5. Olgu $L = \gamma([a,b])$ lihtne pidev sirgestuv joon. Defineerige lõigu T alajaotusele vastavad joonintegraali $\int_L f\,\mathrm{d}s$ Darboux' ülem- ja alamsummad $s(T)$ ja $S(T)$. Tõestage, et tõkestatud funktsiooni $f : L \to \mathbb{R}$ korral kehtib samaväärsus

$$\exists \int_L f\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\lambda(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0.$$

Lahendus. Olgu $\mathfrak{T} = \{T \colon T = T[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ on lõigu $[a,b]$ alajaotus$\}$. Tähistame iga $T \in \mathfrak{T}$ korral

$$X_k = \gamma(t_k), \qquad s_k = |X_{k-1}X_k|\,, \qquad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \qquad \lambda(T) = \max\{\Delta t_1, \ldots, \Delta t_n\}.$$

Tõkestatud funktsiooni $f : L \to \mathbb{R}$ ja alajaotuse $T \in \mathfrak{T}$ korral tähistame Darboux' summad

$$s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k s_k, \qquad S(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k s_k,$$

kus

$$m_k = \inf_{Q\in X_{k-1}X_k} f(Q) = \inf_{t\in[t_{k-1},t_k]} f(\gamma(t)), \qquad M_k = \sup_{Q\in X_{k-1}X_k} f(Q) = \sup_{t\in[t_{k-1},t_k]} f(\gamma(t)).$$

(Funktsiooni f tõkestatuse tõttu kõik need suurused eksisteerivad.) Tähistades veel suvalise punktide $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $Q_k = \gamma(\xi_k)$, $k = 1, \ldots, n$, valiku korral

$$\sigma(T, (\xi_k)) = \sum_{k=1}^{n} f(Q_k)s_k = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\xi_k))s_k,$$

leiame (analoogiliselt näiteks ühe- või kahekordse integraali konstrueerimisega), et

$$s(T) = \inf\{\sigma(T, (\xi_k)) \colon \xi_k \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, n\}, \qquad S(T) = \sup\{\sigma(T, (\xi_k)) \colon \xi_k \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Lihtne kontroll näitab, et iga kahe $T, T' \in \mathfrak{T}$ korral $s(T) \leqslant S(T')$, seega leiduvad Darboux' integraalid

$$I_* = \sup\{s(T) \colon T \in \mathfrak{T}\}, \qquad I^* = \inf\{S(T) \colon T \in \mathfrak{T}\}$$

ning supreemumi ja infiimumi definitsiooni kasutades garanteerib võrratus $s(T) \leqslant S(T')$, et $I_* \leqslant I^*$.

Veendume nüüd, et kehtib samaväärsus

$$\exists \int_L f\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\lambda(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0.$$

„$\Rightarrow$“. Olgu $I := \int_L f\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}$. Näitame, et $\lim_{\lambda(T)\to 0}(S(T) - S(T)) = 0$.

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Joonintegraali eksisteerimisest teame, et leidub $\delta > 0$ omadusega

$$\forall T \in \mathfrak{T},\ \forall(\xi_k)\,(\xi_k \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, n) \qquad \lambda(T) < \delta \quad \Rightarrow \quad I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma(T, (\xi_k)) < I + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Võrduste (1) abil (arvud $I - \frac{\varepsilon}{4}$ ja $I + \frac{\varepsilon}{4}$ on hulga $\{\sigma(T, (\xi_k)) \colon \xi_k \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, n\}$ vastavalt mingi alumine ja ülemine tõke) saame, et

$$I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma(T, (\xi_k)) < I + \frac{\varepsilon}{4} \quad \Rightarrow \quad I - \frac{\varepsilon}{2} < I - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant s(T) \leqslant S(T) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niisiis

$$\varepsilon < 0 \leqslant S(T) - s(T) < I + \frac{\varepsilon}{2} - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

Tulemus ütleb, et

$$\forall T \in \mathfrak{T} \qquad \lambda(T) < \delta \quad \Rightarrow \quad |S(T) - s(T)| < \varepsilon.$$

Seega $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0$.

„$\Leftarrow$“ Kehtigu $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0$. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub $\delta > 0$, et, valinud mingi (näiteks ühtlase) alajaotuse omadusega $\lambda(T) < \delta$, leiab aset võrratus

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S(T) - s(T) < \frac{1}{n}.$$

Keskmise muutuja omadus (peame silmas, et $\lim\limits_{n} \frac{1}{n} = 0$) annab siit, et $I_* = I^* =: I$.

Tarvis on näidata, et $I = \int_L f\,\mathrm{d}s$. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Koondumise $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0$ põhjal leiame $\delta > 0$ omadusega

$$\forall T \in \mathfrak{T} \qquad \lambda(T) < \delta \quad \Rightarrow \quad S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Olgu nüüd $T \in \mathfrak{T}$ ja punktide valik (ξ_k), kus $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, n$, suvalised. Saame, et

$$I_* - \varepsilon \leqslant S(T) - \varepsilon < s(T) \leqslant \sigma(T, (\xi_k)) \leqslant S(T) < s(T) + \varepsilon \leqslant I_* + \varepsilon.$$

Arvestades seost $I_* = I^*$, oleme näidanud, et

$$\forall T \in \mathfrak{T}, \forall (\xi_k)\, (\xi_k \in [t_{k-1}, t_k],\, k = 1, \dots, n) \qquad \lambda(T) < \delta \quad \Rightarrow \quad I - \varepsilon < \sigma(T, (\xi_k)) < I + \varepsilon.$$

Seega $I = \int_L f\,\mathrm{d}s$.

6. Olgu L lihtne pidev sirgestuv joon. Tõestage, et kui $f : L \to \mathbb{R}$ on pidev, siis leidub esimest liiki joonintegraal $\int_L f\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}$.

Lahendus. Kasutame eelmise ülesande tähiseid (alajaotus, Riemanni ja Darboux' summad). Kontrollime, et $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0$, siis eelmise ülesande põhjal leidubki $\int_L f\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}$.