

Arvuhulkade käsitlemine koolis

1. Arvu mõiste laiendamine ajalooliselt ja koolimatemaatikas

Arvu mõiste on matemaatikas algmõiste, mida ei defineerita. Selle mõiste sisu laieneb kogu koolikursuse vältel.

Kõigepealt vaatame, kuidas laienes arvu mõiste sisu ajalooliselt.

Arvu mõiste ajalooline areng. Kõigepealt (enam kui 5000 a tagasi) võttis inimene kasutusele *naturaalarvud*. Neid arve tunti juba enne seda, kui inimene õppis kirjutama. Seejärel (enam kui 3000 a tagasi) jõuti *hariliku murru* mõisteni. Esimesed teated harilikest murdudest pärinevad Egiptusest. Säilinud on 19. sajandist eKr nn Moskva papüürus (asub Moskvas Puškini Kujutava Kunsti Muuseumis), millel on 25 ülesannet koos lahendustega, ja 17. sajandist eKr Rhindi ehk Ahmese papüürus 85 ülesande lahendusega. Järgmisena võeti Hiinas kasutusele *negatiivsed arvud* 2. sajandil eKr, Euroopasse jõudsid nad hiljem. Oma kasutuse matemaatikas leidsid negatiivsed arvud seoses Descartesi (1596 – 1650) koordinaatide meetodiga. Umbes samal ajal võeti kasutusele ka *irratsioonalarvud* (termini *irratsioonalarv* võttis kasutusele M. Stifel 1544. a, kuigi ka Pythagoras oli neid kasutanud), kuigi üksikuid irratsioonalarve kasutati juba Pythagorase koolkonnas. Kõige hiljem võeti kasutusele *kümnnendmurrud*. Kümnnendsüsteem kujunes välja Hiinas ja Indias vastavalt 2200 ja 1500 aastat tagasi, kuid Euroopasse jõudis see 15. sajandil ja kasutusele võeti 16. sajandil.

Matemaatikateaduses toimub arvu mõiste laiendamine teistel alustel. Arvu mõistega tutvumist alustatakse *naturaalarvudest*. Öeldakse, et naturaalarvude hulk on kinnine liitmistehte ja korrutamistehte suhtes, st iga kahe naturaalarvu summa ja korrutis on alati naturaalarv. Nüüd laiendatakse naturaalarvude hulka nii, et see hulk oleks kinnine ka lahutamistehte suhtes, nii saadakse *täisarvude* hulk. Laiendades täisarvude hulka selliselt, et uues hulgas oleks teostatav ka jagamistehe, jõutakse *ratsioonalarvude* hulga ja seejärel *irratsioonalarvude* ning *reaalarvude* hulga.

Koolimatemaatikas püütakse rohkem järgida arvu mõiste ajaloolise laienemise käiku. Loomulikult õpib laps I klassis kõigepealt tundma *naturaalarve*. Selle mõiste kaudu jõutakse seejärel põgusa tutvumiseni *hariliku murru* mõistega (III klass - osa tervikust; V klass – harilike murdude liigid, liitmine, lahutamine), kust liigutakse edasi *kümnnendmurru* mõisteni (V klass). Kui ollakse õppinud selgeks tehted kümnnendmurdudega, õpitakse põhjalikumalt tundma *harilike murdude* omadusi ja tehteid nendega (VI klass). Alles seejärel jõutakse *negatiivsete*

arvudeni (VI-VII klass). Edasi jõutakse juurimistehte kaudu *irratsioonaalarvu* mõisteni (VIII-IX klass). Kokkuvõtlik käsitlus erinevatest *arvuhulkadest ja reaalarvude* hulgast kuulub X klassi teemade hulka (siis ka hulgateoreetiline käsitlus: elemendi kuulumine hulka, sisaldumine).
Naturaalarvud $\rightarrow$ kümnendmurrud $\rightarrow$ harilikud murrud (positiivsed) $\rightarrow$ negatiivsed arvud, ratsionaalarvud $\rightarrow$ irratsioonaalarvud $\rightarrow$ reaalarvud (Eestis).

Sama järjekord ei pea olema matemaatika õppimisel teistes riikides. Tavaliselt võib siin olla erinevusi kümnend- ja harilike murrude käsitlemisel.

