

Astmed ja juured

Küsimused ja ülesanded

- Kuidas nimetatakse astendamise ja juurimise tehte komponente?
- Millised võimalused on murru nimetajast irratsionaalsuse kaotamiseks?
- Töötage läbi Lepmann-Velskeri X klassi õpikust ül 134 (2000. a trükis on see ülesanne nr 127), kust selguvad tingimused n -nda juure defineerimiseks. (ehk 1995.a lk 36 ül 134)

Asend ainekavas

- Praeguse ainekava ja eeskätt õpikute kohaselt areneb astme mõiste järgmiselt:
- IV klass – arvu ruut (millega seotult?)
- V klass – arvu kuup (millega seotult?)
- VII klass – naturaalarvulise astendajaga aste (rats arvudega)
- VIII klass – täisarvulise astendajaga aste, arvu ruutjuur (viimane ka IX kl).
 - Mis nõuab 8. klassis ruutjuurt?
 - Miks, millega seotult 8-ndas astendamise valemid?
 - Mis vajab 9-ndas ruutjuurt?
- X klass – arvu n -es juur, ratsionaalarvulise astendajaga aste
- XI klass – irratsionaalarvulise astendajaga aste (miks siin vajalik?)
- Järgnevas vaatleme detailsemalt, kuidas kõik nimetatud astmed ja juured on defineeritud.

Täisarvulise astendajaga aste

- Vaadeldava temaatika põhiraskus jääb VII – VIII klassi. Varasemast teada olevat arvu ruudu ja kuubi mõistet laiendatakse ja defineeritakse

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tegurit}}$$

kus n on naturaalarv.

- Et tekiks korrutis, peab olema vähemalt 2 tegurit ehk $n > 1$. Seega tuleb eraldi defineerida ka $a^0 = 1$ ja $a^1 = a$.
- Sümbolile 0^0 ei omistata arvu tähendust.
- **Kuid** uurige Tõnso (lk 66 ja 75) ja Paisi (lk 66) VII klassi õpikuid
- $0^0 = 0$, $0^0 = 1$, 0^0 pole määratud.
- Kuidas haakub õpituga, õpitavaga? $0^0 = 0^{1-1} = 0^1$: $0^1 = 0:0 = 1$ või $0^{???}$. Igal juhul järeldus: nulliga on võimalik nulli jagada.

Täisarvulise astendajaga aste

- Kuigi alguses on põhirõhk arvude astendamisel, tuleb paralleelselt vaadelda ka muutuja ja üksliikmete astendamist.
- Eraldi tähelepanu vajavad arvude 1, -1 ja 0 astmed, samuti astendajad 0 ja 1.
- Üksikasjalikku analüüsi on vaja ka negatiivse arvu astendamise puhul. $(-2)^3$ $(-2)^4$
- Samuti osutub oluliseks tähelepanu juhtimine sulgude rollile astendamisel
- Võrdleme astmeid $(-2)^7$ ja -2^7 , samuti astmeid $(-2)^4$ ja -2^4
- Oluline ka tehete järjekord astendamist sisaldavates avaldistes
- Näiteks: $(2 \cdot 3)^2$ ja $2 \cdot 3^2$ ja üksliikmete astmed $(2a)^2$ ja $2a^2$
- 2^{2^3}
- $(2^2)^3$

Negatiivne astendaja

- Edasi kerkib küsimus, kas on mõtet ka sellistel astmetel nagu 2^{-1} ja 2^{-2} jne?
- Selleks võib vaadelda juba tuntud astmeid ja sealt seaduspärasusi märgates edasi liikuda:

32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
	:2	:2	:2	:2	:2	:2	:2
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}

- Ka võib lähtuda astmete jagamise reeglist $a^m : a^n = a^{m-n}$, mida on kasutatud naturaalarvude korral. Kuidas?

Negatiivne astendaja

- Kolmas võimalus oleks lähtuda naturaalarvu kirjutamisest 10 astmete kaudu: teame, et

$$5734 = 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

- Kuid kuidas tuleks esitada 10 astmete kaudu arvu 57,34? Ühelt poolt

$$57,34 = 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100}$$

- Teiselt poolt arvu 5734 kirjutist arvestades (astendajad vähenevad ühe võrra) võiks arvata, et

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}, \quad \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

Negatiivne astendaja

- Nii ongi mõistlik defineerida negatiivse täisarvulise astendajaga aste järgmiselt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a \in R, \quad a \neq 0, \quad n \in N$$

- Jõudes astendajaga uude arvuhulka tuleb veenduda, et naturaalarvulise astendajaga astmete korral defineeritud tehted astmetega jäävad ka uues arvuhulgas kehtima. Kuidas seda teha?
- Detailselt võiks näiteks läbi analüüsida näited hariliku murru astendamiseks negatiivse astendajaga.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3^2}{5^2}} = \frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Arvu ruutjuur

