Sissejuhatus. Vead ligikaudsel arvutamisel.

Loeng 1

MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

11.02.2019

1. Sissejuhatus
   - Aine korraldus
   - Näide matemaatilise modelleerimise ülesandest ja selle numbrilisest lahendamisest
   - Kursuse põhiteemad
2. Vead ligikaudsel arvutamisel
   - Vigade liigid
   - Arvu absoluutne ja relatiivne viga
   - Vigade edasikandumine arvutustes
   - Funktsiooni argumentide vigade leidmine
   - Vigade ümardamine
3. Lisateemad
   - Arvude esitamisest arvutis
   - Algoritmide koonduvuse kirjeldamisest
   - Taylori rida/valem/polünoom
   - Geomeetrilise rea summa

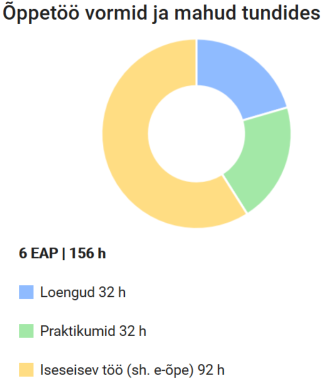
Ülesanded

Aine korraldus

Loengud: E 10.15 J.Liivi 2-402
Praktikumid: T 12.15 või 14.15 J. Liivi 2-004
Aine koduleht: `https://courses.ms.ut.ee/2019/numbr/spring`

2 kontrolltööd
praktikumiülesanded
$\Rightarrow$ arvestus

ebaõnnestumisel suuline arvestus



Sissejuhatus

Looduse uurimine

- uuritakse objekti, nähtust, protsessi (nt soojuse levimist kehas)
- koostatakse matemaatiline mudel (nt osatuletistega diferentsiaalvõrrand)
- uuritakse matemaatilist mudelit (nt lahendi olemasolu ja ühesus)
- leitakse lahend, enamasti ligikaudselt (**Millist arvutusmeetodit kasutada?**)

Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (mudeli koostamine)

Olgu antud homogeenne varras pikkusega l. Varda välispind on isoleeritud, soojusvahetus toimub otste kaudu. Olgu antud algtemperatuur vardas $u(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in [0, l]$. Soovitakse teada saada temperatuuri tulevikus $u(x, t)$, $t > 0$. Matemaatilise mudeli koostamisel kasutatakse kolme füüsikaseadust

- soojusenergia avaldub kujul cmu, kus c on erisoojus, m on mass ja u temperatuur;
- Fourier' soojusjuhtivuse seadus: soojusvoog (soojushulk soojusvahetuspinna ühiku kohta) avaldub kujul $-K_0 \frac{\partial u}{\partial x}$, kus K_0 on soojusjuhtivustegur;
- energia jäävuse seadus (termodünaamika esimene seadus).

Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (mudeli koostamine)

Homogeenses vardas tihedus ρ, erisoojus c, soojusjuhtivustegur K_0 ja ristlõike pindala A on kõik konstantsed. Vaatleme kuitahes lühikest varda segmenti $[x, x+\Delta x]$. Kogu segmendis võib temperatuuri lugeda konstantseks ja võrdseks väärtusega segmendi vasakus otspunktis, st soojusenergia avaldub

$$cmu = c\rho A\,\Delta x\,u(x,t).$$

Energia jäävuse seaduse põhjal ajaühiku Δt jooksul toimuv soojusenergia muutus on arvutatav kui "vasakult sisenev soojusenergia" - "paremalt väljuv soojusenergia", st

$$\begin{aligned} c\rho A\,\Delta x\,u(x,t+\Delta t) - c\rho A\,\Delta x\,u(x,t) \\ = \Delta t\,A\left(-K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x - \Delta t\,A\left(-K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \end{aligned}$$

ehk

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} = \frac{K_0}{c\rho}\left(\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x}{\Delta x}\right).$$

Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (mudeli koostamine)

Minnes võrrandis

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}=\frac{K_0}{c\rho}\left(\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}}{\Delta x}\right)$$

piirile $\Delta t, \Delta x \to 0$, saame soojusjuhtivusvõrrandi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x\in[0,l], t\in[0,\infty),$$

kus $\kappa=\dfrac{K_0}{c\rho}$.