2. Naturaalarvude käsitlemine

Asend ainekavas

Naturaalarvudega on õpilased kokku puutunud juba I klassist alates. IV klassis õpilane õpib lugema ja kirjutama naturaalarve kuni miljonini, võrrelda arve, sooritada nelja tehet nii peast kui ka kirjalikult (jagamine ühe- kuni kahekohalise arvuga). Õpilane tunneb seoseid iga tehte komponentide vahel ja oskab leida puuduvat komponenti. Samuti tunneb õpilane tehete järjekorda ja oskab arvutada 3-4 tehtega (ka sulgusid sisaldava) arvavaldise väärtust. Samuti peaks ta olema omandanud mõisted *võrra rohkem, võrra vähem, korda rohkem, korda vähem* ja oskama lahendada neid mõisteid sisaldavaid tekstülesandeid. Naturaalarvude omaduste ja tehete õppimine jätkub ka V klassis.

Naturaalarvu mõiste, selle erinevad aspektid. Arvu koostis

V klassi õpikus defineeritakse naturaalarv järgnevalt: *arve* 0, 1, 2, - nimetatakse *naturaalarvudeks*. Naturaalarvud saadakse loendamise teel. On erinevaid käsitlusi sõltuvalt sellest, kas arv 0 loetakse naturaalarvude hulka või mitte. Meie kooliõpikutes loetakse ka 0 naturaalarvuks (vaid T. Tõnso ja A. Veelmaa X klassi matemaatikaõpikus ei loeta). (Selle segaduse tõttu kasutatakse meie matemaatika olümpiaadi ülesannete tekstides vormelit – positiivsed täisarvud.)

Naturaalarvu mõisteni jõutakse I klassis mingi hulga elementide loendamise teel ja naturaalarvu vaadeldaksegi eelkõige kui loendamise tulemust. Kuid naturaalarvu mõiste kujundamisel tuleb silmas pidada ka teisi aspekte, kus see arv kasutust leib:

- naturaalarv kui **kardinaalarv** (absoluutarv) – arv näitab, mitu elementi on mingis hulgas (siia sobitub absoluutskaala)
- naturaalarv kui **ordinaalarv** (järgarv) – arv näitab, mitmenda elemendiga mingist järjestusest on tegemist (siia sobitub ordinaalskaala)
- naturaalarv kui **nominaalarv** (number) – arvuga väljendatakse mingi objekti numbrit (näiteks telefoni number) (siia sobitub nominaalskaala)

- naturaalarv kui **mõõtarv** – arv, mis on saadud mingi mõõtmise (ümardatud) tulemusena (näiteks 3 kg jahu), see naturaalarv on seotud mõõtühikuga. (siia sobib ka intervallskaala)

Naturaalarvud kirjutatakse üles 10 numbri abil, kasutades positsioonilisuse printsiipi (iga numbri väärtus sõltub tema asukohast arvus). Iga naturaalarv koosneb järkudest, kusjuures kümnendsüsteemis on iga järgmise järgu ühik (liikudes arvus paremalt vasakule) 10 korda suurem eelmisest. Arvu lugemise kergendamiseks jaotatakse järgud kolme kaupa klassideks, alustades paremalt: ühtede klass, tuhandete klass, miljonite klass, miljardite klass jne (T SKÜ – suuremate arvude puhul enam lühendeid pigem ei kasutata).

(Vt https://et.wikipedia.org/wiki/Positsiooniline_arvus%C3%BCsteem)

Märkus: Rooma numbrid on näide mittepositsioonilistest arvudest.

Rooma numbrid

Rooma numbreid käsitletakse tänapäeval vähem. Enam kasutamist leiavad rooma arvud elus vahest kuude märkimisel (nt 10. XII on 10. detsember) või koolis klasside märkimisel (Nt V klassi matemaatikaõpik). Väike spikker:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Mõned näited:

MCCCXCVII - 1397 (Sünnib Kalmari Uniooni),

MDCXXXII – 1632 (Tartu Ülikool),

MMXVI – 2016

Ülesanded Shakespeare'i isa aegsest koolist:

MCDXLIV + MCCCLXXXVII =

MMXVI – MCCXLIX =

Kokku-lahku kirjutamine:

Eelneva arvsõnaga **kokku** kirjutatakse sõnad **-teist(kümmend)**, **-kümmend** ja **-sada**: kolmteist, seitseteistkümmend, viiskümmend, kaheksakümmend, kakssada, üheksasada.

