $y = x^3$ sellised punktid, milles puutuja on paralleelne lõikajaga läbi punktide $(-1, -1)$ ja $(2, 8)$.

113. Leidke nurk, mille moodustab x -teljega funktsiooni $y = \sin x$ graafikule punktis $(0, 0)$ tõmmatud puutuja.

114. Leidke parameeter a , mille korral kõverad $y = ax^2$ ja $y = \ln x$ puutuvad.

115. Paraboolile $y = ax^2$ langeb ülalt valguskiir paralleelselt y -teljega. Valguskiire peegeldudes tema nurk parabooli normaaliga muutub vastassunaliseks. Leidke punkt y -teljel, mida peegeldunud valguskiir läbib.

116*. Olgu paraboolil $y = ax^2$ valitud punktid A_1 , A_2 ja A_3 . Olgu k_1 paraboolile punktis A_1 tõmmatud puutuja tõus ning olgu k_{12} , k_{13} ja k_{23} vastavalt lõikajate $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ ja $A_2 A_3$ tõusud. Tõestage, et $k_1 = k_{12} + k_{13} - k_{23}$.

117*. Olgu $f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$ Leida $f^{(n)}(0)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

118*. Olgu $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ kus n on mingi naturaalarv. Leidke suurim k nii, et $f^{(k)}$ on pidev.

15. Funktsiooni uurimine

119. Olgu D mingi intervall, $a \in D^\circ$, ning olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Olgu f pidev punktis a ning leidugu selline $\delta > 0$, et f on diferentseeruv vahemikes $(a-\delta, a)$ ja $(a, a+\delta)$. Tõestage järgmised väited.

- 1) Kui iga $x \in (a-\delta, a)$ korral $f'(x) > 0$ ja iga $x \in (a, a+\delta)$ korral $f'(x) < 0$, siis on funktsioonil f punktis a range lokaalne maksimum.
- 2) Kui iga $x \in (a-\delta, a)$ korral $f'(x) < 0$ ja iga $x \in (a, a+\delta)$ korral $f'(x) > 0$, siis on funktsioonil f punktis a range lokaalne miinimum.

120. Veenduge, et funktsioon f rahuldab lõigus $[a, b]$ Lagrange'i keskvaartusteoreemi tingimusi, ja leidke arv c keskvaartusvalemis $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$:

- 1) $f(x) = 3x^2 - 5$ ja $[a, b] = [-2, 0]$;
- 2) $f(x) = \ln x$ ja $[a, b] = [1, e]$.

121. Tõestage, et kui funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rahuldab tingimust $f'(x) = f(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, siis $f(x) = Ce^x$, kus C on mingi konstant.

122. Leidke järgmiste funktsioonide monotoonsusepiirkonnad ja ekstreemumkohad:

- 1) $f(x) = 2x^2 - \ln x$,
- 4) $f(x) = \ln|x|$,
- 7) $f(x) = x|x|$,
- 2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$,
- 5) $f(x) = e^x + 5x$,
- 8) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$,
- 3) $f(x) = x^2 e^{-x}$,
- 6) $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$,
- 9) $f(x) = \sqrt{(1+2x^2)|1-x^2|}$.

123. Tõestage võrratused

- 1) $e^x \geq 1 + x \quad (x \in \mathbb{R})$,
- 4) $\ln(1+x) \leq x \quad (x > -1)$,
- 2) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (x > 0)$,
- 5) $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$,
- 3) $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x \quad (0 < x \leq 1)$,
- 6) $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$.

124. Leidke järgmiste funktsioonide kumerus- ja nõgusupiirkonnad ning graafiku käänupunktid. Leida ka asümptoodid.

- 1) $f(x) = x^4 - 6x^2$,
- 2) $f(x) = e^{-x^2}$,
- 3) $f(x) = \arctan x - x$.

125. Leidke järgmiste funktsioonide monotoonsuspiirkonnad, ekstreemumpunktid ning kumerus- ja nõgusupiirkonnad ja graafiku käänupunktid, samuti asümptoodid. Skitseerida nende andmete põhjal funktsiooni graafik.

- 1) $f(x) = xe^{-x}$,
- 2) $f(x) = \ln(1 + e^x)$,
- 3) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

126*. Olgu funktsioon f pidevalt diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kas iga $c \in (a, b)$ korral leiduvad $x_1, x_2 \in (a, b)$ nii, et $x_1 < c < x_2$ ja $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$?

127*. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pidev monotoonne funktsioon ning olgu jada (x_n) tõkestatud. Tõestage, et kui f on kasvav, siis $\lim_n f(x_n) = f\left(\lim_n x_n\right)$ ning kui f on kahanev, siis $\lim_n f(x_n) = f\left(\overline{\lim_n x_n}\right)$.

16. L'Hospitali reegel ja Taylori valem

128. Arvutage piirväärtused

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x};$ | 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x};$ | 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right);$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x,$ | 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}, n \in \mathbb{N};$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0+} (2x)^{\sin x},$ | 13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + e^{\cos x}}{x + \sin x};$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}, n \in \mathbb{N};$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}};$ | 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x;$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{3}{x-1}};$ | 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}, a > 1.$ |

129. Lähtudes Taylori valemist, esitage polünoom $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ avaldise $x - 1$ astmete lineaarse kombinatsioonina.

130. Leidke funktsiooni $f(x) = \ln(x+1)$ Taylori valem punktis $a = 0$. Hinnake absoluutset viga lõigus $[0, 1]$ juhul $n = 9$.

131. Leidke funktsiooni $f(x) = e^x$ Taylori valem punktis $a = 0$. Leidke n , mis lõigus $[-1, 1]$ garanteerib täpsuse 0,001.

132. Leidke funktsiooni $f(x) = \cos x$ Taylori valem punktis $a = 0$. Leidke n , mis lõigus $[-1, 1]$ garanteerib täpsuse 0,001.

133. Hinnake absoluutset viga järgmistes ligikaudsetes valemities:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6},$ kui $ x \leq \frac{1}{2};$ | 3) $\arctan x \approx \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2},$ kui $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2};$ |
| 2) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},$ kui $0 \leq x \leq 1;$ | 4) $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}},$ kui $ x \leq \delta, \delta \ll a.$ |

134*. Leida C ja n nii, et $\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \sim Cx^n$ protsessis $x \rightarrow 0$.

135*. Olgu f kaks korda pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0, \infty)$ ning kehtigu koondumised

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} xf''(x) = 0.$$

Tõestage, et $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x) = 0$.

Näpunäide: Kasutage Taylori valemit $f(x+1)$ avaldamiseks $f(x)$ ja tema tuletiste kaudu.

17. Integraali definitsioon. Integreeruvad funktsioonid

136. Leidke järgmised integraalid vahetult Riemanni integraali definitsiooni põhjal (kuna integrandid on pidevad antud piirkondades, võib eeldada, et need integraalid eksisteerivad).

$$1) \int_0^5 3 \, dx, \quad 2) \int_0^2 x \, dx, \quad 3) \int_2^3 x^2 \, dx, \quad 4) \int_0^3 e^x \, dx.$$

137. Olgu $a > 0$ ning olgu f lõigus $[-a, a]$ integreeruv funktsioon. Tõestage integraali definitsiooni kasutades, et

$$1) \text{ kui } f \text{ on paaritu, siis } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0;$$
$$2) \text{ kui } f \text{ on paaris, siis } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

138. Tõestage, et kui integreeruv funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on paaritu, siis funktsioon $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ on paaris. Kas kehtib ka vastupidine väide?

139. Olgu f lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon. Tõestage, et $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx$.

140. Tõestage, et iga tõkestatud funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korral $I^* - I_* = \inf\{S(T) - s(T) : T \in \mathfrak{T}\}$, kus I^* ja I_* on funktsiooni f Darboux' ülem- ja alamintegraal lõigus $[a, b]$ ja $\mathfrak{T}$ on lõigu $[a, b]$ alajaotuste hulk.

141. Tõestage, et järgmised funktsioonid ei ole integreeruvad lõigus $[0, 1]$.

$$1) f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ x, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad 3) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

142. Veenduge, et sinc-funktsioon

$$\text{sinc } x := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \in [a, b] \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

on lõigus $[a, b]$ integreeruv.

143. Tooge näide mitteintegreeruvast funktsioonist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral $|f|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv.

144*. Leidke piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.

145*. Vaatleme funktsiooni $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, kus

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{kui } x = \frac{1}{n} \text{ mingi } n \in \mathbb{N} \text{ korral,} \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kas f on integreeruv lõigus $[0, 1]$?

