Funktsioonide käsitlemine

1. Funktsiooni mõiste
1.1. Funktsiooni defineerimise võimalusi

Funktsiooni mõiste võttis matemaatikas kasutusele G.W. Leibniz 17. sajandi lõpul. Koolimatemaatikasse lülitati see mõiste alles 20. sajandi esimesel poolel. Ettepaneku selleks tegi F. Klein. Praeguseks on funktsiooni mõiste koolis üks põhimõistetest, temaga on seotud koolimatemaatika paljud teemad.
Funktsiooni on defineeritud aegade jooksul eesti matemaatikaõpikutes mitmeti. Vaatleme näiteks järgmisi definitsioone.

1. Kui ühe muutuva suuruse igale väärtusele vastab teise muutuva suuruse üks kindel väärtus, siis viimast <u>suurust</u> nimetatakse esimese suuruse funktsiooniks. (IX klass, 1970)
2. Funktsioon on <u>relatsioon</u>, millesse kuuluvate paaride esimesed elemendid on erinevad. (VII klass; 1974) *Selgituseks: relatsiooniks nimetatakse kahe hulga otsekorrutise iga osahulka.*
3. Kui hulga *X* igale elemendile *x* on seatud vastavusse hulga *Y* üks kindel element *y* siis öeldakse, et hulgal *X* on määratud funktsioon. (IX klass, 1986)
4. Funktsiooniks nimetatakse <u>vastavust (eeskirja),</u> mis seab sõltumatu muutuja *x* igale väärtusele hulgast *X* vastavusse sõltuva muutuja *y* ühe kindla väärtuse hulgast *Y*. (XI klass, 2001)

Selgub, et funktsiooni mõistet on käsitletud erinevates klassides (VII – XI), samuti on selle juures kasutatud erinevaid soomõisteid (funktsioon kui muutuv suurus, kui hulk (relatsioon), kui seos (eeskiri, vastavus)).
Erinevaid soomõisteid kasutatakse ka teiste maade matemaatikaõpikutes:

- Funktsiooniks määramispiirkonnaga *D* nimetatakse vastavust, mille korral igale arvule *x* hulgast *D* seatakse vastavusse mingi kindel arv *y* (Kolmogorov 1987, Venemaa)
- Öeldakse, et muutuja *y* on muutuja *x* funktsioon, kui on antud selline seos nende muutujate vahel, mis lubab iga *x* väärtuse jaoks üheselt määrata *y* väärtust (Bashmakov 1991,Venemaa).
- Funktsioon on järjestatud arvupaaride (*x; y*) hulk. Paarides igale *x* väärtusele vastab mingi eeskirja järgi täpselt üks muutuja *y* väärtus (Penttilä-Simolin 1989, Soome)
- Funktsioon $x \to y$ on relatsioon, milles esimese hulga *A* igale elemendile *x* on vastavusse seatud üks kindel element *y* teisest hulgast *B (*Lörcher jt 1987, Saksamaa)
- Funktsioon on ühene vastavus (Lörcher jt 1996, Saksamaa)
- Funktsioon *f* hulgast *A* hulka *B* on eeskiri, millega igale hulga *A* elemendile seatakse vastavusse mingi element hulgast *B (*Kivelä, M niinkuin matematiikka. 1998, Soome*)*

Ka funktsiooni tähised on erinevates õpikutes erinevad. Kasutatakse näiteks järgmisi tähistusi:

- $y = f(x)$
- $f : x \to y$
- $x \xrightarrow{f} y$
- $x \to f(x)$

Meie õpikutes kasutatakse tähistust $y = f(x)$. Tuleb arvestada, et sellel valemil on kaks tähendust:

1) nii kirjutatakse üles funktsioon f kui ka
2) arvutatakse funktsiooni väärtust y kohal x.