Muud arvsõnad kirjutatakse eelnevast arvsõnast **lahku**: sada kaheksa, nelikümmend kolm, viis tuhat, kuus miljonit, kaks miljardit kaheksasada kolmkümmend seitse tuhat, viissada kakskümmend üks tuhat nelisada üheksakümmend kaks.

Nimetus		Venemaa, USA, Prantsusmaa		Saksamaa, Inglismaa	
1.	Sada	10 astmel	2	10 astmel	2
2.	Tuhat	10 astmel	3	10 astmel	3
3.	Miljon	10 astmel	6	10 astmel	6
4.	Miljard	10 astmel	9	10 astmel	9
5.	Biljon	10 astmel	9	10 astmel	12
6.	Biljard	10 astmel	-	10 astmel	15
7.	Triljon	10 astmel	12	10 astmel	18
8.	Triljard	10 astmel	-	10 astmel	21
9.	Kvadriljon	10 astmel	15	10 astmel	24
10.	Kvintiljon	10 astmel	18	10 astmel	30
11.	Sekstiljon	10 astmel	21	10 astmel	36
12.	Septiljon	10 astmel	24	10 astmel	42
13.	Oktiljon	10 astmel	27	10 astmel	48
14.	Nontiljon	10 astmel	30	10 astmel	54
15.	Detsiljon	10 astmel	33	10 astmel	60

Suuremate arvude puhul tuleb silmas pidada, et erinevates maades kasutatakse arvude erinevaid nimetusi (vt näiteks *Kaasik, K., Lepmann, L. Väike metoodikaraamat II kooliastme matemaatikaõpetajale, Tln 2002* või *Abel, E jt. Koolimatemaatika entsüklopeedia, Trt 1998, lk 101*). Näiteks *biljon* on Venemaal, Prantsusmaal, USAs (ka Eestis) 10^9 , kuid Soomes, Suurbritannias ja Saksamaal hoopis 10^{12} . Seetõttu kirjutatakse suuremaid arve tavaliselt üles 10 astmete abil ilma arvu nimetusi kasutamata. Guinnessi rekordite raamatus on kirjas, et kõige suurem arv, millele on antud oma nimetus, on tsentiljon – 10^{600} .

(Mõelda, kas saab tsentiljoni kirjutada arvu 100, 1000 või 1 000 000 astmena?)

Soovitusi naturaalarvude temaatika käsitlemiseks IV ja V klassis

IV klassis võiks tehteid käsitleda esmalt arvudega kuni 10 000ni ning seejärel minna suuremate arvudeni. Tehete omaduste rakendamisel võiks piirduda kuni kahekohaliste arvudega, kuid tutvustada tuleks ka nende omaduste kehtivust suuremate arvude korral.

V klassis toimub tegelikult algklassides õpitu süvendamine. Laieneb ainult arvude piir. Kui IV klassis tegeldi arvudega kuni miljonini, siis nüüd vaadeldakse ka suuremaid arve (kuni miljardini). Alustatakse arvude koostise uurimisega, arvude lugemise ja kirjutamisega. Põhjalikumalt tegeldakse V klassis *miljonite klassiga*. Siin tuleb teha kahte liiki ülesandeid, mis on teineteise pöördülesanded:

- arv on antud, õpilane peab oskama seda lugeda, nimetada iga järku;
- õpilasele öeldakse mingi arv, ta peab oskama selle üles kirjutada.

Kui õpilasel on raskusi, võib abiks kasutada järkude tabelit:

Järk	kümnetuhandelised	tuhandelised	sajalised	kümnelised	ühelised
Arv		3	0	7	4

Muidugi peab õpilane oskama kirjutada iga arvu järkarvude summana. Koos suurte arvude õppimisega peaks õpilasel kujunema ka *oskus arvu suurust ette kujutada ja ligikaudu hinnata*. Näiteks selleks, et saada ettekujutust Vabadussõjas langenute arvu (3500 meest) suurusest, võib õpilasi suunata võrdlema seda arvu iseseisvuspäeval kaitseväge paraadil marssivate sõdurite arvuga (1100 sõdurit, Võrus 2016. a). Kasulik on lasta õpilastel endil otsida suuri arve kas internetist, ajalehtedest või teatmeteostest, samuti lasta mõelda nende suuruse hindamiseks mingeid võrdlusarve.