Soojusjuhtivusvõrrandile tuleb lisada algtingimus

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in[0,l],$$

ja rajatingimused

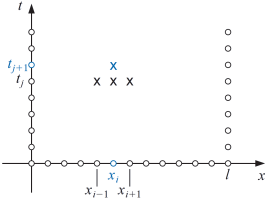
$$u(0,t)=g(t),\ u(l,t)=h(t)\quad \text{või}\quad \tfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=g(t),\ \tfrac{\partial u}{\partial x}(l,t)=h(t).$$

Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (lahendusmeetod)

Vt ülesannet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0,1], t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0,1],$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Lahendame selle diferentsmeetodiga. Valime täisarvu $m > 0$, mis defineerib x-telje sammu $h = 1/m$. Valime ka ajasammu k. Sellega oleme defineerinud võrgu (x_i, t_j), kus $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, m$, on $m+1$ kohta varda peal ning $t_j = jk$, $j = 0, 1, \ldots$, diskreeetsed ajahetked.



Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (lahendusmeetod)

Kasutame Taylori valemit ning tähistust $u(x_i, t_j) = u_{ij}$, saame

$$u(x_i, t_j + k) = u(x_i, t_j) + u_t(x_i, t_j)k + R,$$

millest

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k},$$

lisaks

$$u(x_i + h, t_j) = u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j)h + u_{xx}(x_i, t_j)\frac{h^2}{2} + R_1,$$
$$u(x_i - h, t_j) = u(x_i, t_j) - u_x(x_i, t_j)h + u_{xx}(x_i, t_j)\frac{h^2}{2} + R_2,$$

millest

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

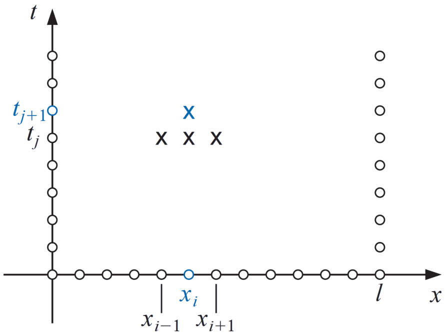
Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (lahendusmeetod)

Oleme saanud diskretiseeritud võrrandi

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

millest

$$u_{i,j+1} = (1 - \frac{2k}{h^2})u_{ij} + \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}).$$



Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (lahendamine)

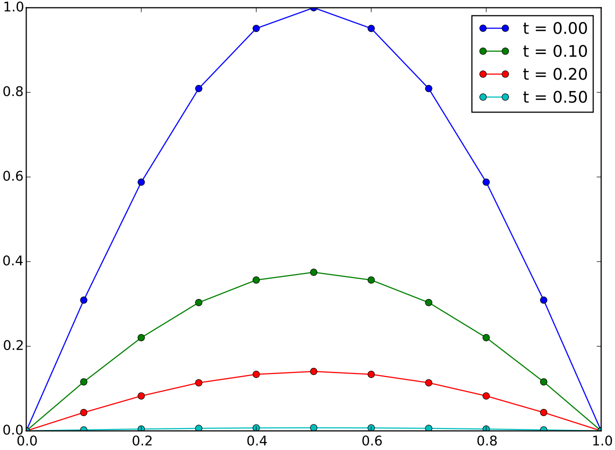
Kasutades algtingimusi $u_{i,0} = u(x_i, 0) = \sin(\pi \cdot x_i)$, $i = 0, \ldots, m$, ja rajatingimusi $u_{0,j} = u(0, t_j) = 0$, $u_{m,j} = u(1, t_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots$, on võimalik rida-realt kõik väärtused võrgupunktides välja arvutada.

a) Kasutame x-telje sammu $h = 0.1$ ja ajasammu $k = 0.0005$.
b) Kasutame x-telje sammu $h = 0.1$ ja ajasammu $k = 0.01$.

Teada on, et selle ülesande täpne lahend on $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$.

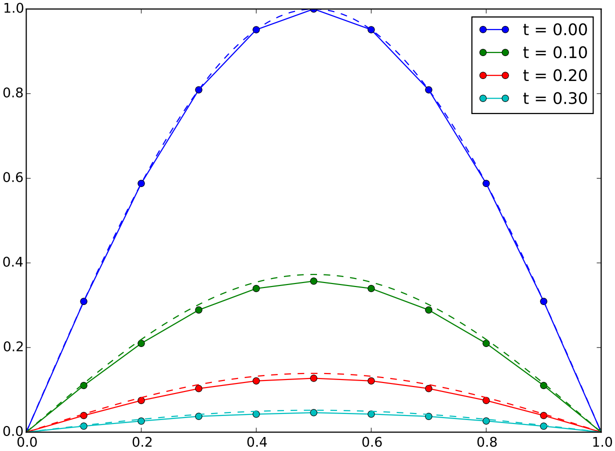
Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (lahendamine)

a) Kasutame x-telje sammu $h = 0.1$ ja ajasammu $k = 0.0005$. Joonisel on kujutatud u_{ij} ajahetkedel $t_0 = 0$, $t_{200} = 0.1$, $t_{400} = 0.2$ ja $t_{1000} = 0.5$.