1.2. Funktsiooni mõiste kujundamine

Funktsiooni kui koolimatemaatika ühe olulisima mõiste kujundamine vajab erilist tähelepanu. Mõiste kujundamisel eristatakse erinevaid teid.
Geneetiline tee põhineb ideedel, mis pärinevad 17. - 18. sajandist Leibnizi definitsioonist. Sel korral toetutakse järgmistele mõistetele: muutuv arvuline suurus, valem, graafik, tabel; esile tuleb funktsioon kui looduses esineva nähtuse mudel. Sel korral eeldatakse alati, et tegemist on arvfunktsioonidega.
Loogilise tee korral vaadeldakse funktsiooni kui ühest seost kahe hulga vahel. Hulgad ei pea olema arvuhulgad. Võimalikud on veel mitmed erinevad esitusviisid (lisaks eelnevatele arvupaarid, nooldiagrammid, sõnaline esitus jne). Funktsioonid on ka näiteks lüke, pööre, tuletis. Saab tuua elulisi näiteid ühestest vastavustest, näiteks klassipäeviku toojate jaotusest päevade lõikes:

	E	T	K	N	R
Juku	x				
Juta		x			
Mari			x		
Jaan				x	
Kalle					x

Erinevate eluliste näidete ja definitsiooni kaudu peaks saama selgeks et

1) hulga X **igale** elemendile x
2) vastab **üks kindel** element y hulgast Y.

Seega funktsioon on ühene vastavus ehk kujutus.
Oluline on kujundada oskus vastavuse ühesust ära tunda funktsiooni erinevate esitusviiside (graafik, tabel, valem, nooldiagrammid, arvupaarid) korral.
Soovitatav on koolis kasutada geneetilist teed, mis arvestab kõike positiivset loogilisest teest, eeskätt funktsiooni mõiste kujundamise alguses. Hilisemas õpetuses piirdutakse mõlema tee korral vaid arvfunktsioonidega.
Praeguse ainekava kohaselt toimub funktsiooni mõiste kujundamine **induktiivselt**: kõigepealt vaadeldakse näiteid erinevatest ühestest seostest ja seejärel defineeritakse funktsioon.

2. Asend ainekavas

Funktsiooni kui ühe olulisima mõistega tegeldakse VII – XI klassis.
VII kl – (funktsiooni mõiste) võrdeline ja pöördvõrdeline sõltuvus, lineaarfunktsioon
VIII kl – kahe tundmatuga lineaarvõrrandi graafiline lahendamine
IX kl – ruutfunktsioon, ruutvõrrandi(süsteemide) graafiline lahendamine
X kl – ruutvõrratuste, murdvõrratuste graafiline lahendamine, trigonomeetriline funktsioon (KM graafik),
XI kl – funktsiooni mõiste, funktsiooniga seotud mõisted, astmefunktsioon, eksponentfunktsioon, logaritmfunktsioon, trigonomeetrilised funktsioonid, funktsiooni piirväärtus ja tuletis, tuletise rakendusi
XII kl – (integraal – oli kavas 2002. aastani ja on uues õppekavas)

Funktsioonide käsitlemisel võib eristada nelja põhisuunda:
1) funktsiooni mõiste omandamiseks vajalike mõistete süsteemi loomine (funktsioon kui ühene vastavus, määramis- ja muutumispiirkond, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamine ja kahanemine, paarisfunktsioon, paaritu funktsioon, perioodiline funktsioon, pöördfunktsioon jne.)
2) erinevate funktsioonide ja funktsioonide klasside omaduste põhjalik tundmaõppimine
3) algebra seostamine funktsioonidega. Näiteks funktsiooni positiivsuspiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse $f(x) > 0$, viimane kuulub algebra valdkonda. Teiselt poolt võime algebras võrratuse lahendamiseks tugineda vastavate funktsioonide graafikutele.
Algebra ja funktsioonide seostamiseks on alati mitmeid erinevaid võimalusi. Näiteks võrratuse $x^2 < 4$ lahendamisel võime tugineda mitmetele funktsioonidele:

- joonestame samasse teljestikku funktsioonide $y = x^2$ ja $y = 4$ graafikud ning vaatame, milliste x väärtuste korral on esimese funktsiooni väärtus väiksem kui teise funktsiooni väärtus;
- lahendame võrratusega $x^2 < 4$ samaväärse võrratuse $x^2 - 4 < 0$ funktsiooni $y = x^2 - 4$ graafikule tuginedes;
- lahendame võrratusega $x^2 < 4$ samaväärse võrratuse $|x| < 2$, tuginedes funktsioonide $y = |x|$ ja $y = 2$ graafikutele.

4) funktsionaalse mõtlemise kujundamine. Funktsionaalne mõtlemine on mõtlemisviis, mis on omane funktsioonidega ümberkäimiseks konkreetsete (eluliste) ülesannete lahendamisel: et oskaks konkreetses situatsioonis ära tunda funktsionaalse seose selle erinevate esitusviiside (joonis või pilt, tabel, graafik, valem) korral, et oskaks valida mudeliks sobivat funktsiooni, oskaks üle minna ühelt esitusviisilt teisele jne.