(Meenuta, kui kõrge võiks olla see hoone, milles asud. Võrdle selle hoone kõrgust ja Euroopa kõrgeima männi kõrgust 47 m (täpsemalt 46,6 m).)

https://et.wikipedia.org/wiki/Harilik_m%C3%A4nd (Lugu männi kohta)

Mõelda, millise näitega illustreeriks arvusid 19, 25, 100, 2000.

Põhitähelepanu peaks V klassis kuuluma *arvutusoskuse viimistlemisele*. Arvutamist õpitakse üksiktehete kaupa: kõigepealt liitmine, siis lahutamine, korrutamine ja jagamine. Midagi uut see temaatika võrreldes algklassidega ei sisalda, vaid arvude ülemine piir on nihkunud miljonite klassini. Kuid nüüd tuleks rohkem tähelepanu pöörata tehte algoritmi põhjendamisele ehk sellele, miks üks või teine kirjaliku arvutamise algoritm on just selline. Selleks tuleb toetuda arvutamise seadustele, kirjutades seejuures arvud järkarvude summana. Et õpilasel oleks lihtsam hiljem arvutusalgoritme meelde tuletada, on selline sisuline lähenemine

vajalik. Iga tehte juures tuleb õpetada ka vastust kontrollima. Selleks tuleb õpilases kujundada oskus vastuse ligikaudseks hindamiseks. Arvuti kasutamise ajastul on see oskus eriti oluline. Peale selle saab iga tehte õigsust kontrollida ka pöördtehte kaudu. Esimese, liitmistehte korral küll see võimalus puudub. Kuid siin võib liita liidetavad teises järjekorras. (Näiteks kirjaliku lahutamise korral saad kontrollida liitmise abil. Või $3+4=7$ ja $7-4=3$.)

Arvutamise seadused peaksid kõigil õpilastel selgeks saama. Neid tuleb kõigepealt kasutada eeskätt peastarvutamise lihtsustamiseks, kuid seejärel ka kirjalike arvutusalgoritmide põhjendamiseks.

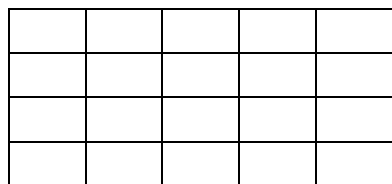
$$5+97=97+5=97+3+2=10002=102$$

$$23 \cdot 4 \cdot 25$$

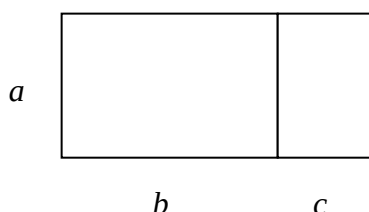
$$247 \cdot 24 + 53 \cdot 24$$

$$25 \cdot 16 = (25 \cdot 4) \cdot 4$$

Kuidas aga jõuda arvutamise seadusteni? Nendeni jõutakse induktiivselt, üksikute arvuliste näidete kaudu. Tähtsad on seejuures eespool mainitud näited arvutamise lihtsustamise kohta. Kuid seaduste tuletamiseks on teisigi teid. Näiteks saab põhjendada geomeetriselt:



selle joonise abil saame veenduda, et 4 korda 5 on sama, mis 5 korda 4
igas reas on 5 ristkülikut, et ridu on 4, siis on kokku $4 \cdot 5$ ristkülikut



Viimase joonise järgi saab ristküliku pindala valemeid kasutades põhjendada, et $a(b + c) = ab + ac$.

Sobivad ka näiteks järgmised tekstülesanded:

Aeda istutati 8 rida viljapuid, igasse ritta 5 pirni- ja 7 õunapuud. Mitu viljapuud istutati aeda? või teine ülesanne

Kaks autot väljusid samaaegselt kahest linnast ja sõitsid teineteisele vastu. Esimese auto kiirus oli 80 km/h ja teisel autol 60 km/h. Autod kohtusid 3 tunni järel. Kui kaugel on linnad teineteisest?

Nende mõlema ülesande korral tuleb välja tuua kaks erinevat lahendusteed, seejärel võrrelda omavahel ka nende kahe ülesande lahendusi. (Mõelda, mida tähendab sisuliselt avaldis $80 \cdot 3 + 60 \cdot 3$, aga $(80 + 60) \cdot 3$? Kumb kahest

ülesandest on õpilastele lihtsam mõista?) Selline lähenemine võimaldab õpilastel endil avastada arvutamise seadusi.