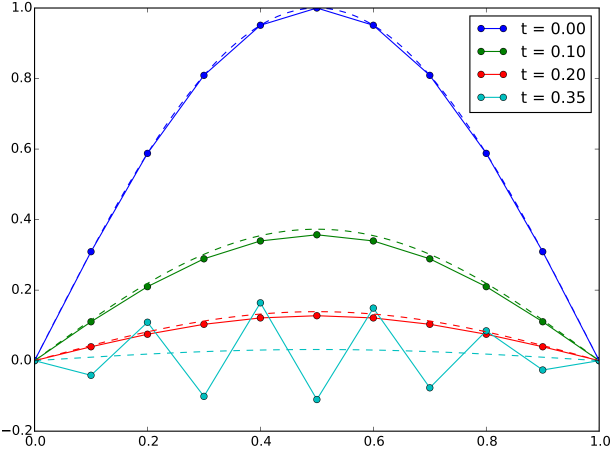
Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (lahendamine)

b) Kasutame x-telje sammu $h = 0.1$ ja ajasammu $k = 0.01$.
Joonisel on kujutatud u_{ij} ning täpne lahend ajahetkedel $t_0 = 0$, $t_{10} = 0.1$, $t_{20} = 0.2$ ja $t_{30} = 0.3$.



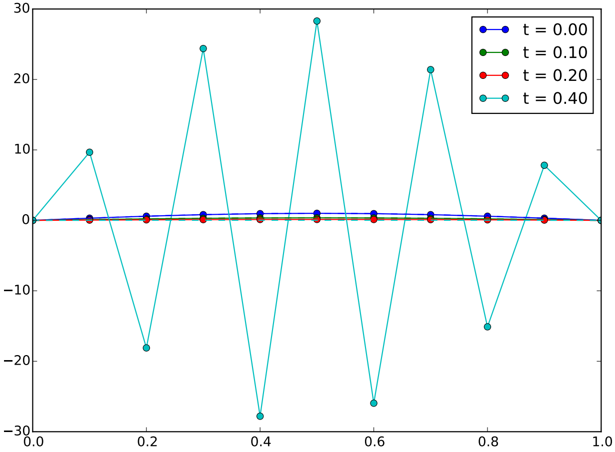
Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (lahendamine)

b) Kasutame x-telje sammu $h = 0.1$ ja ajasammu $k = 0.01$.
Joonisel on kujutatud u_{ij} ning täpne lahend ajahetkedel $t_0 = 0$, $t_{10} = 0.1$, $t_{20} = 0.2$ ja $t_{35} = 0.35$.



Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (lahendamine)

b) Kasutame x-telje sammu $h = 0.1$ ja ajasammu $k = 0.01$.
Joonisel on kujutatud u_{ij} ning täpne lahend ajahetkedel $t_0 = 0$, $t_{10} = 0.1$, $t_{20} = 0.2$ ja $t_{40} = 0.4$.



Näide: Soojusjuhtivusülesanne vardas (lahendamine)

Vaatlesime paraboolset tüüpi osatuletistega diferentsiaalvõrrandit (rajaülesannet)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0,1], t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0,1],$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Diferentsmeetodiga lahendades kasutasime
a) x-telje sammu $h = 0.1$ ja ajasammu $k = 0.0005$;
b) x-telje sammu $h = 0.1$ ja ajasammu $k = 0.01$.

Antud ülesande korral diferentsmeetod koondub lahendiks kiirusega $O(k + h^2)$ eeldusel, et $\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.

Kursuse põhiteemad

- võrrandite lahendamine
- võrrandisüsteemide lahendamine
- funktsioonide lähendamine
- numbriline diferentseerimine
- määratud integraalide ligikaudne leidmine

Vigade liigid

- matemaatilise formuleeringu viga (tingimatu)
- meetodi viga (tinglik)
- ümardamisvead (tinglik)

Arvu absoluutne ja relatiivne viga

A olgu täpne arv
a olgu arvu A teadaolev ligikaudne väärtus
tõeline viga on $\Delta a = A - a$

Definitsioon

Ligikaudse arvu a **absoluutseks veaks** nimetatakse suvalist arvu $\Delta > 0$, mis rahuldab võrratust $|A - a| \leq \Delta$ ehk $|\Delta a| \leq \Delta$.