18. Integraali arvutamine

146. Leidke järgmised integraalid.

a1) $\int_1^2 5x\sqrt{x} dx;$

a2) $\int_{-1}^1 10^x dx;$

a3) $\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x - 3 \sin x) dx;$

a4) $\int_0^1 (2^x e^x + \ln 2) dx;$

b1) $\int_{\pi/24}^{\pi/16} \frac{dx}{(\cos 4x)^2};$

b2) $\int_1^2 e^{5x} dx;$

b3) $\int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx;$

b4) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} (\tan x - \cot x) dx;$

b5) $\int_0^{1/2} \frac{8 dx}{1 + 4x^2};$

b6) $\int_{-2}^{-1} (3x + 5)^4 dx;$

b7) $\int_1^2 \frac{dx}{2x - 1};$

b8) $\int_3^4 \sqrt[3]{7 - 2x} dx;$

b9) $\int_0^1 \cos(1 - 2x) dx;$

c1) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx;$

c2) $\int_0^{\pi} x \cos x dx;$

d1) $\int_{-\pi}^{\pi} (x^{2019} (\tan x)^2 + |x + 1|) dx;$

a5) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos 2x dx}{(\cos x)^2 (\sin x)^2};$

a6) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + (\cos x)^2}{1 + \cos 2x} dx;$

a7) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx;$

b10) $\int_0^1 e^{-2x+3} dx;$

b11) $\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}};$

b12) $\int_0^{2/3} \frac{dx}{9x^2 + 4};$

b13) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x};$

b14) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1};$

b15) $\int_{-1}^1 x \sqrt{1 - x^2} dx;$

b16) $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx;$

b17) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\tan x dx}{(\cos x)^2};$

b18) $\int_0^{\ln \pi - \ln 2} e^x \cos e^x dx;$

c3) $\int_0^3 \ln(x + 3) dx;$

c4) $\int_0^1 x e^{-x} dx;$

a8) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^2 + 1};$

a9) $\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx;$

a10) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4 dx}{\sqrt{1 - x^2}};$

b19) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x + 1};$

b20) $\int_0^1 \frac{\arctan^3 x dx}{1 + x^2};$

b21) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx;$

b22) $\int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx;$

b23) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x};$

b24) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x};$

b25) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx;$

b26) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + (\cos x)^2};$

b27) $\int_0^{\pi/2} \frac{2x^2 - 8}{16 - x^4} dx;$

c5) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx;$

c6) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx;$

d2) $\int_{-\pi}^{\pi} (|2x - 1| + x (\sin x)^{2020}) dx.$

147. Arvutage antud joontega piiratud tasandilise kujundi pindala.

1) $y = x^2$ ja $x + y = 2;$

3) $y = x^2$ ja $y = x^3;$

2) $x = \frac{1}{e}, x = e, y = 0$ ja $y = |\ln x|;$

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0.$

148*. Olgu f lõigul $[0, a]$ pidev funktsioon, kus $a > 0$, kusjuures $f(x) + f(a - x) \neq 0$ iga $x \in [0, a]$

korral. Arvutage määratud integraal $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a - x)} dx.$

19. Integreeruvate funktsioonide omadused

149. Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidev funktsioon ning olgu $f(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Tõestage, et kui $\int_a^b f(x) dx = 0$, siis $f = 0$.

150. Olgu $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, kehtigu $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral ning olgu $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. Tõestage, et $f = g$.

151. Olgu funktsioonid $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integreeruvad. Tõestage, kui $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

152. Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integreeruvad ning $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx =: I$. Tõestage, et kui $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis ka $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv ning $\int_a^b h(x) dx = I$.

153. Olgu $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, kehtigu $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral ning leidugu punkt $x_0 \in [a, b]$ nii, et $f(x_0) < g(x_0)$. Tõestage, et $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$.

154. Tehke kindlaks, kumb arvudest on suurem.

$$1) \int_0^1 \sin x^2 dx \text{ ja } \int_0^1 x^2 dx, \quad 2) \int_0^2 e^{x^2} dx \text{ ja } \int_0^2 x dx, \quad 3) \int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \text{ ja } \int_2^5 \frac{dx}{x-1}.$$

155. Tõestage, et $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e^2$.

156. Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreemist lähtudes tõestage, et kui f on lõigus $[a, b]$ pidev, siis $\left(\int_x^b f(t) dt \right)' = -f(x)$, $x \in [a, b]$.

157. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$1) F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}, x > -1; \quad 3) F(x) = \int_{x^2}^2 \frac{dt}{\ln t}, x > 1; \quad 5) F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2} dt, x \in \mathbb{R}; \\ 2) F(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt, x \in \mathbb{R}; \quad 4) F(x) = \int_x^{2x} (\ln t)^2 dt, x > 0; \quad 6) F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{e^{x^2}} \frac{t}{\ln t} dt, x > 1.$$

158*. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Tõestage võrratused

$$\frac{3^n}{n+1} \leq \int_0^1 (x^2 + x + 1)^n dx \leq \frac{3^{n+1} - 1}{2n + 2}.$$

159*. Olgu f lõigus $[0, 1]$ pidevalt diferentseeruv. Tõestage, et leidub arv $\delta \in (0, 1)$ nii, et

$$\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(\delta).$$

160*. Olgu f reaalteljel pidev funktsioon. Leidke piirväärtus $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x)) dx$.

20. Päratud integraalid

161. Arvutage päratu integraali väärtus:

a1) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3},$

a4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9},$

a7) $\int_1^{\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx,$

a2) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx,$

a5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1},$

a8) $\int_0^{\infty} x \sin x dx,$

a3) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \arctan^2 x},$

a6) $\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4} dx,$

a9) $\int_{-\infty}^0 x e^x dx;$

b1) $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

b5) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x(\ln x)^2};$

b9) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x};$

b2) $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx;$

b6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx;$

b10) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$

b3) $\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$

b7) $\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx;$

b11) $\int_0^1 \ln x dx.$

b4) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}};$

b8) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}};$

b12) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

162. Milliste q väärtuste korral koondub päratu integraal

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^q};$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^q};$

3) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^q}.$

163*. Leida päratu integraal $\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$

21. Päratute integraalide koonduvuse uurimine

164. Olgu $a > 0$. Kasutades päratute integraalide võrdluslauset, tõestage, et kui leiduvad sellised arvud $K > 0$ ja $q > 1$, et $0 \leq f(x) \leq \frac{K}{x^q}$ ($x \in [a, \infty)$), siis päratu integraal $\int_a^\infty f(x) dx$ koondub.

165. Sõnastage ja tõestage eelmise väitega analoogiline väide tõkestamata funktsiooni päratu integraali $\int_a^b f(x) dx$ kohta.

166. Sõnastage ja tõestage kahe eelmise väitega analoogilised väited päratute integraalide hajuvuse kohta.

167. Uurige järgmiste päratute integraalide koonduvust.

$$a1) \int_1^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x}};$$

$$a3) \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x)^2};$$

$$a5) \int_0^\infty \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx;$$

$$a2) \int_1^\infty \frac{(x^2+1) \arctan x dx}{x^4+x^2+1};$$

$$a4) \int_0^\infty \frac{|\cos x| dx}{x^2+1};$$

$$a6) \int_0^\infty \frac{(\cos x)^2 dx}{x^4+1};$$

$$b1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$$

$$b3) \int_0^3 \frac{|\sin x|}{\sqrt{3-x}} dx;$$

$$b5) \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}\sqrt{x-2}};$$

$$b2) \int_{-1}^1 \frac{x + \cos x}{\sqrt[5]{x^3}} dx;$$

$$b4) \int_0^2 \frac{dx}{(x^2-4x+3)^3};$$

$$b6) \int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}.$$

168. Uurida integraalide $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ja $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ koonduvust.

169*. Olgu funktsioonid $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sellised, et $f(x) \geq 0$ ja $g(x) > 0$, kui $x \in [a, \infty)$. Eeldame, et integraal $\int_a^\infty f(x) dx$ hajub. Tõestage, et vähemalt üks integraalidest $\int_a^\infty f(x)g(x) dx$ ja $\int_a^\infty \frac{f(x)}{g(x)} dx$ hajub.

170*. Olgu $0 < a < b$. Tõestage, et päratu integraal $\int_0^\infty \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx$ koondub.

Näpunäide. Avaldage $\arctan bx - \arctan ax$ ühe arkustangensina. Pange tähele, et lõigus $[0, 1]$ on tegu Riemanni integraaliga.

171*. Olgu f kahanev hulgas $[0, \infty)$ ning koondugu päratu integraal $\int_0^\infty f(x) dx$. Tõestage, et

$$\lim_{h \rightarrow 0+} h \sum_{n=1}^\infty f(nh) = \int_0^\infty f(x) dx.$$

Leidke selle tulemuse abil piirväärtus $\lim_{h \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^\infty \frac{h}{1+h^2 n^2}$.

22. Arvread

172. Tõestage, et kui rida $\sum_k u_k$ koondub, siis $\lim_k u_k = 0$.

173. Koondugu read $\sum_k u_k$ ja $\sum_k v_k$ vastavalt summaks u ja v . Tõestage, et read $\sum_k (u_k + v_k)$ ja $\sum_k \lambda u_k$ koonduvad vastavalt summaks $u + v$ ja λu ($\lambda \in \mathbb{R}$).