3. Funktsioonid põhikoolis

Viimaste ainekavade kohaselt alustatakse põhikoolis konkreetsete funktsionaalsete seoste uurimisega nii, et funktsiooni üldist mõistet ei tunta. Ka praegune ainekava ei näe otseselt ette funktsiooni mõistega tutvumist põhikoolis. Siiski on funktsiooni definitsioon praegu olemas kõigis käibelolevates õpikutes.

Kõiki põhikoolis (VII – IX klassis) vaadeldavaid funktsioone on soovitav käsitleda ühesuguse üldskeemi kohaselt: vaadeldakse paari elulist ülesannet, milles seose saab esitada ühesuguse struktuuriga valemi abil, see seos defineeritakse, seejärel uuritakse antud seose omadusi ja graafikut, sealhulgas graafiku kuju sõltuvalt valemis olevate kordajate väärtustest.

Näiteks **lineaarfunktsiooni korral** (Nurk-Telgmaa õpik) vaadeldakse kahte juhtumit:

a) telegrammi saatmise eest makstav rahasumma $u = 0{,}6v + 20$, kus v on edastatud sõnade arv,
b) võrdhaarse kolmnurga tipunurga β leidmine alusnurga α järgi $\beta = -2\alpha + 180°$.

Võrreldes kahte leitud seost näeme, et need on ühesuguse kujuga, kuigi sisaldavad erinevaid muutujaid ja erinevaid arve. Tähistades mõlemas seoses muutujad tähtedega x ja y ning arvud tähtedega a ja b saame anda nendele seostele ühesuguse kuju: $y = ax + b$.

Nüüd anname sellele seosele nimetuse: Kui muutujad x ja y on omavahel seotud valemiga $y = ax + b$, kus a ja b on antud arvud ja $a \neq 0$, siis öeldakse, et nad on lineaarses seoses ehk see valem esitab lineaarfunktsiooni.

Seejärel asutakse uurima funktsiooni $y = ax + b$ graafikut, võrdlema seda võrdelise sõltuvuse $y = ax$ graafikuga. Joonestades samasse teljestikku näiteks funktsioonide $y = 2x$, $y = 2x – 1$ ja $y = 2x + 3$ graafikud saab selgeks vabaliikme b tähendus. Analoogiliselt saab uurida ka graafikuid konstantse b korral a väärtusi muutes. Mõistlik on uurimiseks kasutada arvuti abi. Kuid õpilased peavad ka ise mitmeid graafikuid joonestama.

Iga funktsioonide klassi korral omandaksid **PK õpilased järgmised oskused**:

- arvutada antud x jaoks vastavat y väärtust valemi abil
- arvutada antud y jaoks vastavat x väärtust valemi abil
- leida graafikult antud x jaoks vastavat y väärtust
- leida graafikult antud y jaoks vastavat x väärtust
- valemi järgi kirjeldada vastava graafiku kuju ja asendit, samuti skitseerida vastavat graafikut
- graafiku põhjal määrata seose liiki, lihtsamatel juhtudel koostada vastavat valemit
- teada arvuliste kordajate tähendust valemis
- koostada reaalse situatsiooni põhjal nähtust kirjeldavat valemit

- skitseerida reaalset situatsiooni kirjeldava funktsiooni graafikut, valides telgede sobivad tähistused, ühiklõigu sobiva pikkuse joonisel.

Reaalse situatsiooniga seotud ülesannete kaudu tuleb õpetada õpilasi mõistma, kuidas muutuvad suurused vaadeldavas protsessis käituvad, ja selle kaudu harjutada õpilasi õiget funktsiooni valima. Näiteks vaatleme järgmisi suurusi:

