Ülesanne. Tõestage, et funktsioon

$$f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin xt}{t}, & \text{kui } t \neq 0, \\ x, & \text{kui } t = 0 \end{cases}$$

on pidev ristkülikus $[-2,10] \times [-3,7]$.

Lahendus. Fikseerime punkti $\mathbf{A} := (x_0, t_0) \in [-2,10] \times [-3,7] =: R$

Kui $t_0 \neq 0$, siis leidub punkti $\mathbf{A}$ ümbrus $U_\delta(\mathbf{A}) \cap R$ nii, et kõigi $(x,t) \in U_\delta(\mathbf{A})$ korral $t \neq 0$, mistõttu $f(x,t) = \dfrac{\sin xt}{t}$, kui $(x,t) \in U_\delta(\mathbf{A}) \cap R$. Siis ka $\lim\limits_{(x,t)\to\mathbf{A}} f(x,t) = \lim\limits_{(x,t)\to\mathbf{A}} \dfrac{\sin xt}{t} = \dfrac{\sin x_0 t_0}{t_0}$ (kahe muutuja elementaarfunktsioon).

Olgu $t_0 = 0$ ja $x_0 \neq 0$. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Meie eesmärk on leida arv $\delta > 0$ nii, et iga $\mathbf{X} := (x,t)$ korral

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + t^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,t) - x_0| < \varepsilon.$$

Nõuame, et $\delta < |x_0|$. Siis olukorras $(x,t) \in U_\delta(\mathbf{A})$ kehtib $x \neq 0$.

Punktide (x,t) jaoks, kus $t \neq 0$, saame (eeldusel $0 < |x| < 2|x_0|$)

$$\begin{aligned}
|f(x,t) - x_0| < \varepsilon \quad &\Leftarrow \quad \left| \frac{\sin xt}{t} - x_0 \right| < \varepsilon \Leftarrow \\
&\Leftarrow \quad |x - x_0| + |x| \cdot \left| \frac{\sin xt}{xt} - 1 \right| < \varepsilon \Leftarrow \\
&\Leftarrow \quad \begin{cases} |x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |x| \cdot \left| \dfrac{\sin xt}{xt} - 1 \right| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \\
&\Leftarrow \quad \begin{cases} |x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \left| \dfrac{\sin xt}{xt} - 1 \right| < \dfrac{\varepsilon}{4|x_0|} \end{cases}
\end{aligned}$$

Kuna $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$, siis leidub $\delta_1 > 0$ omadusega, et

$$0 < |xt| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad \left| \frac{\sin xt}{xt} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{4|x_0|}.$$

Tähistame $\delta := \min\left\{ \dfrac{|x_0|}{2}, \dfrac{\delta_1}{2|x_0|}, \dfrac{\varepsilon}{2} \right\}$. Kehtigu $\sqrt{(x-x_0)^2 + t^2} < \delta$.

Juhul $t = 0$ saame, et $|x - x_0| < \delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, millest $|x - x_0| < \varepsilon$ ehk $|f(x,t) - x_0| < \varepsilon$.

Juhul $t \neq 0$ saame, et $|t| \leqslant \sqrt{(x-x_0)^2 + t^2} < \delta$, millest järeldub võrratus $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ning järgmised väited:

$$\begin{aligned}
|t| < \delta \qquad &\Rightarrow \qquad 2|t| \cdot |x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad 0 < |xt| < \delta_1 \\
&\Rightarrow \qquad \left| \frac{\sin xt}{xt} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{4|x_0|} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \qquad |f(x,t) - x_0| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vaatleme nüüd juhtu $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Meie eesmärk on leida arv $\delta > 0$ nii, et iga $\mathbf{X} := (x,t)$ korral

$$\sqrt{x^2 + t^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,t)| < \varepsilon.$$

Koondumise $\lim_{u\to 0}\left|\frac{\sin u}{u}\right| = 1$ tõttu leidub arv δ_2 omadusega

$$0 < |xt| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{\sin xt}{xt}\right| < 2.$$

Tähistame $\delta := \min\left\{\delta_2, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.
Kehtigu $\sqrt{x^2+t^2} < \delta$.
Juhul $x = 0$ saame, et $f(x,t) = 0$, seega ilmselt $|f(x,t)| < \varepsilon$.
Juhul $x \neq 0$, $t = 0$ saame, et $f(x,t) = x$, seega meil on

$$|f(x,t)| = |x| \leqslant \sqrt{x^2+t^2} < \delta < \varepsilon.$$

Juhul $xt \neq 0$ saame, et kehtib $0 < |xt| < \delta_2$, mistõttu

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin xt}{t}\right| = |x| \cdot \left|\frac{\sin xt}{xt}\right| \leqslant 2|x| < 2\delta \leqslant \varepsilon.$$