174. Tõestage, et rida $\sum_k u_k$, kus $u_k \geq 0$, koondub parajasti siis, kui tema osasummade jada

$\left(\sum_{k=1}^n u_k \right)$ on tõkestatud. Tooge näide hajuvast reast, mille osasummade jada on tõkestatud.

175. Leidke rea summa:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)},$

4) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1},$

7) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{3^k} \right),$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)},$

5) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k},$

8) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(5a)^k} - \frac{1}{6^{k+1}} \right).$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)},$

6) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{4^k},$

9) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})}.$

176*. Leidke rea $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$ summa.

Näpunäide: Püüdke osasummad teisendada teleskoopsummadeks.

23. Arvridade koonduvuse uurimine

177. Tõestage, et kui rida koondub absoluutselt, siis ta koondub.

178. Põhjendage järgmiste ridade hajuvust:

$$1) \sum_k \frac{k}{100k+1}, \quad 2) \sum_k (-1)^k, \quad 3) \sum_k \frac{1}{k}, \quad 4) \sum_k \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad 5) \sum_k \tan \frac{\pi}{k+2}.$$

179. Uurige järgmiste ridade koonduvust:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}, & \quad 4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^{55}}{2k^3 + k^2 + 1}, & 7) \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \tan \frac{\pi}{3^k}, \\ 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)5^k}, & 5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+10)}}, & 8) \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{k}} \right), \\ 3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k - 1}, & 6) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10000k + 1}, & 9) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k^2}, \\ 10) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^k}, & 13) \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{e} \sin \frac{\pi}{k}, & 16) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{2} \right)^k, & 19) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}, \\ 11) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}, & 14) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}, & 17) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, & 20) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+2)}, \\ 12) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k-1} \right)^k, & 15) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{3} \right)^k, & 18) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!}, & 21) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{k+1}. \end{aligned}$$

180. Uurige järgmiste väidete kehtivust.

- 1) Kui rida $\sum_k u_k$, kus $u_k \neq 0$, koondub, siis rida $\sum_k \frac{1}{u_k}$ hajub.
- 2) Kui rida $\sum_k u_k$, kus $u_k \neq 0$, hajub, siis rida $\sum_k \frac{1}{u_k}$ koondub.

181*. Leibnizi tunnus väidab, et kui vahelduvate märkidega rea $\sum_k (-1)^k u_k$ üldliige u_k hääbub monotoonselt, siis rida koondub. Tooge näide **hajuvast** vahelduvate märkidega reast $\sum_k (-1)^k u_k$, mille üldliige u_k hääbub, kusjuures $u_k > 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

182*. Tooge näide koonduvast mittenegatiivsete liikmetega reast $\sum_n a_n$, mille korral tingimus $\lim_n n a_n = 0$ ei kehti.

24. Funktsionaaljadad ja -read

183. Leidke funktsionaaljada (f_k) koonduvuspiirkond D ja piirväärtus $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll} 1) f_k(x) = x^k, & 3) f_k(x) = \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k, & 5) f_k(x) = \sin \frac{x}{k}, \\ 2) f_k(x) = \frac{1}{1+kx}, & 4) f_k(x) = \frac{kx}{1+kx+x}, & 6) f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}. \end{array}$$

184. Otsustage, kas funktsionaaljada (f_k) koondub ühtlaselt antud intervallis.

$$\begin{array}{ll} 1) f_k(x) = x^k, D = [0, 1]; & 4) f_k(x) = 2 \sin \frac{x}{k}, D = \mathbb{R}; \\ 2) f_k(x) = x^k, D = [0, a], 0 < a < 1; & \\ 3) f_k(x) = 2 \frac{\sin kx}{k}, D = \mathbb{R}; & 5) f_k(x) = \frac{1}{1+kx}, D = [0, 1]. \end{array}$$

185. Leidke funktsionaalrea koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A . Kui vähegi võimalik, arvutage funktsionaalrea summa.

$$\begin{array}{llll} 1) \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}, & 5) \sum_{k=1}^{\infty} (\ln x)^k, & 9) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k(k+1)}, & 13) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}, \\ 2) \sum_{k=0}^{\infty} (x-2)^k, & 6) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, & 10) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2x-1}}, & 14) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ 3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, & 7) \sum_{k=1}^{\infty} kx^k, & 11) \sum_{k=1}^{\infty} (kx)^k, & 15) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \\ 4) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}, & 8) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^k}, & 12) \sum_{k=1}^{\infty} (\ln(1+x^2))^k, & 16) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k2^k}. \end{array}$$

186. Weierstrassi tunnuse abil tõestage funktsionaalrea ühtlane koonduvus antud intervallis.

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, [-1, 1]; & 3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2 2^k}, [0, 4]; & 5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + \arccos x}, [-1, 1]; \\ 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin kx)^2}{\sqrt{k^3+1}}, (-\infty, \infty); & 4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{x^2+k^3}}, (-\infty, \infty); & 6) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k^2 x^2}}{k\sqrt{k}}, (-\infty, \infty). \end{array}$$

187*. Leidke (sõltuvalt p väärtusest) ridade $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A .

25. Funktsionaalrea summa omadused. Maclaurini rida

Näidake, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

$$1) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{3^k}, \quad 2) f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{x}{k}}{(k-2)k}, \quad 3) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan kx}{k^2 + 1}.$$

188. Leidke järgmised summad. (Põhjendage tehtavad sammud.)

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \quad 3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \quad 5) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}, \quad 4) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}, \quad 6) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!}.$$

189. Leidke järgmised piirväärtused. (Põhjendage tehtavad sammud.)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(3^k x)}{3^k}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos kx}{k(k+1)}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^x}.$$

190. Arvutage järgmised integraalid. Põhjendage tehtavad sammud.

$$1) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} \right) dx, \quad 2) \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + n \cos nx}{5^n} \right) dx.$$

191. Arvutage järgmised tuletised. Põhjendage tehtavad sammud.

$$1) f'(0), \text{ kui } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \arccos \frac{x}{n+1}; \quad 2) f^{(17)}(3), \text{ kui } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{(n-1)!} (x-3)^n;$$

192. Arendage järgmised funktsioonid f Maclaurini reaks ning leidke suurimad intervallid, kus f võrdub rea summaga. Leidke $f^{(5)}(0)$.

$$1) f(x) = e^{2x}; \quad 4) f(x) = (\cos x)^2; \quad 7) f(x) = \frac{1}{2-x};$$

$$2) f(x) = e^{-x^2}; \quad 5) f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad 8) f(x) = \frac{5-2x}{6-5x+x^2};$$

$$3) f(x) = \sin \frac{x}{2}; \quad 6) f(x) = \frac{x^9}{1-x}; \quad 9) f(x) = \ln(8+x);$$

193*. Kui funktsionaaljada (f_n) koondub hulgal A ühtlaselt funktsiooniks f , siis kirjutame $f_n \rightrightarrows_A f$. Kas iga hulga $A \subset \mathbb{R}$, funktsionaaljadade (f_n) ja (g_n) (kus $f_n, g_n: A \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) ja funktsioonide $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ korral kehtivad implikatsioonid

$$1) f_n \rightrightarrows_A f, g_n \rightrightarrows_A g \Rightarrow f_n + g_n \rightrightarrows_A f + g; \quad 2) f_n \rightrightarrows_A f, g_n \rightrightarrows_A g \Rightarrow f_n \cdot g_n \rightrightarrows_A f \cdot g?$$

194*. Ütleme, et hulgal A määratud funktsionaaljada (f_n) koondub pidevalt hulgal A funktsiooniks f , kui iga $x \in A$ ja iga jada (x_n) korral hulgas A korral kehtib implikatsioon

$$\lim_n x_n = x \Rightarrow \lim_n f_n(x_n) = f(x).$$

Tõestage, et kui $f_n \rightrightarrows_A f$ ja funktsioonid f_n on pidevad hulgas A , siis (f_n) koondub pidevalt hulgas A . Kas kehtib ka vastupidine väide?

Vastused ja lahendusvihjed

1. 1) Oletage, et a_1 ja a_2 on F nullelemendid ning vaadeldge summat $a_1 + a_2$; 2) oletage, et b_1 ja b_2 on a vastandelemendid ning vaadeldge summat $(b_1 + a) + b_2$; 3) näidake, et kui x rahuldab seost $a + x = b$, siis $x = b - a$ ning kui $x = b - a$, siis x rahuldab seost $a + x = b$; 4) näidake, et $(a + b) + (-a - b) = 0$.

2. Lahendusvõtted on analoogilised ülesandega 1.

3. Vt. loengukonspektis Lause 1.1.

4. 1) kasutage liitmise monotoonsust; 2) kasutage korrutamise monotoonsust, korrutades võrduse $a < b$ pooli elemendiga $-c > 0$ (miks kehtib $-c > 0$?); 3) muuhulgas kasutage korrutamise monotoonsust; 4) $a + c < b + c < b + d$; 5) $ac < bc < bd$; 6) näidake, et $a^{-1} \leq 0$ annab vastuolu; 7) kasutage ülesannet 6) ja korrutamise monotoonsust; 8) tarvis on näidata, et $a + a < a + b < b + b$.