- haamri varre pikkus ja jõud, millega naela pihta lüüa
- tööliste arv ja töö lõpetamiseks kuluv aeg
- ostetud markide arv ja nende eest makstav rahasumma
- auto kiirus ja kindlas ajavahemikus läbitava tee pikkus

jne

Võib õpilastel lasta neid suurusi kasutades täiendada lauseid:
Mida suurem ………, seda väiksem ……… .
Mida väiksem ………, seda suurem ……… .
Põhikoolis õpitud elementaarfunktsioonid leiavad ulatuslikku kasutust igapäevases elus mitmete situatsioonide modelleerimisel. Seetõttu on väga oluline funktsioonide puht matemaatilise käsitluse kõrval pöörata tähelepanu ka rakendustele.
Graafikute joonestamisel tuleb alati silmas pidada vastava funktsiooni määramispiirkonda. Näiteks telegrammi eest makstava rahasumma näites saab x omandada vaid naturaalarvulisi väärtusi alates 1-st, seega vastav graafik koosneb eraldiseisvatest punktidest, mis ei moodusta pidevat joont.
Ülesandes „*Lennuk lendab 10 km kõrgusel, kui ta alustab laskumist. Iga 10 minutiga väheneb lennuki kõrgus maast 1 km võrra. Esita seos lennukõrguse ja aja vahel ning kujuta seda graafiliselt.*" on x puhul tegemist küll pideva suurusega, kuid määramispiirkond tuleb kindlasti leida ja graafik joonestada vaid selles piirkonnas.

Lisalugemist

Veelmaa, Funktsioonide õpetamisest põhikooli matemaatikakursuses
http://oppekava.innove.ee/wp-content/uploads/sites/6/2016/09/Funktsioonid_allar_veelmaa.pdf

4. Funktsioonid X – XII klassis

4.1. Käsitluse üldine skeem

Põhirõhk funktsioonide käsitlemisel on XI klassis. Kõigepealt tuleks korrata põhikoolis õpitud funktsioone. Seejärel saab mitmetele erinevatele näidetele tuginedes jõuda funktsiooni üldise mõisteni. Edasi tutvutakse suure hulga mõistetega, mille abil kirjeldatakse funktsioonide omadusi: määramispiirkond, muutumispiirkond, nullkohad, positiivsuspiirkond, negatiivsuspiirkond kasvamisvahemikud, kahanemisvahemikud, ekstreemumid, paarisfunktsioon, paaritu funktsioon, perioodiline funktsioon, (LM - pöördfunktsioon, liitfunktsioon).
Lisanduvad uued funktsioonid: astmefunktsioon, eksponentfunktsioon, logaritmfunktsioon, siinusfunktsioon, koosinusfunktsioon ja tangensfunktsioon.
Kui enamiku funktsioonide definitsioonid on erinevates õpikutes sisuliselt ühesugused, siis astmefunktsiooni definitsioonis on erinevusi:
M. Miinus: $y = ax^n$, n täpsustamata, õpikus vaadeldakse juhtusid, kus n on naturaalarv, täisarv ja ratsionaalarv
Tõnso-Veelmaa: $y = x^n, \quad n \neq 0, \quad n \in Z$
Lepmann-Velsker: $y = x^a, \quad a \in R$
Jürimäe-Velskeri koolimatemaatika käsiraamat: $y = x^n, \quad n \in N$.
Üldiselt defineeritakse matemaatilises analüüsis astmefunktsioon kujul $y = x^a$, kus a võib olla mistahes konstant, ka kompleksarvuline.

