

Võrratuse mõiste

- Kui kahe arvu või muu avaldise vahele kirjutada üks märkidest $<$, $>$, \leq või \geq siis saadakse võrratus.
- Võrratusi võib liigitada mitmeti. Kui võrratuses on üks märkidest $<$ või $>$, on tegemist **range** võrratusega.
- Kui võrratuses on märk \leq või \geq , on tegemist **mitterange** võrratusega. Mitterange võrratus $a \leq b$ tähendab, et a ei ole suurem kui b :
$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$
- Õpilastega on tarvis põhjalikult läbi arutada, millal on viimane lause tõene (Kas $0 \geq 0$ on tõene võrratus?).

Võrratuse mõiste

- Võrratusi võib jaotada ka **arvvõrratusteks** ja **muutujaid sisaldavateks võrratusteks**.
- Võrratust, mis saadakse mitme samapidise märgiga võrratuse ühendamisel, nimetatakse **ahelvõrratuseks**.
- Näiteks ahelvõrratus $a < b < c$ tähendab, et $a < b$ & $b < c$ ja seega ka $a < c$.
- Sellistes ahelvõrratuses paigutatakse kõige väiksem arv vasakule.
- Ahelvõrratuse tuleks kujutada ka arvteljel. Nii saame piltlikult veenduda kas
 - vastavate punktide on hulk sidus (mille iga kahte punkti saab ühendada sellesse hulka kuuluva joonega)
 - ahelvõrratus üldse määrab mingi piirkonna (näiteks ahelvõrratus $3 < a < 2$).
- Mida tähendab ahelvõrratus $2 < x > 3$?

Asend ainekavas

- Võrratuste asend erinevates ainekavades on muutunud rohkem kui paljude teiste teemade asend.
- 1996. aasta ainekavaga viidi temaatika põhikoolist X klassi ja selle mahtu vähendati.
- 2002. aasta ainekava kohaselt tuleb lineaarvõrratusi käsitleda taas põhikoolis. Õpikutes oli võrratuste temaatika esitatud järgmiselt:
 - VII kl - võrratuse mõiste, lineaarvõrratus, võrratuse põhiomadused
 - X kl - lineaarvõrratusesüsteemid, ruutvõrratus, murdvõrratus
 - XI kl - lihtsamad eksponent- ja logaritmvõrratused
- 2011. a ainekava järgi jälle kogu võrratuste temaatika gümnaasiumis.
 - X kl - lineaarvõrratus + lineaarvõrratusesüsteem, ruutvõrratus, murdvõrratus (L), intervallmeetod (L) , *absoluutväärtusega võrratus
 - XI kl - lihtsamad eksponent- ja logaritmvõrratused, trigonomeetrilised võrratused

Võrratuste lahendamise üldine meetoodika

- Võrratuste lahendamist saab paljuski siduda vastavate võrrandite lahendamisega. See kätkeb endas ka ohtu: võib toimuda võrrandite lahendamise võtete vale ülekanne võrratustele. Seetõttu on äärmiselt oluline, et võrrandite ja võrratuste lahendamise ühiste joonte kõrval **uuritaks hoolikalt ka erinevusi**.
- Võrratuste korral piirduakse üldjuhul lihtsamate ülesannetega kui võrrandite korral, sest lahendamine on siin üldjuhul keerukam kui vastavate võrrandite korral.
- Miks see siis raskem on?
 - Tavaliselt eeldab võrratuse $f(x) < g(x)$ lahendamine pöördumist ka vastava **võrrandi** $f(x) = g(x)$ juurde, mõnikord ka **funktsioonide** $f(x)$ ja $g(x)$ omaduste juurde ning sealt tagasi võrratuse $f(x) < g(x)$ juurde.
 - Võrratuste lahendamise juures etendab tähtsat osa **graafiline esitus** (lahendite piirkonnad, vastavate funktsioonide graafikud). Seega on võrratuste lahendamiseks tarvis tunda matemaatika erinevaid valdkondi ja osata neid seostada.