Näide

Olgu $A = \pi$ ja $a = 3{,}14$, siis $\Delta = 1$, $\Delta = 0{,}0016$, $\Delta = 0{,}001593$ (absoluutne viga ei ole üheselt määratud).

Ligikaudsete arvude korral kirjutatakse $A = a \pm \Delta$, mis tähendab, et $A \in [a - \Delta, a + \Delta]$.

Arvu absoluutne ja relatiivne viga

A olgu täpne arv
a olgu arvu A teadaolev ligikaudne väärtus
tõeline viga on $\Delta a = A - a$
tõeline relatiivne viga on $\delta a = \frac{\Delta a}{a}$

Definitsioon

Ligikaudse arvu a **absoluutseks veaks** nimetatakse suvalist arvu $\Delta > 0$, mis rahuldab võrratust $|A - a| \leq \Delta$ ehk $|\Delta a| \leq \Delta$.

Definitsioon

Ligikaudse arvu a **relatiivseks veaks** nimetatakse suvalist arvu $\delta > 0$, mis rahuldab võrratust $|\frac{\Delta a}{a}| \leq \delta$ ehk $|\delta a| \leq \delta$.

Ligikaudse arvu a relatiivseks veaks võib lugeda arvu $\delta = \Delta/|a|$.
Ligikaudsete arvude korral kirjutatakse $A = a \pm \Delta$ ning $A = a(1 \pm \delta)$.

Arvu absoluutne ja relatiivne viga

Näide

A (täpne arv)	a (ligikaudne arv)	Δ (absoluutne viga)	δ (relatiivne viga)
3,1	3	0,1	$0{,}034 = 3{,}4\%$
0,0031	0,003	0,0001	$0{,}034 = 3{,}4\%$
3100	3000	100	$0{,}034 = 3{,}4\%$
0,3	0,2	0,1	$0{,}5 = 50\%$

Vigade edasikandumine arvutustes

Näide

Leiame polünoomi $y = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5$ väärtuse kohal $x = 4.71$ kasutades kolme tüvenumbri aritmeetikat.

	x	x^2	x^3	$6.1x^2$	$3.2x$	y	δ
Täpne	4.71	22.1841	104.487111	135.32301	15.072	-14.263899	
Lõigat.	4.71	22.1	104	134	15.0	-13.5	5%
Ümard.	4.71	22.2	105	135	15.1	-13.4	6%

Leiame sama väärtuse, kuid esitame polünoomi kujul
$y = [(x - 6.1)x + 3.2]x + 1.5$.

	$x - 6.1$	$(x - 6.1)x$	$(x - 6.1)x + 3.2$	$[\ldots + 3.2]x$	y	δ
Täpne	-1.39	-6.5469	-3.3469	-15.763899	-14.263899	
Lõigat.	-1.39	-6.54	-3.34	-15.7	-14.2	0.45%
Ümard.	-1.39	-6.55	-3.35	-15.8	-14.3	0.25%

Vigade edasikandumine arvutustes

Antud on diferentseeruv funktsioon $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, ligikaudsed arvud $x_1, \ldots, x_n$ kui täpsete arvude $X_1, \ldots, X_n$ lähendid ning arvude $x_1, \ldots, x_n$ absoluutsed vead $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Leida Δ_u ja δ_u.
Kuna u on diferentseeruv, siis Taylori valemi põhjal

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(X_1, \ldots, X_n) - u(x_1, \ldots, x_n) \\ &= u(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - u(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\Delta x_i + R \end{aligned}$$

ning

$$|\Delta u| \approx \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta_i .$$

(Eeldasime siin, et Δ_i on väikesed, mistõttu on väike ka jääkliige R.)

Vigade edasikandumine arvutustes

Võtame

$$\Delta_u \approxeq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta_i .$$

Võimalik, et oleme siin $|R|$ võrra absoluutset viga alla hinnanud. Lisaks saame

$$\delta_u = \frac{1}{|u|} \Delta_u \approxeq \frac{1}{|u|} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln |u| \right| \Delta_i .$$

Vigade edasikandumine arvutustes

$$\Delta_u \approxeq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta_i$$

$$\delta_u \approxeq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln |u| \right| \Delta_i$$

Näited

Olgu $u = x_1 + \ldots + x_n$, siis $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 1$ ja $\Delta_u = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$.