- Arvu ruutjuur on järgmine samm astme mõiste laiendamisel. Selle juurde jõutakse ruututõstmise pöördoperatsiooni uurides: kuidas leida arvu ennast, kui tema ruut on meil teada? Vastus küsimusele: Millise arvu ruuduga on tegemist? Arvu ruutjuur defineeritakse järgmiselt:
- *Ruutjuureks antud mittenegatiivsest arvust nimetatakse niisugust mittenegatiivset arvu, mille ruut võrdub antud arvuga:*
$$\sqrt{b} = a, \quad \text{kui} \quad a^2 = b, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$
- Kuna senituntud arvude ruudud ei ole negatiivsed, siis ei saa olemas olla ka ruutjuurt negatiivsest arvust.
- Kuid teame, et $(-3)^2=9$ ja , miks ei võiks siis olla $\sqrt{9}$ ka -3?
- Et aritmeetikas oleks **iga tehte tulemus üheselt määratud**, on aritmeetikas kasutusel nn aritmeetiline ruutjuur ja see defineeritakse nii, nagu eelnevas esitati.

Arvu ruutjuur

- Kasutatakse ka algebralise ruutjuure mõistet:
Algebraliseks ruutjuureks arvust b nimetatakse niisugust arvu a , mille ruut on b .
- Viimase definitsiooni kohaselt oleks $\sqrt{9} = \pm 3$.
- Algebraline ruutjuur on defineeritud A.Veelmaa VIII klassi õpikus. Ülejäänud õpikutes on defineeritud tegelikult aritmeetiline ruutjuur (kasutades terminit arvu ruutjuur). Kuid ka nende õpikutega töötades tuleks arutleda, miks ei saa juureks olla -3 ja miks ruutjuurele just selline definitsioon on antud.
- Ka võiks seejärel mittetäielikke ruutvõrrandeid vaadelda ja analüüsida, miks nüüd võrrandit $x^2=9$ lahendades kirjutame, et $x=\pm 3$?

Arvu ruutjuur

- Korrutise ja jagatise ruutjuure valemite korral eeldame alati, et mõlemad vaadeldavad arvud on positiivsed. Sel juhul saame valemite rakendada mõlemas suunas: vasakult paremale ja paremalt vasakule.

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36}; \quad \sqrt{(-4) \cdot (-9)}? \quad \sqrt{-4} \sqrt{-9}? \quad \sqrt{36}$$

- Arvu viimisel juuremärgi alla ja teguri toomisel juuremärgi alt välja eeldame samuti, et vastav arv on positiivne:

$$k\sqrt{a} = \sqrt{k^2 a}$$

korral eeldame, et $k > 0$.

- Seega

$$-5\sqrt{2} = -\sqrt{5^2 \cdot 2} = -\sqrt{50} \qquad (x-1)\sqrt{1-x} = -\sqrt{(1-x)^3} \text{ ja}$$

$$\sqrt{4a^2b} = 2|a|\sqrt{b}$$

- Valemitest jääb väheks, peab ka oma pea olema

Arvu n -es juur

- Ruutjuure mõistelt minnakse edasi juure üldise mõiste juurde. Juurimist vaadeldakse kui astendamise pöördtehet: Leitakse vastus küsimusele: Millist arvu tuleb astendada juurenäitajaga, et saada juuritav?
- $a = \sqrt[n]{b}$ $a=??? \text{ et } a^n = b$
- Liitmistehte pöördtehteks on lahutamistehe, sellega leitakse ükskõik kumba liidetavat, korrutamistehte pöördtehteks on jagamistehe, millega leitakse ükskõik kumba tegurit.
- Mis on astendamisel pöördtehted?
- $a^n=b$ $2^3=8$
 - a (astendatava) leidmine. Mida astendada n -ga, et saada b ?
 n -es juur b -st (2 on kuupjuur kaheksast)
 - n (astendaja) leidmine. Millega astendada a -d, et saada b ?
 $\log_a b$ ($\log_2 8=3$)

Arvu n -es juur

- Juure mõiste käsitlemisel tuleks kõigepealt uurida, millal on juurimistehe teostatav. Selleks on erinevate õpikute autorid kasutanud kahte võimalust:
 - vaadeldakse eraldi positiivsete arvude (ja arvu 0) ning negatiivsete arvude juurimist (M. Miinuse õpik);
 - vaadeldakse eraldi juhte, kui juurija n on paarisarv ja n on paaritu arv. (Tõnso-Veelmaa; Lepmann-Velsker).
- Esimesel juhul saab mittenegatiivse arvu a n -nda juure defineerida mittenegatiivse arvuna b , mille n -es aste on võrdne arvuga a ; negatiivse arvu n -es juur on aga määratud vaid paarituarvulise juurija korral ja on negatiivne arv:

$$a = \sqrt[n]{b}, \text{ kui } a^n = b \text{ ja } a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$$a = \sqrt[n]{b}, \text{ kui } a^n = b \text{ ja } a < 0, \quad b < 0, \quad k \in \mathbb{N}^+, \quad n = 2k + 1$$