Võrratuste lahendamise üldine metoodika

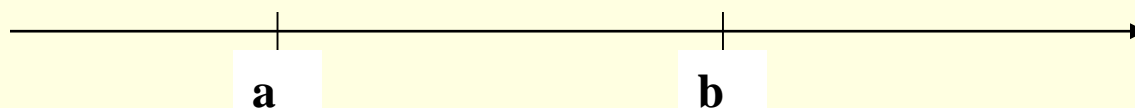
Võrratuse omadused

- Võrratuste lahendamiseks tuleb kõigepealt selgeks teha, millised on need **teisendused, mille tulemusena jääb võrratus eelmisega samaväärseks**. Kuidas kontrollida?
- Kuna võrratusel on reeglina lõpmata palju lahendeid, ei tule siin lahendite kontrollimine kõne alla. Seepärast on väga oluline, et võrratuste samaväärsust säilitavad tingimused oleksid hästi selged.
- Võrratuste samasusteisendustega (põhiomadustega) tutvutakse arvõrratuste abil ja saadud omadused kantakse üle ka muutujaid sisaldavatele võrratustele.
- Kasulik on lähtuda **võrduse** omadustest ja vaadelda, millised neist kehtivad ka võrratuste korral (võrrandi pooli võib vahetada – kas ka võrratuse pooli?)

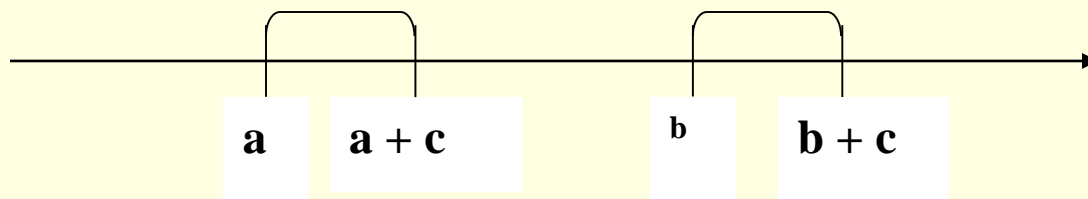
Võrratuste lahendamise üldine metoodika

Võrratuse omadused

- Võrratuse omadusi on otstarbekas kujutada ka arvteljel.



- Jooniselt näeme, et $a < b$ ning et $b > a$, seega võime öelda, et võrratuse poolte vahetamisel muutub võrratuse märk vastupidiseks. Antud omaduse kehtivus tuleneb sellest, et reaalarvude hulk on järjestatud.
- Kui liita võrratuse mõlemale poolele üks ja sama arv? Ka seda võib uurida esmalt konkreetsete arvudega (esmalt liita positiivne arv, seejärel negatiivne arv). Ka antud operatsiooni tuleks illustreerida arvteljel:



Võrratuste lahendamise üldine metoodika

Võrratuse omadused

- X klassis võiks tutvustada järgmisi võrratuse omadusi:
 1. Kui $a < b$, siis $b > a$.
 2. Kui $a < b$ ja $b < c$, siis $a < c$ (transitiivsus)
 3. Kui $a < b$, siis $a+m < b+m$, kus $m \in R$
 4. Kui $a < b$, siis $ma < mb$, kui $m > 0$.
 5. Kui $a < b$, siis $ma > mb$, kui $m < 0$.
 6. Kui $a < b$ ja $c < d$, siis $a+c < b+d$
 7. Kui $a < b$ ja $c < d$ ning a, b, c ja d on positiivsed, siis $ac < bd$
 8. Kui $a < b$, $a > 0$, $b > 0$, siis $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Võrratuste lahendamise üldine meetodika

Võrratuse omadused

- Vastavad omadused on võimalik ka tõestada võrduse omadustele tuginedes. Mõnel juhul oleks seda ka mõistlik teha.

- Tõestame näiteks omaduse 6:

Kui $a < b$ ja $c < d$, siis $a+c < b+d$.

Kui $a < b$, siis leidub kindlasti selline $m > 0$, et $a + m = b$. Samuti leidub selline positiivne arv n , et $c + n = d$. Nende kahe võrduse liitmisel saame, et $a + m + c + n = b + d$ ehk $a + c + (m + n) = b + d$. Et $m + n$ on positiivne, saamegi, et $a+c < b+d$.