Olgu $u = x_1 - x_2$, siis $\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| = 1$ ja $\Delta_u = \Delta_1 + \Delta_2$.

Olgu $u = x_1 x_2 \ldots x_n$, siis $\left| \frac{\partial \ln |u|}{\partial x_i} \right| = \frac{1}{|x_i|}$ ja $\delta_u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{|x_i|} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$.

Liitmisel ja lahutamisel andmete absoluutsed vead liituvad. Korrutamisel ja jagamisel andmete relatiivsed vead liituvad.

Ülesanded

1. Tõestada, et liitmise ja lahutamise absoluutse vea leidmise valemid on täpsed (ilma ligikaudsuseta, erinevalt üldjuhust) ja kehtivad igasuguste (mitte ainult väikeste) vigade korral.
2. Tõestada, et kui liidetavad on sama märgiga, siis $\delta_u \le \max\limits_{1 \le i \le n} \delta_i$ ehk summa relatiivne viga ei ületa liidetavate relatiivsetest vigadest maksimaalset. Ka siin kehtib väide suvaliste vigade korral.
3. Olgu $S = ab$, ligikaudsed arvud $a = 3$ ja $b = 4$ teada absoluutsete vigadega $\Delta_a = 2$ ja $\Delta_b = 3$. Leida korrutise absoluutne viga Δ_S. Arvestada, et siin ei ole argumentide absoluutsed vead väikesed.

Funktsiooni argumentide vigade leidmine

Antud on funktsioon $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, ligikaudsed arvud $x_1, \ldots, x_n$ ja Δ_u või δ_u. Leida on vaja argumentide $x_1, \ldots, x_n$ absoluutsed vead $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ või relatiivsed vead $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

Kui $n \geq 2$, ei ole ühest lahendit. Eeldatakse, et $\Delta_1 = \ldots = \Delta_n$ või $\delta_1 = \ldots = \delta_n$.

Näide

Toa põranda mõõtmed on 3 m ja 4 m. Kui täpselt peab neid mõõtma, et saada põranda pindala täpsusega 0,01 m^2?

Olgu $S = ab$, $a = 3$, $b = 4$. Antud on $\Delta_S = 0{,}01$. Siis

$$\Delta_S = \frac{\partial S}{\partial a}\Delta_a + \frac{\partial S}{\partial b}\Delta_b = b\Delta_a + a\Delta_b = (a+b)\Delta,$$

kus loeme, et $\Delta_a = \Delta_b = \Delta$. Siis

$$\Delta = \frac{\Delta_S}{a+b} = \frac{0{,}01}{3+4} = 0,0014\ldots \approx 1 \text{ mm}.$$

Vigade ümardamine

Funktsiooni väärtuse viga tuleb ümardada üles, argumentide vead alla.

$$
\begin{aligned}
&X_i \in [x_i - \Delta_i, x_i + \Delta_i], i = 1, \ldots, n \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow u(X_1, \ldots, X_n) \in [u(x_1, \ldots, x_n) - \Delta_u, u(x_1, \ldots, x_n) + \Delta_u]
\end{aligned}
$$

Arvude esitamisest arvutis

Arvutis on kasutusel kahendsüsteem. Iga bitt on kas 0 või 1, kaheksa bitti on üks bait. Arve esitatakse enamasti kas 4-baidistena (32 bitti) – *single precision* või 8-baidistena (64 bitti) – *double precision*.

Täisarvude (*integer*) korral on üks bitt reserveeritud arvu märgi jaoks, ülejäänud bitid arvu jaoks. Suurim 32-bitine täisarv on

$$\overbrace{11\cdots 111}^{31\,\text{ühte}}{}_2 = 1\cdot 2^{30}+1\cdot 2^{29}+\ldots+1\cdot 2^{2}+1\cdot 2^{1}+1\cdot 2^{0} = 2^{31}-1 = 2\,147\,483\,647$$

ning vähim $-2\,147\,483\,648$ (2^{31} kombinatsiooni positiivsete arvude ja arvu 0 jaoks, 2^{31} kombinatsiooni negatiivsete arvude jaoks).

A Tutorial on Data Representation, Ch. 3

Arvude esitamisest arvutis

Ujukomaarvud (normaliseeritud ujukomaarvud) esitatakse kümnendsüsteemis kujul $\pm a \cdot 10^b$, kus $1 \leq a < 10$.
Standardi IEEE 754 kohaselt esitatakse normaliseeritud kahend-ujukomaarv kujul

$$(-1)^S \, 2^{E-Bias}(1+F),$$

kus F on arvu tüve ehk mantissi murdosa. 64-bitiste arvude korral on 11 bitti reserveeritud eksponendile, 52 bitti tüvenumbritele, $Bias = 1023$.