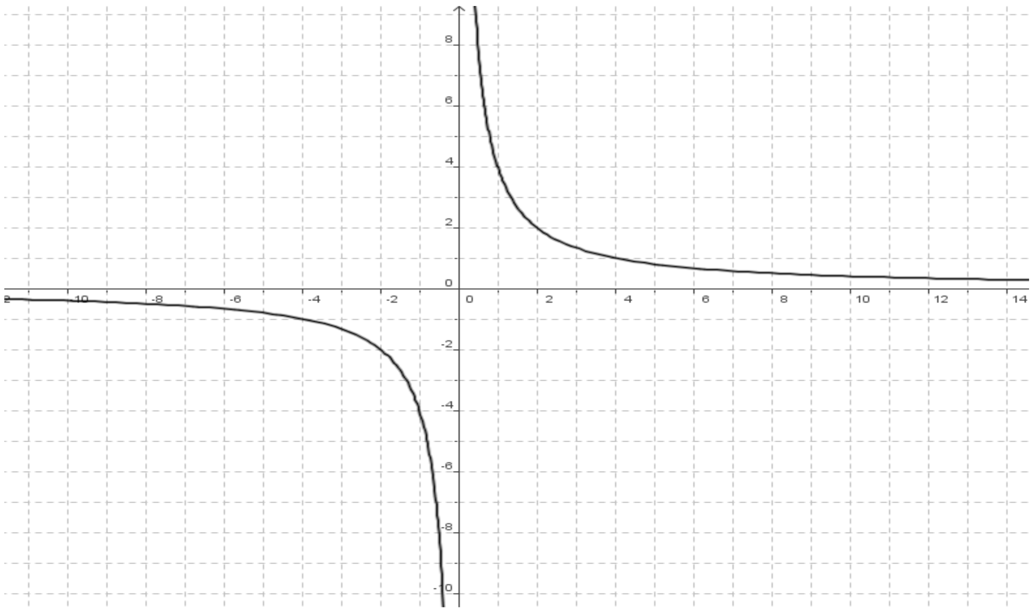
Funktsioonide uurimine XI klassis toimub kahes kontsentris.
Esimeses kontsentris uuritakse funktsioone analoogiliselt põhikooli kasutatud skeemiga: jõutakse valemini, selle põhjal skitseeritakse graafik ja graafikult loetakse välja omadused. Selliselt toimitakse kõigi nimetatud uute funktsioonide õppimisel. Kuid nüüd peavad õpilased oskama kirjeldada graafiku abil funktsioonide omadusi põhjalikumalt, kasutades sellekohast terminoloogiat. Õpilane peaks oskama

- üle minna funktsiooni ühelt esitusviisilt teisele
- skitseerida kõigi õpitud funktsioonide graafikuid
- graafikule tuginedes kirjeldada õpitud funktsioonide omadusi
- võrrelda omavahel erinevate funktsioonide omadusi (näiteks funktsioonid $y = x^2$ ja $y = 2^x$)
- mistahes funktsiooni graafiku põhjal kirjeldada funktsiooni omadusi.

Teises kontsentris toimub selliste funktsioonide uurimine, mille graafikut esmapilgul skitseerida ei oska. Uurimine toimub analüütiliselt tuletist kasutades. Uurimise tulemusena skitseeritakse graafik.