- Enamiku võrratuste lahendamisel tuginemegi eeskätt vaadeldud samasusteisendustele: sellega asendame võrratuse samaväärse, kuid lihtsama võrratusega kuni jõuame võrratuseni, mille lahendid on lihtsasti leitavad.
- Kindlasti tuleb arutleda selle üle, **mis juhtub, kui võrratuse pooli korrutada muutujat sisaldava avaldisega**. Ja analoogiline küsimus sellest, kui mõlemale poole liita muutujat sisaldav avaldis.

Võrratuste lahendamise üldine metoodika

- Kohe juhtida tähelepanu sellele, et võrratusel erinevalt võrrandist on tavaliselt **lahendeid lõpmata palju**.
- Iga õpilane peaks võrratusi lahendades suutma visuaalselt ette kujutada, kus paikneb arvkiirel lahendihulk
(näiteks lahendid $x > 3$).
- Võrratuste lahendamine nõuab tihti rohkem analüüsi ja iseseisvat mõtlemist kui võrrandi lahendamine. Kuigi väliselt võivad võrratused omada küllalt ühesugust kuju, on lahenduste erinevad.
- Seetõttu on kasulik küllalt ühesuguse kujuga võrratusi kõrvutada ja arutleda, mille poolest nende lahendamine on sarnane, milles on erinevused (võrreldes näiteks järgnevas slaidis samas reas olevaid paare):

Võrratuste lahendamise üldine meetodika

- Vormilt sarnased, kuid sisult erinevad võrratuste paarid.

$$(x - 2)(2x + 1) > 0$$

$$(x - 2)(2x + 1) > 0$$

$$(x - 2)(2x + 1) > 0$$

$$(x - 2)(2x + 1) > 0$$

$$\frac{x - 2}{2x + 1} > 0$$

$$\frac{x - 2}{2x + 1} > 0$$

$$\frac{x - 2}{2x + 1} > 0$$

$$\frac{2}{2x + 1} > 0$$

$$(x - 2)(2x + 1) > 1$$

$$(2 - x)(2x + 1) > 0$$

$$(x - 2)(2x + 1) \geq 0$$

$$\frac{x - 2}{2x + 1} > 0$$

$$\frac{x - 2}{2x + 1} \geq 0$$

$$\frac{x - 2}{2x + 1} > 1$$

$$\frac{2}{2x + 1} > 0$$

$$\frac{2x + 1}{2} > 0$$

Lineaarvõrratused ja vastavad süsteemid

- Lineaarvõrratuse lahendamine toimub võrratuse põhiomadustele 1, 3, 4 ja 5 tuginedes ja õpilastele erilisi raskusi ei valmista. Kõige rohkem eksitakse sellega, et võrratuse poolte jagamisel negatiivse arvuga jäetakse võrratuse märk muutmata.
- Juba lineaarvõrratuste puhul tuleb näidata, et sama võrratuse lahendamiseks on erinevaid teid. Vaatleme näiteks võrratust $(x+1):6>0$.

Selle lahendamisel võime ???:

- uurida, mis tingimustel saab kahe arvu jagatis olla positiivne, arvestame, et üks liikmetest on positiivne
- Vaadelda jagatise asemel korrutist: millal see positiivne
- Vaadelda jagatise asemel korrutist, vasakul pool avada sulud ja edasi võrratuse põhiomadusi rakendada.
- Kindlasti vajavad sarnaselt lineaarvõrranditega omaette analüüsi need erijuhud, kus teisendamise käigus muutujat sisaldavad liikmed koonduvad ja alles jääb arv võrratus (näiteks võrratus $2x + 3 > 2(x - 1)$).

