Sirge võrrandid

Sirge s võrrand	tasandil	ruumis
Parameetriline vektor-võrrand	$s: \overrightarrow{AX} = t\vec{s},\ t \in \mathbb{R}$	$s: \overrightarrow{AX} = t\vec{s},\ t \in \mathbb{R}$
Parameetriline vektor-võrrand kohavektorite kaudu	$s: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{s},\ t \in \mathbb{R}$	$s: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{s},\ t \in \mathbb{R}$
Parameetri-lised võrran-did koordi-naatides	$s: \begin{cases} x_1 = a_1 + ts_1 \\ x_2 = a_2 + ts_2 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$	$s: \begin{cases} x_1 = a_1 + ts_1 \\ x_2 = a_2 + ts_2 \\ x_3 = a_3 + ts_3 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$
Kanooniline võrrand	$s: \frac{x_1-a_1}{s_1} = \frac{x_2-a_2}{s_2}$	$s: \frac{x_1-a_1}{s_1} = \frac{x_2-a_2}{s_2} = \frac{x_3-a_3}{s_3}$
Üldvõrrand	$s: A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$	Puudub
Taandatud võrrand	$s: x_2 = ax_1 + b$	Puudub
Võrrand telglõikudes	$s: \frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} = 1$	Puudub
Võrrand kahe tasandi lõike-joonena	Puudub	s: $\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \\ B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 = 0 \end{cases}$

Tasandi võrrandid

Parameetriline vektorvõrrand	$\pi : \overrightarrow{AX} = t_1\vec{u} + t_2\vec{v},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
Parameetriline vektorvõrrand kohavektorite kaudu	$\pi : \vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{u} + t_2\vec{v},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
Parameetrilised võrrandid koordinaatides	$\pi : \begin{cases} x_1 = a_1 + t_1u_1 + t_2v_1 \\ x_2 = a_2 + t_1u_2 + t_2v_2 \\ x_3 = a_3 + t_1u_3 + t_2v_3 \end{cases},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
Üldvõrrand	$\pi : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$
Võrrand telglõikudes	$\pi : \frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 1$

Tasandi üldvõrrandi erikujud:

1. $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$ — reeperi alguspunkt O asub tasandil.
2. (a) i. $A_1x_1 + A_2x_2 + A_4 = 0$, $A_4 \neq 0$ — tasand on paralleelne x_3-teljega.
      ii. $A_1x_1 + A_2x_2 = 0$ — x_3-telg asub tasandil.
   (b) i. $A_1x_1 + A_3x_3 + A_4 = 0$, $A_4 \neq 0$ — tasand on paralleelne x_2-teljega.
      ii. $A_1x_1 + A_3x_3 = 0$ — x_2-telg asub tasandil.
   (c) i. $A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$, $A_4 \neq 0$ — tasand on paralleelne x_1-teljega.
      ii. $A_2x_2 + A_3x_3 = 0$ — x_1-telg asub tasandil.
3. (a) i. $A_1x_1 + A_4 = 0$ ehk $x_1 = b_1$, $b_1 \neq 0$ — tasand on paralleelne x_2x_3-koordinaattasandiga.
      ii. $A_1x_1 = 0$ ehk $x_1 = 0$ — tasand on x_2x_3-koordinaattasand.
   (b) i. $A_2x_2 + A_4 = 0$ ehk $x_2 = b_2$, $b_2 \neq 0$ — tasand on paralleelne x_1x_3-koordinaattasandiga.
      ii. $A_2x_2 = 0$ ehk $x_2 = 0$ — tasand on x_1x_3-koordinaattasand.
   (c) i. $A_3x_3 + A_4 = 0$ ehk $x_3 = b_3$, $b_3 \neq 0$ — tasand on paralleelne x_1x_2-koordinaattasandiga.
      ii. $A_3x_3 = 0$ ehk $x_3 = 0$ — tasand on x_1x_2-koordinaattasand.

Punkti $K(k_1, k_2) \in E_2$ **kaugus sirgest** $s : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$:

$$d(K, s) = \frac{|A_1k_1 + A_2k_2 + A_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

(punkti kauguse leidmiseks sirgest tuleb punkti koordinaadid asendada sirge üldvõrrandi vasakusse poolde, võtta sellest absoluutväärtus ning jagada tulemus sirge normaalvektori pikkusega).

Punkti $K(k_1, k_2, k_3) \in E_3$ **kaugus sirgest** $s : \begin{cases} x_1 = a_1 + ts_1 \\ x_2 = a_2 + ts_2 \\ x_3 = a_3 + ts_3 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$:

$$d(K, s) = \frac{|\overrightarrow{AK} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$
$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} k_2 - a_2 & k_3 - a_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_1 - a_1 & k_3 - a_3 \\ s_1 & s_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_1 - a_1 & k_2 - a_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}.$$

Punkti $K(k_1, k_2, k_3) \in E_3$ **kaugus tasandist**
$\pi : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$:

$$d(K, \pi) = \frac{|A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + A_4|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

(punkti kauguse leidmiseks tasandist tuleb punkti koordinaadid asendada tasandi üldvõrrandi vasakusse poolde, võtta sellest absoluutväärtus ning jagada tulemus tasandi normaalvektori pikkusega).

Sirgete $s_1, s_2 \subseteq E_3$ (E_2) vaheline nurk:

$$\cos\angle(s_1, s_2) = \frac{|\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}.$$

Sirgete $s_1 : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$ ja $s_2 : A'_1x_1 + A'_2x_2 + A'_3 = 0$ vaheline nurk:

$$\begin{aligned}\cos\angle(s_1, s_2) &= \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|A_1A'_1 + A_2A'_2|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\sqrt{(A'_1)^2 + (A'_2)^2}}.\end{aligned}$$

Tasandite $\pi_1 : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$ ja $\pi_2 : A'_1x_1 + A'_2x_2 + A'_3x_3 + A'_4 = 0$ vaheline nurk:

$$\begin{aligned}\cos\angle(\pi_1, \pi_2) &= \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|A_1A'_1 + A_2A'_2 + A_3A'_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\sqrt{(A'_1)^2 + (A'_2)^2 + (A'_3)^2}}.\end{aligned}$$

Sirge s ja tasandi π vaheline nurk:

$$\sin\angle(s, \pi) = \frac{|\langle \vec{s}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{s}||\vec{n}|}.$$