9. 1), 2), 3), 4) vaadeldge juhtusid $a \geq 0$ ja $a < 0$; 5) kui $|a| \leq c$, siis $-c \leq -|a| \leq -a \leq |a| \leq c$; kui aga $-c \leq a \leq c$, siis juhul $a \geq 0$ kehtib $|a| = a \leq c$ ning juhul $a < 0$ kehtib $|a| = -a \leq c$; 6), 7) väited järelduvad võrratustest $-|a| - |b| \leq a \pm b \leq |a| + |b|$; 8) väited järelduvad võrratustest $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$.

10. Oletage, et hulga X ülemised rajad on a ja b , siis kehtib $a < b$ või $a > b$. Kui näiteks $a < b$, saame vastuolu sellega, et b on hulga X vähim ülemine tõke.

11. Olgu a hulga X suurim element, siis $a \in X$ ja $x \leq a$ iga $x \in X$ korral. Arvu a jaoks on sup X mõlemad tingimused täidetud (kontrollige!).

12. Hulga Y ülemiseks tõkkeks sobib $\lambda a + 1$. Lisaks sellele, olgu $b < \lambda a + 1$, siis $\lambda^{-1}(b - 1) < a$, mistõttu leidub x_0 omadusega $\lambda^{-1}(b - 1) < x_0$. Seega $b < \lambda x_0 + 1 =: y_0$.

13. Kõigepealt saame, et iga $y \in Y$ korral kehtib $\forall x \in X$ $x \leq y$. Seega iga $y \in Y$ korral $\sup X \leq y$. Järelikult $\sup X \leq \inf Y$.

Alternatiiv: Kuna X ja Y on mittetühjad, siis hulkadele X ja Y leiduvad vastavalt ülemine ja alumine tõke.

Olgu $a := \sup X$ ja $b := \inf Y$. Oletame, et $a > b$, siis arvu $\frac{a+b}{2}$ jaoks leiduvad $x_0 \in X$ ja $y_0 \in Y$ omadusega $x_0 > \frac{a+b}{2} > y_0$, vastuolu.

14. 1) Kuna $0 \in X$ ja $0 \leq x$ iga $x \in X$ korral, siis $\min X = 0$ ja seega $\inf X = 0$. Saame, et $x \leq 1$ iga $x \in X$ korral. Kui d on hulga X ülemine tõke, siis $x \leq d$ iga $x \in X$ korral. Muuhulgas $1 - \frac{1}{n} \leq d$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, sest $\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq X$. Siit järelduub, et $1 - d \leq \frac{1}{n}$. Kui kehtiks $d < 1$, siis $n \leq \frac{1}{1-d}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, vastuolu Archimedese printsibiiga. Järelikult $d \geq 1$ ning $\sup X = 1$.

Näeme, et $\max X$ ei eksisteeri. Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et $x_0 \in X$ on selline, et $x \leq x_0$ iga $x \in X$ korral. Siis $0 \leq x_0 < 1$ ning $0 \leq x_0 < \frac{x_0 + 1}{2} < 1$, vastuolu (korraga kehtib $x_0 < \frac{x_0 + 1}{2}$ ja $\frac{x_0 + 1}{2} \leq x_0$).

Alternatiiv: näitamaks, et $\sup X = 1$, märkame, et $x \leq 1$ iga $x \in X$ korral ning et iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub $x_0 \in X$ nii, et $1 - \varepsilon < x_0$. Kui $\varepsilon \geq 1$, siis valime nt. $x_0 = \frac{1}{2}$, muul juhul aga $x_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Ülejäänud ülesannete lahenduskeemid on sarnased.

2) $\sup X = \max X = \frac{1}{5}$, $\inf X = 0$, $\min X$ ei eksisteeri;

3) $\inf X = \min X = 0$, $\sup X = 1$, $\max X$ ei eksisteeri;

4) $\sup X = \max X = \frac{3}{4}$, $\inf X = 0$, $\min X$ ei eksisteeri.

Märkus. Ül. 2) ja 3) (aga **mitte** 1) ega 4)) juures saab kasutada ka monotoonsusprintsipi. Jada liikmetega $x_n = \frac{1}{2n+3}$ on kahanev (sest $\frac{1}{2(n+1)+3} < \frac{1}{2n+3}$) ja alt tõkestatud (arvuga 0). Seega on see jada koonduv ja $\inf X = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

18. ja 20. $(x_n + y_n)$ hajub, muidu $y_n = (x_n + y_n) - x_n$ koonduks; valides $x_n \rightarrow 0$ ja (y_n) hajuv tõkestatud, on $x_n \cdot y_n \rightarrow 0$, aga nt. $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$, on $x_n \cdot y_n = n$ hajuv.

19. $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, siis $x_n + y_n = 0$, $x_n \cdot y_n = -1$; $x_n = (-1)^n$, $y_n = n(-1)^n$, siis $x_n + y_n = (n+1)(-1)^n$, $x_n \cdot y_n = n$.

21. 1) kasutage jada piirväärtuse definitsiooni ja seost $n_k \geq k$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral; 2) $(-1)^n$.

22. 1) valige jada piirväärtuse definitsioonis näiteks $\varepsilon = a$; 2) valige $\varepsilon = -a$.

23. Kui jada (x_n) on tõkestatud, siis mingite $m, M \in \mathbb{R}$ korral $m \leq x_n \leq M$; tähistame $K = \max\{|m|, |M|\} + 1$, siis $-K < -|m| \leq m \leq x_n \leq M \leq |M| < K$. Kui $|x_n| \leq K$, siis sobivad $m = -K$, $M = K$.

24. 1) jada piirväärtuse definitsioonis sobibki N rolli eelduses antud arv N ; 2) $(x_n) = (a, a+1, a, a+1, a, \dots)$.

25. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Eeldused $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow a$ annavad arvud K_1 ja K_2 nii, et $k \geq K_1 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$ ja $k \geq K_2 \Rightarrow |y_k - a| < \varepsilon$. Tähistame $N = 2 \max\{K_1, K_2\}$. Kui $n \geq N$ ja $n = 2k$, siis $|z_n - a| = |y_k - a| < \varepsilon$; kui $n = 2k-1$, siis $|z_n - a| = |x_k - a| < \varepsilon$.

26. 1) Oletame, et $a > b$. Valige $\lim_n x_n = a$ ja $\lim_n y_n = b$ definitsioonides näiteks $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, siis leidub N omadusega $x_N > \frac{a+b}{2} > y_N$. See on võimatu, sest $x_N \leq y_N$. 2) Kasutage ülesannet 1).

27. 1) Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kasutades $\lim_n x_n = \lim_n y_n = a$ definitsioone, leidke N omadusega: kui $n \geq N$, siis $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$. 2) Kasutage ülesannet 1).

28. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Koondumise $\lim_n \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}$ kontrollimiseks vaatleme kõigepealt juhtu $a < b$, siis $\max\{a, b\} = b$. Kasutades $\lim_n x_n = a$ ja $\lim_n y_n = b$ definitsioone, leidke N omadusega: kui $n \geq N$,

siis $x_n < \frac{a+b}{2} < y_n$. Seega, kui $n \geq N$, siis $\max\{x_n, y_n\} = y_n$. Nüüd koondumise $\lim_n y_n = b$ põhjal leidke $N_1 \geq N$, et $|y_n - b| < \varepsilon$.

Juhul $a = b$ leidke antud koondumiste põhjal N , et kui $n \geq N$, siis $|x_n - a| < \varepsilon$ ja $|y_n - a| < \varepsilon$.

Alternatiiv: tõestage ja kasutage seoseid $\max\{u, v\} = \frac{u+v}{2} + \frac{|u-v|}{2}$, $\min\{u, v\} = \frac{u+v}{2} - \frac{|u-v|}{2}$, kus $u, v \in \mathbb{R}$.

29. Leidugu $K > 0$ omadusega $|y_n| \leq K$. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Valige koondumise $\lim_n x_n = 0$ arvu ε rolli meie $\frac{\varepsilon}{K}$.

30. 1) ja 2) $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$; 3) jada (x_n) on tõkestatud, seega mingi $K > 0$ korral $|x_n| \leq K$, edasi tasub vahele $x_n y_n - ab$ liita-lahutada $b x_n$; 4) kasutage ülesannet 3); 5) tõestage, et leidub N omadusega $n \geq N \Rightarrow |x_n| \geq \frac{|a|}{2}$, arvestades seost $a \neq 0$; 6) kasutage ülesandeid 3) ja 5).