Lineaarvõrratused ja vastavad süsteemid

- Lineaarvõrratuste kui esimeste võrratuste korral peaks iga ülesande korral kujutama lahendeid arvteljel, see loob vajaliku pinnase lineaarvõrratustesüsteemide lahendamiseks. Viimaste puhul on aga joonis hädavajalik.
- Selgeks peaks tegema ka selle, kuidas tähistatakse ja kujutatakse joonisel reaalarvude hulga erinevaid piirkondi (vahemik, poollõik, lõik).
- Õpikutes on kasutusel erinev sümboolika: Tõnso-Veelmaa õpikus on vahemiku tähis $]a; b[$, teistes õpikutes $(a; b)$. Põhikoolis võib piirduda üleskirjutamisega võrratusmärkide abil.
- Võrratuse lahendite kirjapanek võib toimuda väga erinevalt:
 - kas $x > 2$ või
 - $2 < x < \infty$ või
 - $x \in (2; \infty)$ või
 - $L = \{x | 2 < x < \infty\}$ jt

Lineaarvõrratused ja vastavad süsteemid

- Süsteemid ja arvsirge kasutamine. Siin tekitab vastuse kirjapanek probleeme. Ühend ja ühisosa. Sõnad ja, või. Kasulik erinevate võrratuste lahendipiirkondade läbi kriipsutamine vastupidi kaldega joontega, siis ühisosa hästi märgatav.

$$\begin{cases} x < 3 \\ x > 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3 \\ x < 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 8 \\ x > 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 8 \\ x > 2 \end{cases}$$

- Siin huvitav ja kasulik vaadata ka varianti, kus süsteem annab

lahendiks vaid ühe arvu. $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 3 \end{cases}$

- Ehk võiks tähelepanu juhtida ka sellele, et võrrandisüsteemide lahendusvõtted pole võrratuste süsteemidele üle kantavad.

- Liitmisvõte $\begin{cases} 2x - 5 < 8 \\ x + 2 < 3 \end{cases}$

- Asendusvõte ???

Ruutvõrratused. Lahendamine graafiliselt

- Ka ruutvõrratuste lahendamiseks on erinevaid võimalusi. Kõige sagedamini kasutatakse **graafilist võtet**, mis tugineb ruutfunktsiooni graafikule.
- kõigepealt põhjalikult korrata ruutfunktsiooni graafikut ja uurida graafikute erinevaid asendeid lähtuvalt ruutliikme kordajast ja diskriminandist. Ka peab eelnevalt selge olema, kuidas lugeda jooniselt ruutfunktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkonda.
- Arvestada tuleb, **et põhikoolis ruutfunktsiooni käsitledes neid mõisteid ei vaadelda.**
- Enne võrratuste juurde minekut võikski lihtsalt skitseerida erinevaid paraboolseid ja sealt nullkohti, positiivsus- ja negatiivsuspiirkondi välja lugeda.
- Nende piirkondade märkimisel on soovitatav läbi kriipsutada **vaid telje** vastav piirkond, mitte tasandi osa.
- kasuks tuleb see, kui piisavalt paljudel kordadel näidatakse joonega otse graafikul argumente ja neile vastavaid funktsiooni väärtusi.

Ruutvõrratused. Lahendamine graafiliselt

- Ruutvõrratuse lahendamisel graafilise võttega selgitatakse, et võrratuse $ax^2+bx+c < 0$ lahendamine tähendab sisuliselt selle leidmist, milliste x väärtuste korral on funktsiooni $y = ax^2+bx+c$ väärtused negatiivsed. Seda saame leida jooniselt, kuhu on kantud antud funktsiooni graafik. Graafiku skitseerimiseks on vaja teada funktsiooni nullkohti ja need leiame kui võrrandi $ax^2+bx+c = 0$ lahendid.
- Probleeme ja segadust tekitab paljudes õpilastes ka võrratuse mõlema poole korrutamine negatiivse arvuga, et muuta positiivseks ruutliikme kordaja. Võrratuse $-x^2+4x-3 > 0$ võib ju lahendada
 - nõ otse
 - kui ka -1 -ga pooli korrutades
- Esimesel juhul kasutame alla avanevat parabooli
- Teisel juhul on probleemiks see, et õpilane ei mõista, et uue saadud võrratuse lahend on esialgse võrrandi lahend. Ei osata mis piirkonda ja millisel parabooli korral otsida. Kumba teed eelistada?

