1.2) Tehke kindlaks, kas võrrand $y^2 + x^2 - x^4 = 0$ määrab punkti $\mathbf{0}$ ümbruses pideva ilmutamata funktsiooni $y = f(x)$. Juhul, kui määrab, siis leidke tuletis $f'(0)$, kui ta leidub.

Lahendus. Oletame, et leiduvad $\delta, \sigma > 0$ ja pidev funktsioon $f\colon (-\delta, \delta) \to (-\sigma, \sigma)$ nii, et iga $(x, y) \in (-\delta, \delta) \times (-\sigma, \sigma)$ korral

$$F(x, y) = y^2 + x^2 - x^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

Muuhulgas siis $f(0) = 0$, kuna $0^2 + 0^2 - 0^4 = 0$ ja $(0, 0) \in (-\delta, \delta) \times (-\sigma, \sigma)$.

Funktsiooni f pidevuse tõttu punktis 0 leiame (valides $\varepsilon = \frac{1}{2}$) arvu $\alpha > 0$ (kusjuures nõuame, et $\alpha \leqslant \delta$ ja $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$) omadusega

$$|x| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < \frac{1}{2}$$

(kui leiame esialgu suurema α, siis väiksema jaoks omadus ammugi kehtib).

Seega, valides $x_0 = \frac{\alpha}{2}$, kehtib $|x_0| < \alpha$, mistõttu $-\frac{1}{2} < f(x_0) < \frac{1}{2}$. Niisiis, tähistades $y_0 = f(x_0)$, kehtib $(x_0, y_0) \in (-\alpha, \alpha) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset U_{\sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4}}}(\mathbf{0}) \subset U_1(\mathbf{0})$. (Viimase sisalduvuse põhjendavad võrratused $\alpha^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$.) Kuna $y_0 = f(x_0) \in (-\sigma, \sigma)$, siis ka $(x_0, y_0) \in (-\alpha, \alpha) \times (-\sigma, \sigma) \subset (-\delta, \delta) \times (-\sigma, \sigma)$, mistõttu tingimusest $y_0 = f(x_0)$ saame, et $F(x_0, y_0) = 0$.

Näitame teiselt poolt, et iga $(x, y) \in U_1(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ korral $F(x, y) > 0$. Nimelt, kui $0 < x^2 + y^2 < 1$, siis $1 - x^2 > 0$, millest $F(x, y) = y^2 + x^2(1 - x^2) > 0$.

Muuseas siis $0 = F(x_0, y_0) > 0$. Saadud vastuolu näitab, et nõutavaid arve δ, σ ja (punktis 0) pidevat funktsiooni $f\colon (-\delta, \delta) \to (-\sigma, \sigma)$ ei leidu.

1.6) Tehke kindlaks, kas võrrand $15x^2 - 7xy - 2y^2 - 53x + 18y + 44 = 0$ määrab punkti $\mathbf{A} = (2, 1)$ ümbruses pideva ilmutamata funktsiooni $y = f(x)$. Juhul, kui määrab, siis leidke tuletis $f'(2)$, kui ta leidub.

Lahendus. Paneme tähele, et $15x^2 - 7xy - 2y^2 - 53x + 18y + 44 = -(y + 5x - 11)(2y - 3x + 4)$. Seega $15x^2 - 7xy - 2y^2 - 53x + 18y + 44 = 0$ on samaväärne sellega, et $y + 5x - 11 = 0$ või $2y - 3x + 4 = 0$.

Oletame, et leiduvad $\delta, \sigma > 0$ ja pidev funktsioon $f : (2 - \delta, 2 + \delta) \to (1 - \sigma, 1 + \sigma)$ nii, et iga $(x, y) \in (2 - \delta, 2 + \delta) \times (1 - \sigma, 1 + \sigma)$ korral

$$F(x, y) = 15x^2 - 7xy - 2y^2 - 53x + 18y + 44 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

Muuhulgas siis $f(2) = 1$, kuna $15 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 - 53 \cdot 2 + 18 \cdot 1 + 44 = 0$ ja $(2, 1) \in (2 - \delta, 2 + \delta) \times (1 - \sigma, 1 + \sigma)$.

Valime $x_0 = 2 + \dfrac{\delta}{2}$, siis kehtib $|x_0 - 2| < \delta$. Niisiis, tähistades $y_0 = f(x_0)$, kehtib $(x_0, y_0) \in (2-\delta, 2+\delta) \times (1-\sigma, 1+\sigma)$, mistõttu tingimusest $y_0 = f(x_0)$ saame, et $F(x_0, y_0) = 0$. Järelikult $y_0 = 11 - 5x_0$ või $y_0 = \dfrac{3}{2}x_0 - 2$.

Oletame, et $y_0 = 11 - 5x_0$, seega $|y_0 - 1| = |10 - 5x_0| = 5 \cdot |x_0 - 2| = \dfrac{5\delta}{2}$, mistõttu $\sigma > \dfrac{5\delta}{2}$. Tähistame $y_1 = \dfrac{3}{2}x_0 - 2$, siis

$$|y_1 - 1| = \left|\frac{3}{2}x_0 - 3\right| = \frac{3}{2} \cdot |x_0 - 2| = \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta}{2} < \frac{5\delta}{2} < \sigma.$$

Seega ka $(x_0, y_1) \in (2 - \delta, 2 + \delta) \times (1 - \sigma, 1 + \sigma)$ ja $F(x_0, y_1) = 0$, mistõttu $y_1 = f(x_0) = y_0$. Järelikult $\dfrac{3}{2}x_0 - 2 = 11 - 5x_0$, millest $x_0 = 2 < 2 + \dfrac{\delta}{2} = x_0$, vastuolu.

Oletame, et $y_0 = \dfrac{3}{2}x_0 - 2$, seega $|y_0 - 1| = \left|\dfrac{3}{2}x_0 - 3\right| = \dfrac{3}{2} \cdot |x_0 - 2| = \dfrac{3\delta}{4}$, mistõttu $\sigma > \dfrac{3\delta}{4}$. Tähistame $x_1 = 2 + \dfrac{\delta}{10}$, siis $|x_1 - 2| < \delta$. Tähistame $y_1 = 11 - 5x_1$ ja $y_1' = \dfrac{3}{2}x_1 - 2$, siis

$$\begin{aligned}
|y_1 - 1| &= |10 - 5x_1| = 5 \cdot |x_1 - 2| = 5 \cdot \frac{\delta}{10} = \frac{\delta}{2} < \sigma, \\
|y_1' - 1| &= \left|\frac{3}{2}x_1 - 3\right| = \frac{3}{2} \cdot |x_1 - 2| = \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta}{10} = \frac{3\delta}{20} < \sigma.
\end{aligned}$$

Seega $(x_1, y_1), (x_1, y_1') \in (2-\delta, 2+\delta) \times (1-\sigma, 1+\sigma)$, kusjuures $F(x_1, y_1) = 0$ ja $F(x_1, y_1') = 0$. Niisiis $y_1 = f(x_1) = y_1'$, millest $11 - 5x_1 = \dfrac{3}{2}x_1 - 2$. Järelikult $x_1 = 2 < 2 + \dfrac{\delta}{10} = x_1$, vastuolu.

Mõlemal juhul saadud vastuolu näitab, et nõutavaid arve δ, σ ja (punktis **A**) pidevat funktsiooni $f : (2 - \delta, 2 + \delta) \to (1 - \sigma, 1 + \sigma)$ ei leidu.