33. 1) $N = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$; 2) $N = \left\lfloor \frac{3}{5\varepsilon} \right\rfloor + 1$; 3) $N = \left\lfloor \frac{14}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$; 4) $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$; 5) $N = \left\lfloor \frac{13}{16\varepsilon} + \frac{3}{8} \right\rfloor + 1$; 6) $N = \left\lfloor 8 + \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

34. a) Tarvis läheb võrratust $||x_n| - a|| \leq |x_n - a|$; b) $(-1)^n$; c) $|x_n| < \varepsilon$ ja $||x_n|| < \varepsilon$ on samaväärsed tingimused.

36. Iga n korral saab leida arvu x_n näiteks a ja $a + \frac{1}{n}$ vahelt.

41. Tähistame $u_k = \inf\{x_n : n \geq k\}$. Tõestage, et jada (u_k) on kasvav ja tõkestatud. Seega see jada on koonduv ja piirväärtus on $\sup\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ (miks?), nagu vaja.

42. Võrratuse $\inf_n x_n \leq \lim_n x_n$ tõestamiseks pange tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{x_k : k \geq n\}$ ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks parema poole piirväärtus on lõplik?)

43. Olgu jada (y_n) osajada (y_{n_k}) selline, et $\lim_k y_{n_k} = \lim_n y_n$. Näüd leidke jadale (x_{n_k}) koonduv osajada $(x_{n_{k_j}})$. On jäänud kirjutada, et $\lim_n x_n \leq \lim_j x_{n_{k_j}} \leq \lim_j y_{n_{k_j}} = \lim_n y_n$.
- Alternatiiv: näidake, et $\inf\{x_k : k \geq n\} \leq \inf\{y_k : k \geq n\}$ kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks mõlemad piirväärtused on lõplikud?)
44. Konstandiga korrutamine ei mõjuta (osa)jada koonduvust.
- Alternatiiv: uurige $\inf\{cx_k : k \geq n\}$ ja $c \cdot \inf\{x_k : k \geq n\}$ või $c \cdot \sup\{x_k : k \geq n\}$ vahekorda.
45. Olgu jada $(x_n + y_n)$ osajada $(x_{n_k} + y_{n_k})$ selline, et $\lim_k (x_{n_k} + y_{n_k}) = \lim_n (x_n + y_n)$. Näüd leidke jadale (x_{n_k}) koonduv osajada $(x_{n_{k_j}})$. Siis jada $(y_{n_{k_j}})$ on samuti koonduv. On jäänud kirjutada, et $\lim_n x_n + \lim_n y_n \leq \lim_j x_{n_{k_j}} + \lim_j y_{n_{k_j}} = \lim_j (x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}}) = \lim_n (x_n + y_n)$.
- Alternatiiv: näidake, et $\inf\{x_k : k \geq n\} + \inf\{y_k : k \geq n\} \leq \inf\{x_k + y_k : k \geq n\}$ ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks mõlemad piirväärtused on lõplikud?)
- Teine võrratus järeldub esimesest, kui vaadelda $\lim_n (x_n + y_n) - \lim_n y_n = \lim_n (x_n + y_n) + \lim_n (-y_n) \leq \lim_n x_n$.
- Näideteks sobivad: $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$ ning $x_n = y_n = (-1)^n$.
46. Kasutage seda, et $\lim_n x_n = \lim_n x_n = \lim_n x_n$.
47. $x_{mp+k} = a_k$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{1, \dots, p\}$.
48. $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, \dots$, kindlasti esinevad (x_n) osapiirväärtustena jada (a_n) kõik osapiirväärtused.
49. 1) (n) ; 2) 0, 1, 0, 2, 0, 3, ...; 3) ja 3) $\mathbb{Q}$ kõik elemendid jadana.
50. 1) 0, 1, 1, 1; 2) $-3\frac{1}{2}, 5, -2, 2$; 3) $-1, 1\frac{1}{2}, 0, 1$; 4) 0, 2, 0, 2; 5) $-\infty, \infty, -\infty, \infty$; 6) $-\infty, -1, -\infty, -\infty$; 7) 0, 1, 0, 0; 8) $-5, \frac{5}{4}, 0, 0$.
51. 1) $\left\{-e \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, e, e \pm 1\right\}$ (pange tähele, et need on osajadade (x_{8k+p}) , kus $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, piirväärtused); 2) $\{0, 1\}$; 3) $\{0\}$; 4) $\{0, 1\}$; 5) $[0, 1]$ (pange tähele, et iga reaalarvu $\alpha \in [0, 1]$ korral saab hulgast $\left\{\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$ valida ratsionaalarvu $\frac{k}{n}$ nii, et $\left|\frac{k}{n} - \alpha\right| < \frac{1}{n}$); 6) $\{1, 5\}$.
53. Oletage, et $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, kus $A < B$. Funktsiooni piirväärtuse definitsioonis valige $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$ ning seeläbi leidke x omadusega $f(x) < \frac{A+B}{2} < f(x)$. Vastuolu.
54. Oletage, et $A > B$. Valige antud koondumiste definitsioonides $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ ning leidke $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ omadusega $g(x) < \frac{A+B}{2} < f(x)$. Vastuolu.
55. Kasutage ülesannet 54.
56. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Leidke δ nii, et kui $0 < |x - a| < \delta$, siis $A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon$.
57. Kasutage funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumit ning jadade omadusi ülesandest 30.
58. 1) $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$; 2) $\delta = \varepsilon^3$; 3) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; 4) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$; 5) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{15}\right\}$; 6) $\delta = \varepsilon$; 7) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; 8) $\delta = \min\left\{1, \frac{7\varepsilon}{2}\right\}$; 9) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{22}\right\}$; 10) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$; 11) $\delta = \min\left\{1, \frac{3\varepsilon}{2}\right\}$; 12) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$; 13) $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$; 14) $\delta = 2\varepsilon$; 15) $\delta = \varepsilon^2$; 16) $\delta = \varepsilon^2$.
59. 1) $D = \frac{1}{4\varepsilon}$; 2) $D = \frac{5}{9\varepsilon}$; 3) $D = \frac{5}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}$; 4) $D = \frac{5}{\varepsilon} + 1$; 5) $D = \frac{32}{3\varepsilon}$; 6) $D = \frac{17}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}$; 7) $D = \max\{1, 2\varepsilon\}$; 8) $D = E$; 9) $D = E$.
61. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) $2\frac{1}{24}$; 6) 1; 7) $\frac{1}{12}$; 8) $\frac{2}{3}$; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) -2 ; 12) $\frac{1}{2}$; 13) $-\frac{1}{12}$; 14) $4\frac{4}{27}$; 15) $\frac{1}{n}$.
62. 1) $\frac{4}{3}$; 2) 0; 3) ∞ ; 4) 1; 5) -1 ; 6) -1 ; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 1; 9) 0.

63. 1) 1; 2) -1; 3) -1; 4) 1; 5) $-\infty$; 6) ∞ ; 7) 4; 8) -4; 9) ∞ .

67. Kasutage funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumit ning jadade omadusi ülesandest 30.

68. Tõestage, et $g(x) = x^n$ on pidev, $n \in \mathbb{N}$.

69. 1) kui $a = 2$, siis $\delta = \varepsilon^2$, kui $a > 2$, siis $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{a-2}$; 2) kasutada võrratust $|\sin x| \leq |x|$, $\delta = \varepsilon$; 3) kasutada võrratust $\ln(1+x) \leq x$, $\delta = \varepsilon \cdot a$.

70. 1) jah; 2) jah: $f(x) = \sqrt{x^2}$; 3) ei, sest funktsioon pole pidev oma määramispiirkonnas; 4) jah: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$.

73. Kuna $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, siis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Seega $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

74. 1) 1; 2) $\frac{7}{5}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 5; 5) $\frac{7}{5}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{8}$; 8) -2; 9) 0.

76. 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 1; 6) -1.

77. 1) e; 2) $\frac{1}{e}$; 3) e; 4) e^6 ; 5) 1; 6) 0; 7) ∞ ; 8) $\frac{\pi}{6}$; 9) $-\frac{7}{12}$; 10) 2; 11) 1; 12) ∞ .

79. Olgu $x \in \mathbb{R}$, siis leidub jada $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ omadusega $\lim_n x_n = x$. Seega $f(x) = \lim_n f(x_n) = \lim_n g(x_n) = g(x)$.

80. Kasutage pidevuse definitsiooni, võttes vastavalt $\varepsilon = f(a)$ või $\varepsilon = -f(a)$.

81. Koondumine $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ annab arvu $D > 0$ omadusega $x > D \Rightarrow c-1 < f(x) < c+1$. Kuna f on pidev lõigus $[0, D+1]$, siis on ta selles lõigus tõkestatud, mistõttu leiduvad m ja M omadusega $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [0, D+1]$. Kokkuvõttes on $\min\{m, c-1\}$ ja $\max\{M, c+1\}$ arvud, mille vahel on f kõik väärtused intervallis $[0, \infty)$.