Saades, et $(7+5) \cdot 8 = 7 \cdot 8 + 5 \cdot 8$; $(80+60) \cdot 3 = 80 \cdot 3 + 60 \cdot 3$, võib korrutamise **jaotuvusseaduse** (liitmise suhtes) kirjutada üles üldkujul $a(b+c) = ab + ac$.

Heaks näiteks on ka lihtsalt korrutamine $(80+6) \cdot 3 = 86 \cdot 3$.

Milliseid seadusi veel on? Ühenduvuse seadus. Vahetuvuse (ehk kommutatiivsuse) seadus.

Ühenduvuse ehk assotsiatiivsuse seadus: $a + (b + c) = (a + b) + c$

Soovitatakse olla korrektne avaldise koostamisel. Kui purk suppi kaalub 500 g ja ostetakse 4 purki, siis on avaldiseks $4 \cdot 500$, mitte $500 \cdot 4$. Siis on $4 \cdot 500g$.

Õpilane peaks mõistma, et arvutamise seaduste sõnastustes on õige kasutada sõna **võib**, mitte **tuleb** (näiteks kahe arvu korrutise korrutamiseks arvuga võib selle arvuga korrutada esmalt ühe teguri ja tulemusega korrutada teise teguri).

Tehete õppimisel tuleb mõelda ülesannete järjestusele. Esimesed liitmisülesanded olgu sellised, kus pole üleminekut ühest järgust teise, lahutamisel ei ole laenamist kõrgemast järgust. Naturaalarvude korrutise defineerimisel tuleb silmas pidada, et seosega $n \cdot a = a + a + \dots + a$, kus a on võetud n korda liidetavaks, defineerime korrutise sel juhul, kui $n \geq 2$. Kuid $n = 0$ ja $n = 1$ jaoks tuleb korrutis eraldi defineerida. Jagamistehte juures peaksid õpilased läbi tekstülesannete omandama jagamistehte kaks tähendust: jagamine kui võrdseteks osadeks jaotamine ja jagamine kui mahutamine (vt Kaasik-Lepmann. Väike metoodikaraamat lk 101).

Kõige keerukam on kirjalik jagamine, sest seal on tarvis teha ka lahutamise- ja korrutamistehteid, hinnata tehte tulemusi jne. **Võiks alustada ühekohalise arvuga jagamisest, sealt edasi liikuda kahekohalise arvuga jagamisele.** Keerulisemaks ei oleks vaja minna, siis kasutaks juba kalkulaatorit.

Kõigi tehete korral tuleb **erilist tähelepanu pöörata tehetele 0 ja 1-ga**. Kuigi need tunduvad lihtsatena, teevad õpilased seal palju vigu. Kui kõik tehted on ühekaupa läbi võetud, tuleb piisavalt aega eraldada ka selleks, et harjutada kõiki nelja tehet läbisegi. Abiks oleksid ka vastavad lihtsad tekstülesanded. Samaaegselt õpitakse ka tehete järjekorda. Siin on kindlasti vaja lahendada ka selliseid ülesandeid, milles on järjest sama järku tehted (näiteks lahutamine ja liitmine).

Peatume veel *jäägiga jagamisel*. Tavaliselt vormistame me jäägiga jagamise tehte selliselt: $14 : 4 = 3$, **jääk 2**. Kui vaatame ka näiteks tehet $11 : 3 = 3$, **jääk 2**, kas võime siis järeldada, et $14 : 4 = 11 : 3$? Mõnikord öeldaksegi, et selline jäägiga jagamise üleskirjutus, nagu esitasime, ei ole korrektne ja et võrdusmärki ei kasutata siin võrduses traditsioonilises

tähenä. Korrektne oleks kirjutis $14 = 3 \cdot 4 + 2$ (kasutatakse ka kirjutisi $(14 - 2) : 4 = 3$ või $14 : 4 = 3 + 2 : 4$ või $14 : 4 = 3 + 2/4$). Võrdust $14 : 4 = 3$, jääk 2 peaksime vaatama tervikuna, nii et võrduse paremat poolt kasutame ainult antud kontekstis, koos vasaku poolega. Õpilaste jaoks on lihtsam just see viimane võrdus.