Ruutvõrratused. Lahendamine graafiliselt

- Kui on teatud hulk ruutvõrratuse graafiliselt lahendatud, võiksid õpilased teha kokkuvõtliku tabeli, kus on kõik võimalused parabooli asenditega ja vastavate võrratuste lahendid kirja pandud.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$	Joonis, võrratuste $ax^2+bx+c < 0$ $ax^2+bx+c < 0$ graafiline lahendus Ka mitterange võrratus		
$a < 0$			

Ruutvõrratused. Lahendamine graafiliselt

- Antud tabel võiks olla eeskujuks ka ülesannete valikul. Tuleb jälgida, et ei keskendutaks vaid tüüpjuhule ($a > 0$, $D > 0$), vaid vaadeldaks piisaval arvul ka teisi juhtusid.
- Väga olulised on ka juhud, kus lahendid puuduvad, kus lahendiks on kogu reaalarvude hulk, üksainus arv. Millal võiks selliste juhtumite juurde asuda???
- Vältimaks iseseisva mõtlemise täielikku taandumist algoritmilise tegevuse ees, tasuks teha ka selliseid ülesandeid kus võrratuse lahend peast leitav:

$$x^2 + 1 < 0; \quad x^2 + x + 57 > 0; \quad \frac{2}{x^2 + 8} < 0; \quad -x^2 - 51 < 0$$

Ruutvõrratused. Teisi lahendusvõtteid

- Ruutvõrratuste lahendamiseks võib kasutada ka **algebra list võtet**. Kuidas sellisel juhul toimitakse?

- $(x - 3)(x + 2) < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} x - 3 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x - 3 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{array} \right.$

- Sel juhul ruutkolmeliige tegurdatakse ning korrutise positiivsuse (negatiivsuse) tingimused esitatakse võrratusesüsteemide abil.
- Millised on head ja halvad küljed nendel lahendusvariantidel?
- Kolmas võimalus ruutvõrratuse lahendamiseks on **intervallmeetod**. Ainekavas (2011) on intervallmeetodi tutvustamine ette nähtud laias kursuses. See on lihtne ja universaalne meetod paljude võrratuste lahendamiseks.

Ruutvõrratused. Teisi lahendusvõtteid

- Kui seda meetodit tutvustada, siis tuleb seda teha mitteformaalselt ja selgitada, millele vastav abijoonis tugineb (vt Lepmann-Velskeri X klassi õpikust ülesandeid 505-506).
- Meie koolides läbiviidud test näitas, et kõige vähem eksivad õpilased intervallmeetodiga ruutvõrratust lahendades, kõige rohkem vigu tekib algebralist meetodit kasutades.
- Põhiliselt eksitakse vastavate võrratusesüsteemide koostamisel (tavaliselt jäetakse üks süsteem kirjutamata) ja ka kahe süsteemi põhjal ülesandele lõppvastuse leidmisel.
- Graafilise meetodi korral on põhieksimused parabooli visandamisel ja vastuse leidmisel jooniselt. Näiteks kui vastavat ruutvõrrandit lahendades saadakse, et võrrandil lahendid puuduvad, järeldatakse, et ka ruutvõrratusel lahendid puuduvad.
- Mittetäielikke ruutvõrratusi lahendatakse täielikest märgatavalt halvemini ($4x^2 > 0$).
- Milline vaadeldud meetoditest sisaldab kõige suuremat ohtu selleks, et võrratuste lahendamine omandatakse formaalse reeglistikuna?

Murdvõrratused

- Murdvõrratuseks nimetatakse võrratust, mis sisaldab muutujat murru nimetajas. Murdvõrratuste korral võetakse vaatluse alla eeskätt murdlineaarsed võrratused.
- Kuna kahe arvu korrutis ja jagatis on positiivsed (negatiivsed) samadel tingimustel, võime võrratuse

$$\frac{a}{b} > 0$$

lahendamise asendada võrratuse $ab > 0$ lahendamisega.