82. 1) I liiki katkevus; 2) kõrvaldatav katkevus, $f(0) = \frac{\pi}{2}$; 3) kõrvaldatav katkevus, $f(0) = 0$; 4) kõrvaldatav katkevus, $f(0) = \frac{1}{10}$; 5) kõrvaldatav katkevus, $f(0) = e$; 6) II liiki katkevus.

83. 1) pidev kogu reaalteljel; 2) kui $a = 1$, siis pidev kogu reaalteljel, vastasel korral katkev punktis 1 ja pidev mujal; 3) katkev punktides 0 ja 1, mujal pidev; 4) katkev punktis $x = \frac{2}{3}$, mujal pidev.

84. Olgu $a \in \mathbb{Q}$. Leidke jada $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ omadusega $\lim_n x_n = a$. Funktsiooni f pidevuse tõttu $0 = \lim_n 0 = \lim_n f(x_n) = f(a) = 1$, vastuolu. Analoogiline arutelu sobib juhtumil $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

85. Funktsioon f on pidev punktis 0, sest $-|x| \leq f(x) \leq x$; edasi kasutage ülesannet 56. Näitamaks, et f on katkev igas punktis $a \neq 0$, saab kasutada ülesande 84 lahenduse ideed.

86. 1), 2) kasutage Dirichlet' funktsiooni; 3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ \sqrt{2}, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

87. Kasutage võrratust $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$. Vastupidise väite vääramiseks vaadeldge funktsiooni $2D(x) - 1$, kus D on Dirichlet' funktsioon.

88. f on pidev kõigis vahemikes $(k-1, k)$, kus $k \in \mathbb{Z}$, paremalt pidev kõigis punktides $k \in \mathbb{Z}$ ja ei ole vasakult pidev üheski punktis $k \in \mathbb{Z}$.

90. 1) Ühtlaselt pidev (kasutada definitsiooni ning võrratust $|\sin x| \leq |x|$). 2) Ühtlaselt pidev (Cantori teoreem). 3) Pole ühtlaselt pidev (vt. konspekti näide 3.6). 4) Ühtlaselt pidev. Olgu $\varepsilon > 0$ antud. Kui vähemalt üks arvudest $x, x' \in [1, \infty)$, siis saab hinnata $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \frac{|x - x'|}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \leq |x - x'|$. Kui $x, x' \in [0, 1]$, siis Can-

tori teoreemi põhjal leidub $\delta_1 > 0$ nii, et kui $|x - x'| < \delta_1$, siis $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| < \varepsilon$. Kokkuvõttes võime valida $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$. 5) Pole ühtlaselt pidev (vt. konspekti näide 3.7). 6) Ühtlaselt pidev, sest funktsioon on lõigus $[0, 10]$ pideva funktsiooni ahend. 7) Ühtlaselt pidev (Cantori teoreem) 8) Ühtlaselt pidev kuna f on pidev (peale katkevuse kõrvaldamist nullpunktis) ja $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 1$ (vt. konspekti Lause 3.29).

91. 1) $\beta = o(\alpha)$; 2) $\alpha = o(\beta)$; 3) $\alpha = o(\beta)$; 4) $\alpha \sim \beta$; 5) $\alpha \sim \beta$; 6) $\alpha \sim \beta$.

92. Parameetrite C ja k otsimiseks tasub avaldise asendada vaadeldavas protsessis ekvivalentsete suurustega. 1) Näitame, et kui $n \rightarrow \infty$, siis $n^2 + 1 \sim n^2$ ehk $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$. Protsessis $n \rightarrow \infty$

saame analoogiliselt teel veel, et $\sqrt{n^3 + 2} \sim n^{3/2}$, seega $\frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^3 + 2}} \sim n^{1/2}$, kust saame $C = 1$, $k = -\frac{1}{2}$. Ka

järgmiste ülesannete lahendusvihjete mainitud ekvivalentsid tõestatakse, näidates, et vastavate suuruste jagatiste piirväärtus antud protsessis on üks. 2) Kui $x \rightarrow 0$, siis $\sin x - \tan x \sim \sin x(\cos x - 1) =$

$-2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2} \sim -\frac{1}{2} x^3$. Seega $C = -\frac{1}{2}$, $k = 3$. 3) $C = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$, $k = \frac{1}{5}$. 4) Kui $x \rightarrow 0$, siis $\sqrt{x} \sim x + \sqrt{x}$, seega

$x^{1/4} \sim \sqrt{x + \sqrt{x}} \sim x + \sqrt{x + \sqrt{x}}$, kust saame $C = 1$, $k = \frac{1}{8}$. 5) Kui $x \rightarrow \infty$, siis $\ln(e^x + 1) \sim \ln e^x = x$, seega

$C = 1$, $k = 1$. 6) $C = 1$, $k = 1$.

96. 1) $(x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$; 2) $(x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$; 3) $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$;

4) $\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}$; 5) $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = -\frac{x-a}{ax}$; 6) $e^x - e^a = e^a \cdot (e^{x-a} - 1)$, koondumises

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ tehke muutuja vahetus $\ln(1+x) = t$ (siis $x \rightarrow 0$ tähendab, et $t \rightarrow 0$); 7) $\sqrt{x} - \sqrt{a} =$

$\frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$; 8) $b^x - b^a = b^a \cdot (b^{x-a} - 1)$.

97. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot (x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0$.

99. Kuna $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$, siis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ ei eksisteeri.

100. $f'_-(0) = l$, $f'_+(0) = k$. Tuletis $f'(0)$ eksisteerib parajasti juhul $k = l$.

101. Dirichlet' funktsioon.

106. a1) $3(\sin x)^2 \cos x$; a2) $\frac{1}{\sin x \cos x}$; a3) $-2^{\cos x} (\ln 2) \cdot \sin x$; a4) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; a5) $-\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$; a6) $e^x \cdot (\sin x +$

$\cos x)$; a7) $\frac{(x-1)e^x}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$; a8) $-(\sin x) \cdot \tan x$; a9) $a^x x^{a-1} (x \ln a + a)$; a10) $\frac{2}{(x^2+1)^2}$; a11) $-\frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1}$; a12)

$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; a13) $\frac{1-x^2}{1+x^4}$; a14) $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$; a15) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$; a16) $\frac{8x+2}{4x^2+1}$; a17) $\arcsin x$; b1) $x^x(1 + \ln x)$;

b2) $(\cos x)^{\sin x} \left((\cos x) \ln \cos x - \frac{(\sin x)^2}{\cos x} \right)$; b3) $\sqrt[3]{\frac{(x^2+4)^5(3x-1)^8}{9(6x^3+1)e^{\sin 5x}}} \cdot \left(\frac{10x}{x^2+4} + \frac{24}{3x-1} - \frac{36x^2}{6x^3+1} - 5 \cos 5x \right)$;

c1) $\operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$; c2) $2|x|$; c3) $\begin{cases} 3x^2-1, & \text{kui } x \leq 1, \\ 2x, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$ c4) $\begin{cases} 2x, & \text{kui } x < 2, \\ 3x^2, & \text{kui } x > 2; \end{cases}$ c5) $\begin{cases} 2x, & \text{kui } x < 0, \\ \cos x, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$

c6) $\begin{cases} -\sin x, & \text{kui } x < 0, \\ 4x^3, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$ c7) $\begin{cases} \cos x, & \text{kui } x < 0, \\ \frac{1}{(\cos x)^2}, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$ c8) $\begin{cases} 2(x-5), & \text{kui } x > 1, \\ -2xe^{1-x^2}, & \text{kui } x < 1; \end{cases}$

c9) $\begin{cases} \frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$ c10) $\begin{cases} x^{x+1} \left(\frac{x+1}{x} + \ln x \right), & \text{kui } x > 0, \\ \frac{2^x}{\sqrt{3x^2+1}} \left(\ln 2 - \frac{3x}{3x^2+1} \right), & \text{kui } x < 0; \end{cases}$

109. 1) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; 2) $3+2 \ln x$; 3) $-2e^x \sin x$; 4) $\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; 5) $\begin{cases} -2, & \text{kui } x < 0, \\ 2, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2, & \text{kui } x < 0, \\ 6x, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x, & \text{kui } x < 0, \\ 12x, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$ 8) $6x$, kui $x \neq 0$.

112. $(-1, -1)$, $(1, 1)$.

113. Kui $f(x) = \sin x$, siis $f'(0) = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$.

114. $a = \frac{1}{2e}$.

115. $y = \frac{1}{4a}$.

119. Kasutage funktsiooni monotoonsuse tunnuseid intervallide $(a - \delta, a]$ ja $[a, a + \delta)$ jaoks.

120. 1) $c = -1$; 2) $c = e - 1$.