Oluline teema naturaalarvude puhul on *arvude jaguvus*. Siin käsitletakse mõisteid algarv, kordarv, arvu kordne, arvu tegur, vähim ühiskordne, suurim ühistegur. Viimased on eriti olulised harilike murdude temaatika juures. Jaguvustunnuseid käsitledes tuleks õpilaste jaoks lahti mõtestada tunnuste sõnastus. Näiteks 2ga jaguvuse tunnuse kui arv lõpeb paarisnumbriga, siis ta jagub 2ga, vastasel juhul mitte korral tuleb eristada kahte lauset: a) kui arv lõpeb paarisnumbriga, siis arv jagub 2ga; ja b) kui arv ei lõpe paarisnumbriga, siis arv ei jagu 2ga. Mõnedes õpikutes on esitatud vaid esimene lause. [Vrd kui viimane number arvus on 0, siis arv jagub arvuga 5.] Kuid kindlasti on vaja õpilasel teada ka, mis juhtub siis, kui arv ei lõpe paarisnumbriga - kas see arv jagub 2ga või mitte. Esimene lause ei anna sellele vastust. Seega tuleb selgeks saada nii teoreem kui ka pöördteoreem ehk tarvilik ja piisav tingimus mingi arvu jaguvuseks antud arvuga. Ka jaguvustunnuseid saavad õpilased ise avastada. Kuigi V klassis ei ole veel jõukohane jaguvustunnuste tõestamine, võiks seda teha põhikooli lõpuklassides tublimate õpilastega.

Tõestame järgnevas 3ga (9ga) jaguvuse tunnust. Olgu antud naturaalarv

$$N = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10^1 + a_1. \text{ Teades, et } 10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1 \text{ jne, võime kirjutada, et}$$

$$N = a_n \cdot (9 \dots 9 + 1) + a_{n-1} \cdot (9 \dots 9 + 1) + \dots + a_3 \cdot (99 + 1) + a_2 \cdot (9 + 1) + a_1 =$$

$$= (a_n + a_{n-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1) + (9 \dots 9a_n + \dots + 99a_3 + 9a_2)$$

Saadud summa teine liidetav jagub 3-ga (9ga). Et summa jaguks 3ga (9ga), on vaja, et ka esimestes sulgudes olev liidetav jaguks 3ga (9ga).

Õpilaste jaoks palju põnevat saab seostada algarvudega. Seoses jaguvusega näeme, et paljudel arvudel on ainult 2 tegurit: arv 1 ja arv ise. Nii jõuame *algarvu* mõisteni. Ka praegu tegeldakse matemaatikas suurima algarvu otsingutega ning selle kohta on võimalik leida põnevat kirjandust. Aritmeetika põhiteoreemi kohaselt on iga kordarv üheselt esitatav algarvuliste tegurite korrutisena. Kuid võimalusi nende tegurite leidmiseks on mitmeid (vt *Kaasik-Lepmann. Väike metoodikaraamat* lk 139).

Kas kirjalik arvutusoskus on arvuti ajastul vajalik?

Praegu on peaaegu igal V klassi õpilasel olemas taskuarvuti või nutitelefon. Seetõttu kerkib nii õpilastel kui ka õpetajal paratamatult küsimus: kas on üldse vaja õppida kirjalikult arvutama? Võib-olla saaks selle alt vabanevat aega efektiivsemalt kulutada? Nt Saksa matemaatika-

didaktik F. Padberg vastab sellele kindlalt EI (vt Padberg, F. Didaktik der Arithmetik 1996, lk 126). Ta toob põhjusetena on järgmist:

- eksimused ja hooletusvead tekivad sagedamini just taskuarvutiga arvutades. Seetõttu peab **iga** õpilane (või **iga** arvutaja) suutma oma arvutusi kriitiliselt hinnata ja tulemust kontrollida. Selline olukord, kus vaid mõned üksikud inimesed selleks suutelised on, ei tohiks nii elementaarses valdkonnas lubatud olla. Arvutamises peaks igaüks kogema, et ta on võimeline ise oma tegevust kontrollima.
- kirjaliku arvutamise kaudu on kerge demonstreerida seda, et teatud algoritmide rakendamise kaudu saab keerulisi arvutusi lihtsamaks teha. See eesmärgiseade on arvutiajastul eriti tähtis.
- teadmised kirjaliku arvutamise alalt annavad õpilasele esmase ettekujutuse sellest, kuidas (tasku)arvuti nende arvutuste tegemisel toimib, kuidas toimub algoritmiline tegevus.

[Kas oleks didaktikule leida vastuargumente?]