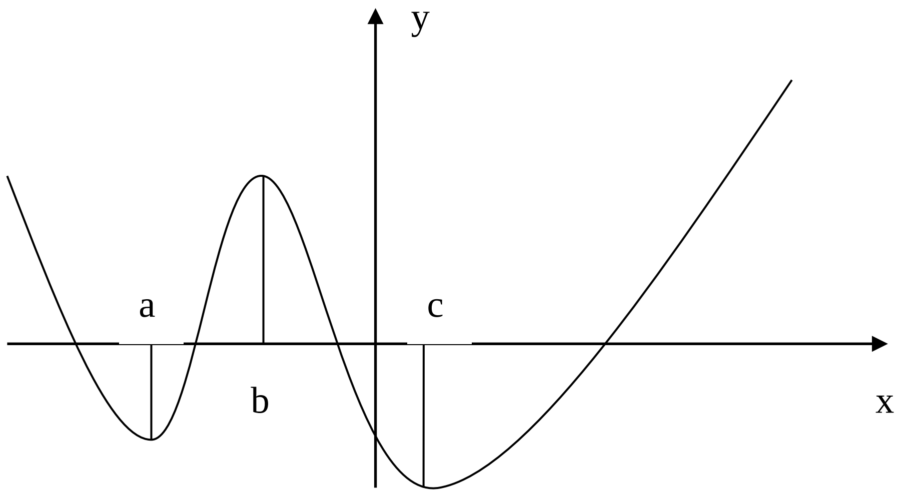
4.2. Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Piirväärtuse mõiste on üks keerukamatest mõistetest koolimatemaatikas. Siin puutub õpilane kokku lõpmatute protsessidega. Igasugust protsessi võib iseloomustada selle järgi, kas selle lõpp asub protsessi sees või väljaspool. Näiteks arvu 10 jagamisel arvuga 8 jagamine lõpeb ja tulemus on 1,25. See jagamine on lõplik protsess. Kirjalik jagamine 1 : 3 on aga lõpmatu protsess, sest tulemust 0,(3) selle protsessi käigus kätte ei saa. Protsessi lõpp asub väljaspool protsessi.
Lõpmatuse korral eristatakse potentsiaalset ja aktuaalset lõpmatust.
Näiteks võime naturaalarve loendada: 0, 1, 2, 3, 4, … ja seejuures mõelda, et niiviisi võime lõputult jätkata. Sel juhul ei ole loendamise protsessil lõppu, kogu aeg on võimalik protsessi veel jätkata. Sõna „lõpmatu“ tähendab siin vaid võimalust alati edasi minna. Selliseid jätkuvaid lõpmatuid protsesse nimetatakse **potentsiaalselt lõpmatuteks**. Mõiste „**aktuaalselt lõpmatu“** lähtub sellest, et mingi lõpmatu hulk on antud kõigi oma elementidega kui üks tervik, sõltumatult selle hulga tekkimise protsessist. Näiteks võime selliselt mõelda ka naturaalarvude hulgast ja mõista selle all potentsiaalselt lõplikku hulka, kus loendamine on lõppenud. Potentsiaalset lõpmatust on kergem ette kujutada kui kõrgema abstraktsiooni tulemusena saadud aktuaalset lõpmatust.
Lõpmatuse mõiste kujundamine algabki potentsiaalse lõpmatuse kaudu: mingit protsessi jätkame lõputult. Võib alustada arvjada piirväärtusega, kus piirprotsessi saab näitlikult erinevatel viisidel esitada (liikmete loetelu, arvkiirel kujutamine) ja sealt minna funktsiooni piirväärtuse juurde. Sel juhul vaatleme kahte jada: argumendi väärtuste jada ja sellele vastavat funktsiooni väärtuste jada. Konkreetseid funktsioone vaadeldes näeme, et ükskõik kuidas argumendi väärtuste jada mingi koha a ümbruses valida, lähenevad vastavad funktsiooni väärtused alati ühele ja samale väärtusele, mida nimetataksegi funktsiooni piirväärtuseks kohal a:
Arvu A nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ piirväärtuseks kohal a, kui igale argumendi väärtuste jadale, mille piirväärtuseks on a, vastab funktsiooni väärtuste jada, mille piirväärtuseks on A.
Eraldi tuleb defineerida lõpmatu piirväärtus.
Funktsiooni piirväärtus kohal a on ∞ (lõpmatus), kui iga argumendi väärtuste jada korral, mille piirväärtus on a, osutub vastav funktsiooni väärtuste jada tõkestamatult kasvavaks: kui $x \to a$, siis $f(x) \to \infty$.
Sellise käsitluse korral saab funktsiooni pidevuse defineerida piirväärtuse kaudu. Kindlasti tuleb piirväärtuse korral toetuda ka funktsiooni graafikutele. Võib skitseerida erinevaid graafikuid ja nende jaoks välja kirjutada erinevaid piirväärtusi. Näiteks võib järgneva joonise põhjal leida
$\lim_{x\to\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to 0} f(x)$; $\lim_{x\to 1} f(x)$; $\lim_{x\to -2} f(x)$ jne.



4.3. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine

Funktsiooni kasvamise (analoogiliselt kahanemise) kirjeldamiseks kasutatakse eesti keeles kahte terminit: kasvamisvahemik ja kasvamispiirkond.
Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse kasvavaks vahemikus $(a;\ b)$, kui selles vahemikus argumendi väärtuste suurenedes ka funktsiooni väärtused suurenevad ehk kui iga x_1 ja x_2 korral vahemikust $(a;\ b)$ kehtib seos: kui $x_1 < x_2$, siis ka $f(x_1) < f(x_2)$. Maksimaalse pikkusega vahemikku, milles funktsioon kasvab, nimetatakse funktsiooni kasvamisvahemikuks.
Mõnikord nimetatakse kasvamisvahemikke ka kasvamispiirkondadeks (vt Tõnso XI kl).
Mõnikord nimetatakse kasvamispiirkonnaks aga kasvamisvahemike ühendit. Seda mõistet kasutatakse eeskätt juhul, kui funktsioonil on mitu kasvamisvahemikku.
Tuleb arvestada, et viimase käsitluse korral ei saa kasvamispiirkonda vaadelda kui ühte piirkonna alaliiki (lõike, poollõike, vahemikke ja poolsirgeid nimetatakse ühise nimega piirkondadeks).
Kui piirkonnana mõista ka piirkondade ühendit ja võtta x_1 ning x_2 erinevatest vahemikest, siis ei pruugi vahemikus kasvamise tingimus $f(x_1) < f(x_2)$ olla alati rahuldatud.
Seetõttu on soovitav funktsiooni uurimisel iga kasvamisvahemik eraldi välja tuua. Näiteks järgmisel joonisel oleva funktsiooni korral $X_1 \uparrow = (a;b)$; $X_2 \uparrow = (c;\infty)$.