121. Vaadeldge funktsiooni $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ning näidake, et $g'(x) = 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

122. 1) f on rangelt kahanev intervallis $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, rangelt kasvav intervallis $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, range lokaalne miinimum punktis $\frac{1}{2}$; 2) f on rangelt kasvav intervallides $(-\infty, -1]$ ja $[4, \infty)$, rangelt kahanev intervallis $[-1, 4]$, range lokaalne maksimum punktis -1 , range lokaalne miinimum punktis 4 ; 3) f on rangelt kahanev intervallides $(-\infty, 0]$ ja $[2, \infty)$, rangelt kasvav intervallis $[0, 2]$, range lokaalne miinimum punktis 0 , range lokaalne maksimum punktis 2 ; 4) f on rangelt kahanev intervallis $(-\infty, 0)$ ja rangelt kasvav intervallis $(0, \infty)$; 5) f on rangelt kasvav kogu reaalteljel; 6) f on rangelt kasvav intervallides $\left[\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right]$ ja $[1, \infty)$, rangelt kahanev intervallides $\left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}\right]$ ja $(-\infty, -1]$, ranged lokaalsed maksimumid punktides $\frac{1}{2k}$,

kus $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, ranged lokaalsed miinimumid punktides $\frac{1}{2k+1}$, kus $k \in \mathbb{Z}$; 7) f on rangelt kasvav kogu reaalteljel.

123. 1) Uurige funktsiooni $f(x) = e^x - (1 + x)$; 2) uurige funktsioone $f(x) = x - \sin x$ ja $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$; 3) uurige funktsioone $f(x) = x - \arctan x$ ja $g(x) = \arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)$; 4) näidake, et $f(x) = x - \ln(1 + x)$ on hulgas $(-1, 0]$ kahanev ja hulgas $[0, \infty)$ kasvav ning $f(0) = 0$; 5) ja 6) analoogilised ülesandega 4), miinimumkohaks mõlemal 0 .

128. 3), 4), Kasutage l'Hospitali reeglit; 6), 10), 7), 8) kasutage eksponent- ja logaritmifunktsiooni pidevust ja l'Hospitali reeglit; 12) taandage murdu avaldisega x ning kasutage seda, et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (miks?); 14)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$; 15) $\ln^2 a$.

129. $(x-1)^5 + 3(x-1)^4 + 3(x-1)^3$.

130. $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}}$, kus $\xi \in (0, x)$, kusjuures $\left| -\frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}} \right| \leq \frac{1}{10}$.

131. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}$, kus ξ asub 0 ja x vahel; $\left| \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$, saame, et $\frac{e}{(6+1)!} < 0,001$.

133. 1) Taylori valemi kohaselt $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{(\cos \xi)x^5}{120}$, kus ξ asub 0 ja x vahel, seega $\left| \frac{(\cos \xi)x^5}{120} \right| \leq \frac{1}{3840}$;

2) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(\xi+1)^{\frac{5}{2}}}$, kus ξ asub 0 ja x vahel, seega $\left| \frac{x^3}{16(\xi+1)^{\frac{5}{2}}} \right| \leq \frac{1}{16}$.

136. Kuna antud funktsioonid on integreeruvad, võib integraali leida konkreetsetele (näiteks ühtlastele) alajaotustele vastavate integraalsummade piirväärtusena.

137. Integraali võib arvutada teatud konkreetsete alajaotuste T kaudu, kus $\lambda(T) \rightarrow 0$ (miks?). Eeldusel, et alajaotuse T jaotuspunktid ning valitud punktid ξ_k on nullpunkti suhtes sümmeetrilised, saame juhul

1) $\sigma(T) = 0$ ja juhul 2), et $\sigma(T) = 2\sigma'(T)$, kus $\sigma'(T)$ on lõigu $[0, a]$ alajaotusele vastav integraalsumma.

139. Tehes teisenduse $x \mapsto a + b - x$, peegeldatakse lõigu $[a, b]$ kõik punktid keskpunkti $\frac{a+b}{2}$ suhtes.

140. Näidake, et arv $I^* - I_*$ rahuldab arvuhulga $\{S(T) - s(T) : T \in \mathfrak{T}\}$ infimumi nõudeid.

141. 1) $S(T) = 1, s(T) = 0$. 2) Oletades, et f on integreeruv, peab vahe $S(T) - s(T)$ olema väike ka ühtlase

alajaotuse $x_k = \frac{k}{n}, k = 0, 1, \dots, n$, korral, kui n on piisavalt suur. Saame, et $S(T) = 2$ ja $s(T) = \frac{0}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{2n} \leq \frac{1}{2}$. Seega $S(T) - s(T) \geq 1$. 3) Kasutage ül. 2) lahenduse ideed ja võrdust $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

142. sinc on pidev.

143. $f(x) = 2D(x) - 1$, kus D on Dirichlet' funktsioon.

146. a1) $8\sqrt{2} - 2$; a2) $\frac{99}{10\ln 10}$; a3) -4 ; a4) $\frac{2e-1}{1+\ln 2} + \ln 2$; a5) 0 ; a6) $\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$; a7) $1 - \frac{\pi}{4}$; a8) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$; a9)

$1 - \frac{\pi}{2}$; a10) π ; b1) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}$; b2) $\frac{e^5}{5}(e^5 - 1)$; b3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b4) $\ln \frac{2}{\sqrt{3}}$; b5) π ; b6) $\frac{11}{5}$; b7) $\ln \sqrt{3}$; b8) 0 ; b9) $\sin 1$;

b10) $\frac{e}{2}(e^2 - 1)$; b11) $\frac{\pi}{4}$; b12) $\frac{\pi}{24}$; b13) $\ln 2$; b14) $\frac{\ln 9}{3}$; b15) 0 ; b16) $\frac{\pi}{2}$; b17) 0 ; b18) $1 - \sin 1$; b19) $\ln 2 - \frac{1}{2}$;

b20) $\frac{\pi^4}{1024}$; b21) $\frac{2}{3}$; b22) $\frac{\pi}{2}$; b23) 1 ; b24) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$; b25) $\frac{1}{2}$; b26) $\frac{\pi}{4}$; b27) $-\arctan \frac{\pi}{4}$; c1) 2π ; c2) -2 ; c3)

$6\ln 6 - 3\ln 3 - 3$; c4) $1 - \frac{2}{e}$; c5) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$; c6) -2π ; d1) $\pi^2 + 1$; d2) $2\pi^2 + \frac{1}{2}$.

147. 1) $\frac{9}{2}$; 2) $2 - \frac{2}{e}$; 3) $\frac{1}{12}$.

149. Oletame, et leidub punkt $x_0 \in [a, b]$ nii, et $f(x_0) > 0$. Kui $x_0 \in (a, b)$, siis f pidevuse tõttu leidub $\delta > 0$ omadusega $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. (Analoogiliselt käitume juhul, kui $x_0 = a$ või $x_0 = b$.)

Integraali aditiivsust ja monotoonsust kasutades leidke, et $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx \geq \delta f(x_0) > 0$.

Vastuolu.

150. Rakendage ülesannet 149 funktsiooni $g - f$ jaoks.

151. a) Olgu f Darboux' integraalid I_* ja I^* ning g jaoks J_* ja J^* . Eeldusel $I_* = I^*$ ja $J_* = J^*$ ning $f \leq g$ on vaja näidata, et (näiteks) $I_* \leq J_*$. Saame, et $s_f(T) = \sum_{k=1}^n \left(\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) \right) \Delta x_k$, millest järeldub vajalik võrratus.

b) Tähistame $A = \int_a^b f(x) dx$ ja $B = \int_a^b g(x) dx$. Oletage, et $A > B$ ning kasutage integreeruvuse definitsioone, valides $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$. Leidke konkreetne (näiteks võrdsete pikkustega alalõikudega) alajaotus T ja konkreetne punktide ξ_k valik, mille korral $\sigma_f(T, \xi) > \sigma_g(T, \xi)$. See annab vastuolu, sest tingimus $f(x) \leq g(x)$ annab $\sigma_f(T, \xi) \leq \sigma_g(T, \xi)$ iga alajaotuse T korral.

152. a) Olgu f, g ja h Darboux' integraalid I_* ja I^* , J_* ja J^* ning K_* ja K^* . Eeldused on, et $I_* = I^* = K_* = K^* = I$ ning $f \leq h \leq g$. Kuna $s_f(T) \leq s_h(T) \leq s_g(T)$, siis $I_* \leq J_* \leq K_*$, analoogiliselt leiame, et $I^* \leq J^* \leq K^*$. Siit järeldub vajalik tulemus $J_* = I = J^*$.

b) Fikseerime $\varepsilon > 0$. Leidke $\delta > 0$ omadusega: kui $\lambda(T) < \delta$, siis $I - \varepsilon < \sigma_f(T, \xi) \leq \sigma_h(T) \leq \sigma_g(T) < I + \varepsilon$.

153. Rakendage ülesannet 150.

154. 1) $\sin x^2 \leq x^2, \sin 1 < \sin \frac{\pi}{2} = 1$; 2) $e^{x^2} \geq 1 + x^2 \geq x, e^4 > 2$; 3) $\ln x \leq x - 1, \ln 2 < \ln e = 1$.

155. $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x \leq 2$.