Õeldu ei tähenda aga seda, et kirjaliku arvutamise õpetamises midagi muutuma ei peaks. Kaasajal ei ole mõtet kulutada ülearu aega keerukatele arvutustele liiga suurte arvudega. **Ka on mõistlik senisest suuremat tähelepanu pöörata tulemuse kontrolli oskustele, et arvutiga arvutades märgataks vigu kergemini.**

Süstemaatilised vead arvutustes naturaalarvudega (vt Padberg, F. Didaktik der Arithmetik 1996)

Vead, mida õpilased arvutustes või ka mingis muus matemaatika valdkonnas teevad, on sageli süstemaatilised, mitte juhuslikud. See tähendab, et õpilased on omandanud vale arvutusalgoritmi ja nad rakendavad seda „oma” algoritmi kõigi sama tüüpi ülesannete lahendamisel süstemaatiliselt. Süstemaatilised vead saab välja selgitada empiiriliste uurimuste abil. Toome siin välja järgmised süstemaatilised vead, mida tehakse arvutamisel naturaalarvudega.

- vead liitmisel, kus on ülekanne ühest järgust teise. Selle vältimiseks tuleks järjekindlalt lasta ülekantav number kirjalikult esitada arvutusskeemis, kasuks tuleb ka samaaegne suuline kõne.
- vead lahutamisel, kui vähendatav on järkarv või sisaldab palju nulle (6000 – 3253). Meetmed vea vältimiseks samad mis eelnevas
- vead lahutamisel, kui tuleb laenata kõrgemast järgust. Siis kas jäetakse kõrgema järgu arv samaks või tehakse nii, et lahutatakse igas järgus suuremast arvust väiksem (näiteks tehes $273 - 197$ lahutatakse $7 - 3$, siis $9 - 7$ ja lõpuks $2 - 1$) või jäetakse laenamine tegemata kõige kõrgemas järgus, kui vähendatavas see järk puudub (tehe $786 - 92$). Meetmed vea vältimiseks samad mis eelnevas
- vead korrutamisel, kui teise teguri keskel on nulle, näiteks $26 \cdot 107$. Aitab see, kui algul kirjutada ka nullidest koosnev osakorrutis

- vead korrutamisel, kui tegurite lõpus on nulle. Tuleks meelde tuletada reegleid naturaalarvu korrutamiseks 10ga, 100ga jne
- vead jagamisel, kui jagatise keskele tuleb nulle, näiteks $5365:49$, tuleks algul ka 0dest moodustuvad osakorrutised kirja panna, võib kasutada järkude tabelit
- vead jagamisel, kui jagatise lõppu tuleb nulle, näiteks $5225:6$
- tehked 0 ja 1ga ($a+0$, $a-0$, $0\cdot a$, $a:0$, $a\cdot 1$, $a:1$)
- tehe $a:a$

Küsimusi

1. Miks ei saa nulliga jagada?
2. Mis on järguühik, mis on järkarv?
3. Järgud ja klassid naturaalarvus.
4. Kuidas on defineeritud kahe naturaalarvu korrutis ja jagatis?
5. Kuidas defineerida algarv, kordarv?
6. Arvutamise seadused (nimetused, sõnastus, näide **otstarbeka** rakenduse kohta arvutamisel).
7. Kuidas vormistatakse neli tehet kirjalikul arvutamisel naturaalarvudega?
8. Naturaalarvude hulga omadused.
9. Viienda klassi õpilane lahendas ülesande
Leia jagatis ja jääk jagamistehtes $150:20$ järgmiselt:
 $150:20 = 15:2 = 7$, jääk 1.
Kuidas kommenteerite seda lahendust?
10. On kaks tekstülesannet. Kommenteerige neid jagamistehte sisulise tähenduse aspektist (mahutamine, võrdseteks osadeks jaotamine)
 - a) 5 banaani maksavad 15 krooni. Kui palju maksab üks banaan?
 - b) ema jaotas 15 pirukat võrdselt viiele lapsele. Mitu pirukat sai iga laps?
11. Kirjutage üks kirjalik liitmis-, lahutamis-, korrutamise- ja jagamistehe ning kommenteerige suuliselt selle sooritamise iga sammu nii, nagu seda peaks tegema ka õpilane.
12. Kuidas on Teie arvates arutlenud õpilane järgnevat tehet tehes?

$$\begin{array}{r} 126 \cdot 6 \\ \hline 1156 \end{array}$$

Koostanud Hannes Jukk