Näide

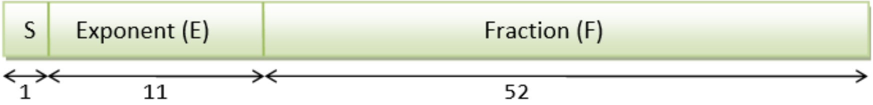
Vaatleme arvu

$$0\,10000000011\,1011100100010000000000000000000000000000000000000000.$$

$S = 0$, seega arv on positiivne. $E = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1027$.
$F = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$.
Vaadeldav arv kümnendsüsteemis on
$(-1)^0 \cdot 2^{1027-1023} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096}\right) = 27.56640625.$

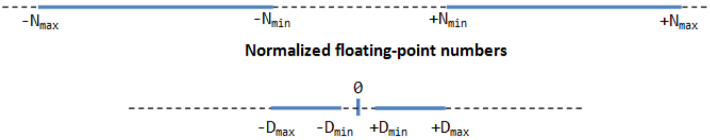
Arvude esitamisest arvutis

64-bitiste arvude korral on 11 bitti reserveeritud eksponendile, 52 bitti tüvenumbritele, $Bias = 1023$.

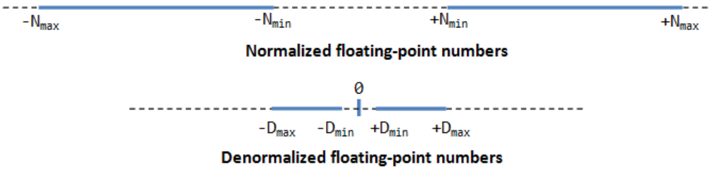


64-bit Double-Precision Floating-point Number

Suurim 11-bitine arv on $2^{11} - 1 = 2047$. $1 \leq E \leq 2046$ korral kasutatakse normaliseeritud kuju $(-1)^S\, 2^{E-Bias}(1+F)$, $E = 0$ korral denormaliseeritud kuju $(-1)^S\, 2^{-1022}(0+F)$, $E = 2047$ on reserveeritud eriväärtustele nagu $\pm$`INF` ja `NaN`.



Arvude esitamisest arvutis



$N_{min} = (-1)^0 \cdot 2^{-1022}(1 + 0) \approx 2.2 \cdot 10^{-308}$
$N_{max} = (-1)^0 \cdot 2^{1023}(1 + 1 - 2^{-52}) \approx 1.8 \cdot 10^{308}$
$D_{min} = (-1)^0 \cdot 2^{-1022}(0 + 2^{-52}) = 2^{-1074} \approx 4.9 \cdot 10^{-324}$
$D_{max} = (-1)^0 \cdot 2^{-1022}(0 + 1 - 2^{-52}) \approx 4.5 \cdot 10^{-308}$
A Tutorial on Data Representation, Ch. 4

Arvu tüve täpsus 53 bitti võimaldab esitada kümnendmurde 15-17 tüvenumbriga ($2^{-53} \approx 1.11 \cdot 10^{-16}$).

Arvude esitamisest arvutis

Java		**Python**
`int a;`	(32-bitine täisarv)	`a=2+3`
`a = 2147483647;`		salvestab sobiva tüübina
`a = a + 1;`	ületäitumine (*overflow*)	ületäitumine ei ole
	$a = -2147483648$	probleem
`long b;`	(64-bitine täisarv)	`long(a)`
		arvutused ajamahukad
`float`		-
`double`		standard

Näiteid ümardamisvigadest Pythonis

1. $(\sqrt{2})^2 - 2 = 4.440892098500626 \cdot 10^{-16}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$, $\quad f(10^8) =$`[float division by zero]`
   $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \sqrt{x^2+1} + x, \quad g(10^8) = 200000000.0$

3. $0.1 + 0.2 = 0.30000000000000004$
   Põhjuseks arvu 0.1 kahendesitus: $0.1_{10} = 0.0001100110011\ldots_2$

4. $62 \cdot 41.2 \cdot 2/250 = 20.435200000000002$
   $62 \cdot 4.12 \cdot 2/25 = 20.4352$

Koonduvuse kirjeldamine

Definitsioon

Olgu β_n nulli koonduv jada ning x_n arvuks x^* koonduv jada. Kui leidub konstant $K > 0$ nii, et piisavalt suure n korral

$$|x_n - x^*| \leq K|\beta_n|,$$

siis öeldakse, et jada x_n **koondub** arvuks x^* **kiirusega** $O(\beta_n)$ ja kirjutatakse $x_n = x^* + O(\beta_n)$.