156. Diferentseerige valem $\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$ muutuja x järgi.

157. 1) $\frac{1}{1+x}$. 2) Kuna funktsioon $F(x) = \int_0^{2x} f(t) dt$ (ja seega ka tuletisfunktsioon F') ei sõltu sellest, kuidas on defineeritud $f(0)$ (tähtis on ainult, et f oleks integreeruv lõigus otspunktidega 0 ja $2x$), siis valime

f nii, et ta oleks pidev: $f(x) = \operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$ (Sageli kõrvaldatava katkevuse korral in-

tegrandi kirjapanekul katkevuse kõrvaldamist eraldi ära näitama ei hakata.) Saame, et $F'(x) = 2 \operatorname{sinc} 2x$.

3) $-\frac{x}{\ln x}$. 4) $2(\ln 2x)^2 - (\ln x)^2$. 5) $-e^{(\sin x)^2} \cos x - e^{(\cos x)^2} \sin x$.

161. a1) $\frac{1}{8}$; a2) $\frac{1}{2}$; a3) $\frac{2}{\pi}$; a4) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; a5) integraal hajub; a6) $\frac{4}{3}$; a7) ∞ ; a8) integraal hajub; a9) -1 ; b1) $1 + \frac{\pi}{2}$;

b2) $-\frac{4}{3}$; b3) $\frac{102}{7}$; b4) $\sqrt{3}$; b5) $\frac{1}{\ln 2}$; b6) integraal hajub; b8) π ; b9) integraal hajub; b10) π ; b11) -1 .

162. 1) $q > 1$; 2) $q < 1$; 3) mitte ühegi q väärtuse korral.

164. Arvutage $\int_a^\infty \frac{K dx}{x^q}$.

165. Kui f on tõkestamata punkti b vasakpoolses ümbruses, siis on majorant $\frac{K}{(b-x)^q}$.

166. Vaadelda tuleb olukorda $0 \leq \frac{K}{x^q} \leq f(x)$, kus q on selline, et $\int_a^\infty \frac{K dx}{x^q}$ hajub. Analooiliselt juhul, kus päratu integraal leitakse lõigus $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

167. a1) koondub; a2) koondub; a3) hajub; a4) koondub; a5) hajub; a6) koondub; b1) koondub; b2) koondub; b3) koondub; b4) hajub; b5) koondub; b6) hajub.

172. $u_k = s_k - s_{k-1}$.

173. Avaldage osasummad $\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k$.

174. Osasummade jada on kasvav; $(-1)^n$.

175. 1) kasutage seost $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, summa on 1; 2) $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$, summa on $\frac{11}{18}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 2; 6) 12; 7) $\frac{3}{4}$; 8) eeldusel, et $|a| > \frac{1}{5}$ on summa $\frac{45a+1}{25a-5}$; 9) 1.

177. Kasutage Cauchy kriteeriumit ja kolmnurga võrratust.

Alternatiiv: koondugu rida $\sum_k 2|u_k|$, siis $0 \leq u_k + |u_k| \leq 2|u_k|$ ja I võrdluse tõttu koondub ka rida

$\sum_k (u_k + |u_k|)$, millest järeldub rea $\sum_k u_k$ koonduvus.

178. 1) $\lim_k \frac{k}{100k+1} = \frac{1}{100} \neq 0$; 2) $\lim_k |(-1)^k| = 1 \neq 0$, seega $\lim_k (-1)^k = 0$ ei kehti;

alternatiiv: jada $((-1)^k)$ hajub, seega $\lim_k (-1)^k = 0$ ei kehti;

alternatiiv: osasummade jada on $(-1, 0, -1, \dots)$, mis hajub; 3) tähistame $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; oletades, et $\lim_n s_n = s$,

kehtib $0 = \lim_n (s_{2n} - s_n) \geq \frac{1}{2}$, vastuolu; 4), 5) analoogiline ülesandega 3).

179. 1) koondub (I või II VL); 2) koondub (I või II VL); 3) koondub (I või II VL); 4) koondub (II VL); 5) hajuv (II VL); 6) hajuv (II VL); 7) koondub (II VL); 8) hajuv (II VL); 10) koondub (Cauchy või d'Alembert); 9) hajuv (Cauchy või d'Alembert); 11) koondub (Cauchy või d'Alembert); 12) koondub (Cauchy või d'Alembert); 13) hajuv (II VL); 14) koondub (d'Alembert); 15) koondub (d'Alembert); 16) hajuv (d'Alembert); 17) koondub (d'Alembert); 18) koondub (d'Alembert); 19) koondub (Leibniz); 20) koondub (Leibniz); 21) hajuv

$$\left(\lim_k \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0\right).$$

180. 1) Väide kehtib. Näidake, et kui $\lim_k u_k = 0$, siis jada liikmetega $\frac{1}{u_k}$ on tõkestamata. Seega see jada hajub ning ei kehti rea koonduvuse tarvilik tingimus $\lim_k \frac{1}{u_k} = 0$. 2) Väide ei kehti: kontranäiteks sobib $u_k = 1, k \in \mathbb{N}$.

183. 1) $D = (-1, 1], f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in (-1, 1), \\ 1, & \text{kui } x = 1; \end{cases}$ 2) $D = \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$ 3) $D = \mathbb{R}, f(x) = e^x$;
4) $D = \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$ 5) $D = \mathbb{R}, f(x) = 0$; 6) $D = \mathbb{R}, f(x) = 0$.

184. 1) ei; 2) jah; 3) jah; 4) ei; 5) ei.

185. 1) $D = A = (-1, 1), S(x) = \frac{x}{1-x}$; 2) $D = A = (1, 3), S(x) = \frac{1}{3-x}$; 3) $D = A = (1, \infty)$; 4) $D = (0, \infty), A = (1, \infty)$; 5) $D = A = \left(\frac{1}{e}, e\right), S(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$; 6) $D = [-1, 1), A = (-1, 1), S(x) = -\ln(1-x)$; 7) $D = A = (-1, 1), S(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$; 8) $D = A = \mathbb{R}$; 9) $D = A = [0, 2], S(x) = 1 - \frac{x-2}{x-1} \ln(2-x)$; 10) $D = \left(\frac{1}{2}, \infty\right), A = (1, \infty)$; 11) $D = A = \{0\}$; 12) $D = A = [0, \sqrt{e-1}), S(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \ln(1+x^2)}$; 13) $D = A = \mathbb{R}, S(x) = e^{x+2} - 1$; 14) $D = A = \mathbb{R}, S(x) = \operatorname{sh} x^2$; 15) $D = (-1, 1), A = (-1, 1), S(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$; 16) $D = [-4, 0), A = (-4, 0), S(x) = \ln \left(-\frac{2}{x} \right)$.

186. 1) $\left| \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$; 2) $\left| \frac{(\sin kx)^2}{\sqrt{k^3+1}} \right| \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$; 3) $\left| \frac{(x-2)^k}{k^2 2^k} \right| \leq \frac{1}{k^2}$; 4) $\left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{x^2+k^3}} \right| \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$; 5) $\left| \frac{1}{2^k + \arccos x} \right| \leq \frac{1}{2^k}$;
6) $\left| \frac{e^{-k^2 x^2}}{k\sqrt{k}} \right| \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}.$

188. 1) Funktsionaalrida $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ on astmerida koonduvusvahemikuga $(-1, 1)$. Saame, et kui $x \in (-1, 1)$, siis $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$. Niisiis antud rea summa on 2. 2) Funktsionaalrida $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$ on astmerida koonduvusvahemikuga $(-1, 1)$. Saame, et kui $x \in (-1, 1)$, siis $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k \right)' = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$. Niisiis antud rea summa on 6. 3) e^3 . 5) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. 6) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

189. 1) Rida koondub ühtlaselt koguni hulgas $\mathbb{R}$, piirväärtus on $\frac{1}{2}$; 2) rida koondub ühtlaselt koguni hulgas $\mathbb{R}$, piirväärtus on $\frac{1}{3}$; 3) rida koondub ühtlaselt hulgas $[0, \infty)$, piirväärtus on 1.

190. 1) Rida koondub ühtlaselt hulgas $[\ln 2, \ln 3]$, integraal on $\frac{1}{2}$; alternatiivne lahendus on leida $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$ ning võtta sellest integraal antud rajades; 2) rida koondub ühtlaselt hulgas $[0, \pi]$, integraal on $\frac{5\pi}{2}$.

191. 1) Rida ise koondub punktiviisi ja tuletiste rida koondub ühtlaselt hulgas $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], f'(0) = -2$; tuletis on 2) Rida ise ja tuletiste rida koondub ühtlaselt igal pool; $f^{(17)}(3) = 68$.

192. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}, \mathbb{R}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \mathbb{R}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!}, \mathbb{R}$; 4) $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}, \mathbb{R}$, kasutada valemit $(\cos x)^2 = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, (-1, 1)$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+9}, (-1, 1)$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}, (-2, 2)$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}})x^n, (-2, 2)$; 9) $\ln 8 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n8^n}, (-8, 8]$.