Arvu n -es juur

- Teisel juhul (eraldi paarisarvulise juurija ja paaritu arvulise juurijaga juured) on definitsioon järgmine:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ kui } a=b^{2n} \text{ ja } a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad n \in N^+,$$

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ kui } a=b^{2n+1} \text{ ja } a \in R, \quad b \in R, \quad n \in N^+$$

- Seega paarisarvulise juurijaga juurt saab leida vaid mittenegatiivsetest arvudest, paaritu arvulise juurijaga juurt kõigist reaalarvudest.
- Kuna nüüd on tehte komponentide jaoks alati olemas kitsendused, tulekski algul keskenduda ülesannetele, milles on vaja uurida, millised juured on määratud ja millised mitte.

Arvu n -es juur***

- Vastavaid kitsendusi tuleb alati arvestada ka juurtega seotud valemite rakendamisel, näiteks valem
 - $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
 - kehtib juhul, kui a on mittenegatiivne (ka siis, kui a on negatiivne ja n on paaritu arv)
 $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^4 = \sqrt[3]{(-2)^4}$
- Kuid näiteks avaldise $\left(\sqrt{-5}\right)^2$ korral antud valemit rakendada ei tohi.
- Kuidas toimida aga keerukamate muutujaid sisaldavate avaldiste korral?
- Tehakse kokkulepe: kõik juuritavad avaldised on mittenegatiivsed.

Ratsionaalarvulise astendajaga aste

- Kui on omandatud arvu n -nda juure mõiste, on võimalik laiendada ka astme mõistet ja defineerida ratsionaalarvulise astendajaga aste. Selleks võib seniõpitud lähtuvalt uurida paralleelselt astmeid ja juuri, näiteks avaldisi

$$\begin{array}{ccc} \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 & \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 & \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 \\ (\sqrt{3})^2 & (\sqrt[3]{2})^3 & (\sqrt[3]{a})^3 \end{array}$$

- Nii jõutakse ratsionaalarvulise astendajaga astme definitsioonini:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ kus } a \in R^+, \quad m \in Z, \quad n \in N, \quad n \geq 2$$

- Selliselt astet defineerides jäävad kehtima kõik seni õpitud astendamise reeglid.

Ratsionaalarvulise astendajaga aste

- Enne, kui asuda tegema tehteid ratsionaalarvulise astendajaga astmetega, on mõistlik meelde tuletada tehted harilike murdudega. Uuringud näitavad, et vigade kõige sagedasem põhjus peitubki tehetes murdudega.
- Nüüd on lihtsustamisülesandeid võimalik teha nii juurtega kui ka astmetega ning õpilane võib ise otsustada, kumma tee ta valib. Ka nüüd eeldame lihtsustamisülesannete korral, et esialgne ülesanne on määratud, st muutujad omavad vaid selliseid väärtusi, mille korral on ülesandes antud avaldise väärtus arvutatav.
- Kui matemaatikat õpitakse väiksema tundide arvuga, siis võiks piirduda eeskätt murruliste astendajatega astmetega ning tehteid juurtega käsitleda pealiskaudsemalt (2010. aasta ainekavas. Kitsas matemaatika õppesisu: Tehted astmetega ning tehete näiteid võrdsete juurijatega juurtega. Laias matemaatikas: Tehted astmete ja juurtega).

Ratsionaalarvulise astendajaga aste

- Et lihtsustamisülesandeid edukalt lahendada, on tarvis kindlalt tunda astendamise ja juurimise reegleid. Nende kinnistamiseks võib algul paralleelselt lasta õpilasel kirjutada üles ka vastav valem, mida ta lihtsustamisel kasutab (hiljem võiks neid valemeid aegajalt teisenduste käigus õpilaselt küsida):

Ülesanne	Valem
$2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \dots$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$\sqrt{(-5)^2} = \dots$	$\sqrt{a^2} = a $

Irratsionaalarvulise astendajaga aste

- Kui XI klassis asutakse käsitlema eksponentfunktsiooni
 - $y=a^x$,
 - tekib paratamatult küsimus, kas see funktsioon on määratud ka juhul, kui astendaja x omab irratsionaalarvulist väärtust?
- Vastav aste defineeritakse järgnevalt:
$$a^r = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}, \quad \text{kus } a > 0 \text{ ja } r_n \text{ on ratsionaalarvude jada, mille piirväärtuseks on } r.$$