- Mitterange võrratuse korral tuleb arvestada, et nimetaja ei tohi võrduda nulliga:

$$\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

Murdvõrratused

- Ka murdvõrratuste lahendamisel on võimalik kasutada kõiki kolme meetodit, mida vaatlesime ruutvõrratuste juures.
- Kuigi ka nüüd osutub kõige rohkem vigu kaasatoovaks algebraline võtte, ei tohiks siiski sellest võttest päriselt mööda minna ei ruutvõrratuse ega ka murdvõrratuse juures. Teadmist kahe arvu korrutise ja jagatise positiivsuse (negatiivsuse) kohta on vaja rakendada mujalgi, näiteks võrratust $x \cdot \ln x > 0$ lahendades.
- Murdvõrratuste korral osutuvad kõige raskemaks võrratused, mille paremal pool on nullist erinev arv, näiteks võrratus
$$\frac{2x - 7}{x + 1} \leq 1$$
- Millised on tüüpilised eksimused? Ehk alustadagi sellistega?
- Võrratuse paremal pool olevat arvu käsitletakse nagu arvu 0.
- Nimetaja nullkoht kipub jääma lahendi piirkonda.

Murdvõrratused, erijuhud

- Tähelepanu tuleks juhtida ka erijuhtudele, mida saab lahendada ilma “suurt kahurvärki” kasutamata:

$$\frac{2x-1}{x^2+5} > 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x+1} < 0$$

$$\frac{x^2+2x+100}{5x} < 0$$

$$\frac{7}{x+2} > 0$$

$$\frac{|x-2|}{x+1} > 0$$

$$\frac{x^2+4}{|x-5|} < 0$$

Võrratuste lahendusoskus

	Eesti	Vene	Ee tava	Ve tava	Ee eri	Ve eri
Lin $a > 0$	69	97	62	95	95	97
Lin $a < 0$	55	63	53	60	77	93
Murd $pp = 0$	46	66	39	55	77	96
Murd $pp \neq 0$	12	26	11	19	20	45
Absoluutv	28	60	15	54	69	62
RV $a > 0$	41	57	37	51	76	86
RV $a < 0$	38	46	33	41	64	61
2 nullk	55	66	54	64	77	80
1 nullk	32	40	27	32	62	70
0 nullk	39	57	32	51	74	66
$b=0$	47	74	36	33	82	88
$c=0$	43	54	42	52	57	64
$b=c=0$	45	57	40	52	100	94

Võrratuste tõestamine

- Tõestada muutujaid sisaldav võrratus tähendab näidata, et antud võrratus on tõene muutuja kõigi lubatavate väärtuste korral.
- 1. Tõestamine võrratuse definitsioonist lähtuvalt.
Teame, et $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$. Seega võime võrratuse $a > b$ tõestamiseks moodustada võrratuse vasaku ja parema poole vahe $a - b$ ja näidata, et see vahe on positiivne.
- 2. Tõestamine tõesest võrratusest lähtuvalt. Tõestamiseks lähtutakse mingist teadaolevast tõesest võrratusest või juba tõestatud võrratusest. Seda teisendatakse seni, kuni jõutakse tõestatava võrratuseni. Sageli kasutatakse järgmisi võrratusi:

$$(a - b)^2 \geq 0 \qquad \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \text{kui } a > 0, b > 0$$

Võrratuste tõestamine

3. Võrratuses ühe poole asendamine temast suurema (väiksema) suurusega.

Näiteks võime võrratuse ühe poole teisendamisel saadud avaldise

$$2 - \frac{1}{n},$$

kus n on positiivne täisarv, asendada arvuga 2, kirjutades

$$\dots = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

4. Tõestamine vastuväiteliselt. Oletame vastuväiteliselt, et etteantud tõestatav võrratus ei ole tõene, st tõene on vastupidine võrratus (näiteks kui on vaja tõestada võrratus $a \leq 0$, siis oletame vastuväiteliselt, et tõene on võrratus $a > 0$). Teisendame seda võrratust seni, kuni jõuame vastuoluni eelduse või mõne muu matemaatikast tuntud tõega.
5. Tõestamine matemaatilise induktsiooniga.
Näited vt õpikutest

Küsimused ja ülesanded

- Milles seisneb intervallmeetod võrratuste lahendamiseks?
- Vaadelge erinevatest õpikutest, kuidas käsitletakse absoluutväärtust sisaldavate võrratuste lahendamist.
- Võrrelge murdvõrratuste käsitlemist erinevates õpikutes.
- Võrrelge võrratuse lahendi kirjutamise viise erinevates õpikutes.