Enamasti valitakse $\beta_n = \frac{1}{n^p}$ mingi $p > 0$ korral (üritatakse leida suurim võimalik p) või $\beta_n = q^n$, kus $0 < q < 1$ (üritatakse leida vähim q).

Koonduvuse kirjeldamine

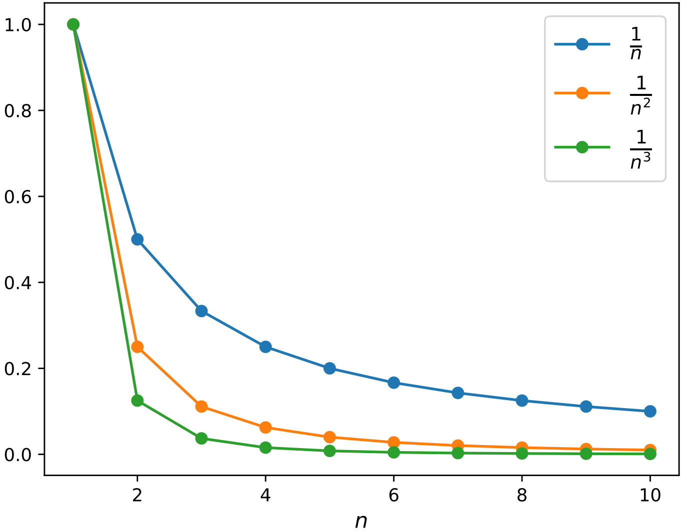
Näide

Jadad $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ ja $b_n = \frac{n+3}{n^3}$ koonduvad mõlemad nulli, kuid jada b_n koondub kiiremini, sest $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

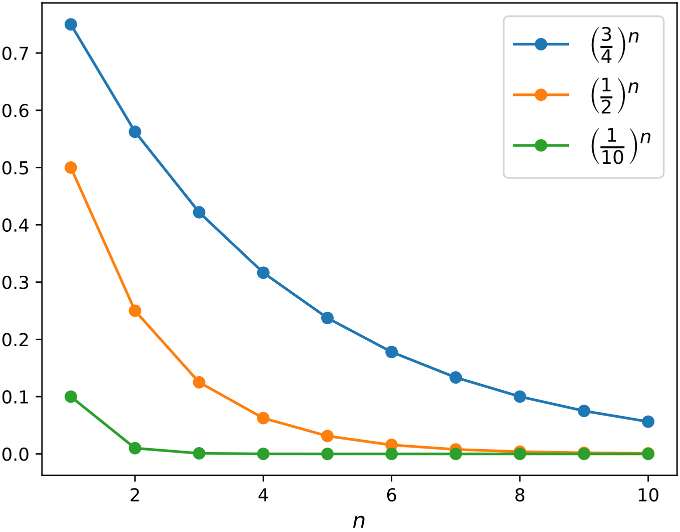
$$\left|\frac{n+1}{n^2}\right| \leq \left|\frac{n+n}{n^2}\right| = 2\left|\frac{1}{n}\right| \quad \Rightarrow \quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\left|\frac{n+3}{n^3}\right| \leq \left|\frac{n+3n}{n^3}\right| = 4\left|\frac{1}{n^2}\right| \quad \Rightarrow \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