Funktsiooni uurimise korral tuleb tagada vaadeldavate mõistete sisuline omandatus, mitte ainult tehniliste oskuste tase. Õpilased peaksid tuletise mõiste korral oskama interpreteerida geomeetriliselt, mida tähendavad funktsiooni jaoks näiteks tingimused $f'(x)=0,\quad f'(1)>0$ jne. Nende seoste sisu saab selgitada nii hetkkiirusele tuginedes, graafiku puutuja ja tuletise vahelisele seosele tuginedes, kuid ka funktsiooni graafikule (kasvamisele-kahanemisele) tuginedes. Õpilasteni tuleb viia mõisted *suuruse muutumine* ja *suuruse muutumise muutumine*, koos sellega arusaamine, et kuigi suurus ise antud ajahetkel kasvab, võib kasvamise kiirus kahaneda.

Seoses muutumisega on vaatluse all suuruse absoluutne muut mingis ajavahemikus, keskmine muut ja muut ajahetkel (vt järgnev tabel).

Absoluutne muutumine ajavahemikus $(x_0;\ x_0+\Delta x)$ $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$	Keskmine muutumine vahemikus $(x_0;\ x_0+\Delta x)$ $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$	Muutumine ajahetkel x_0 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
Kui palju konkreetselt suurus muutub selles ajavahemikus $(x_0;\ x_0+\Delta x)$	Kui palju muutub suurus keskmiselt igas ajaühikus selle ajavahemiku jooksul	Milline on suuruse muutumise kiirus ajahetkel x_0

Samuti on oluline, et õpilased oskaksid õpitud matemaatilisi mõisteid (suuruse muutumine, kasvamine, kahanemine, ekstreemumid, käänukohad) õigesti rakendada igapäevaelus.

Küsimusi ja ülesandeid

1. Kommenteerige järgmist funktsiooni definitsiooni: *Reeglit, mille järgi sõltumatu muutuja väärtustele vastavad vaadeldava sõltuva muutuja väärtused, nimetatakse funktsiooniks*.
2. Kuidas defineeris G. W. Leibniz funktsiooni (vt Miinuse XI klassi õpik)?
3. Tooge vähemalt 3 näidet ühestest vastavustest igapäevases elus, mida saab kasutada funktsiooni mõiste kujundamisel.
4. Milline tähendus on lineaarfunktsiooni valemis $y = ax + b$ kordajatel a ja b; ruutfunktsiooni valemis $y = ax^2 + bx + c$ kordajatel a ja c?
5. Leidke funktsiooni $y = -x + 3$ pöördfunktsioon. Tooge veel näiteid sellise omadusega funktsioonidest. Milliseid tingimusi peab rahuldama funktsioon, et selle pöördfunktsioonil oleks sama omadus?
6. Millistel tingimustel nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ pidevaks kohal a? Võrrelge erinevaid õpikuid.
7. Tooge näiteid funktsioonidest, millel antud kohal piirväärtus puudub.
8. Mida mõistetakse funktsiooni kasvamisvahemiku ja kasvamispiirkonna all erinevates õpikutes? Selleks tutvuge Tõnso, Miinuse ja Lepmanni XI kl õpikute vastavate paragrahvidega.
9. Mis on ekstreemumkoht, ekstreemumpunkt, ekstreemum?

Lisalugemist

Hannes Jukk, Funktsioonid ja graafikud on huvitavad, Koolimatemaatika XXX
http://matdid.edu.ee/joomla/images/materjalid/artiklid/opiprotmeetodid/km30_jukk.pdf
Hele Kiisel (HTG matemaatika õpetaja-metoodik), Funktsioonidest, Gümn valdkonnaraamat
http://www.oppekava.ee/images/f/f1/Funktsioonidest_hele_kiisel.pdf
Allar Veelmaa (Loo Gümnaasiumi matemaatika õpetaja-metoodik), Funktsioonide õpetamisest IKT vahendite abil, Gümnaasiumi valdkonnaraamatus
http://oppekava.innove.ee/wp-content/uploads/sites/6/2016/09/Funktsioonid_IKT_abil.pdf