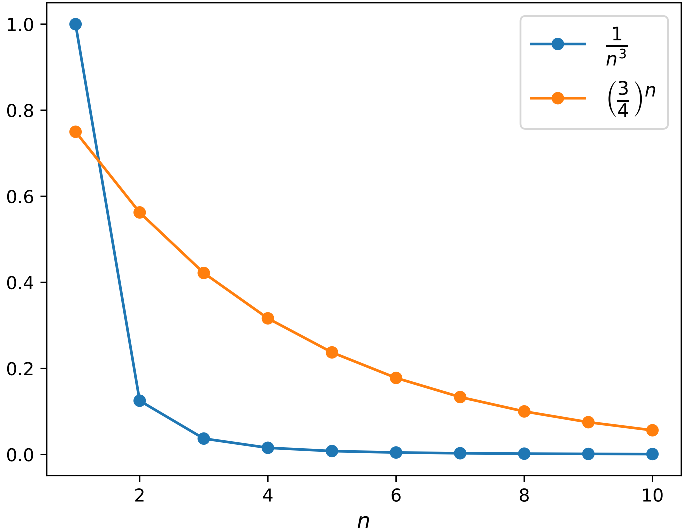
Koonduvuse kirjeldamine



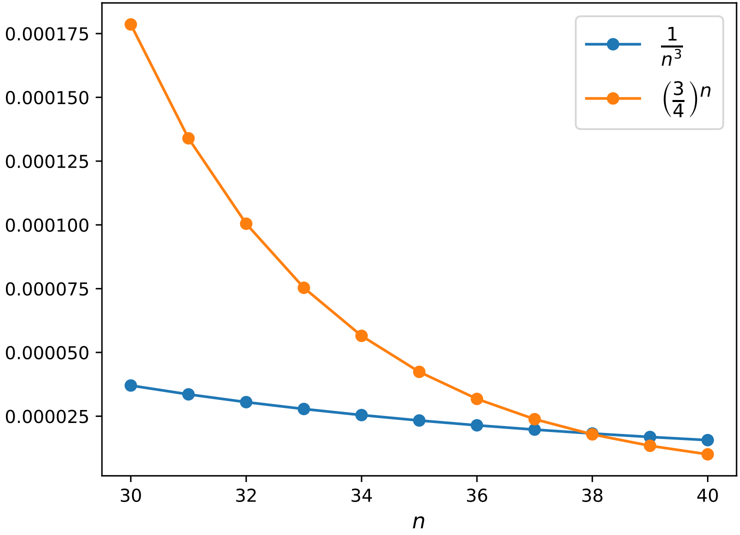
Koonduvuse kirjeldamine



Koonduvuse kirjeldamine



Koonduvuse kirjeldamine



Koonduvuse kirjeldamine

Näide

Sissejuhatuses vaatlesime soojusjuhtivusülesande lahendamist diferentsmeetodiga. Seal oli öeldud, et meetod koondub lahendiks kiirusega $O(k + h^2)$, kus k on ajasamm ja h x-telje samm.

Kui $k = 0.0005$ ja $h = 0.1$, siis ajahetkel $t = 0.5$ on täpse ja ligikaudse lahendi maksimaalne erinevus $2.075 \cdot 10^{-4}$.

Kui $k = 0.0005/4$ ja $h = 0.1/2$ (st $k + h^2$ on 4 korda väiksem), siis ajahetkel $t = 0.5$ on täpse ja ligikaudse lahendi maksimaalne erinevus $5.128 \cdot 10^{-5} = 0.5128 \cdot 10^4$ (st ka viga on ligikaudu 4 korda väiksem).

Kui teha $k + h^2$ veel 4 korda väiksemaks, st $k = 0.0005/16$ ja $h = 0.1/4$, siis ajahetkel $t = 0.5$ on täpse ja ligikaudse lahendi maksimaalne erinevus $1.278 \cdot 10^{-5}$.

Koonduvuse kirjeldamine

Koondugu jada x_n arvuks x^*.

Kui leidub $q < 1$ nii, et $|x_{n+1} - x^*| \leq q|x_n - x^*|$, siis öeldakse, et x_n koondub **geomeetrilise progressiooni kiirusega**/koondub lineaarselt.

Kui leiduvad $\alpha > 1$ ja $\lambda > 0$ nii, et $|x_{n+1} - x^*| \leq \lambda|x_n - x^*|^\alpha$, siis nimetatakse koondumist α-järku koondumiseks ehk **astmeliseks koondumiseks** ($\alpha = 2$ korral ruutkoondumiseks, $\alpha = 3$ korral kuupkoondumiseks). Piirjuhul $\alpha = 1$, $\lambda < 1$ on tegemist lineaarse koondumisega.
Astmeline koondumine on kiirem igast geomeetrilisest progressioonist.
Mida suurem on α ja väiksem on λ, seda kiirem on astmeline koondumine.

Koonduvuse kirjeldamine

Koondugu jada x_n arvuks x^*.

Kui leidub $q < 1$ nii, et $|x_{n+1} - x^*| \leq q|x_n - x^*|$, siis öeldakse, et x_n koondub **geomeetrilise progressiooni kiirusega**/koondub lineaarselt.

Kui leiduvad $\alpha > 1$ ja $\lambda > 0$ nii, et $|x_{n+1} - x^*| \leq \lambda |x_n - x^*|^\alpha$, siis nimetatakse koondumist α-järku koondumiseks ehk **astmeliseks koondumiseks** ($\alpha = 2$ korral ruutkoondumiseks, $\alpha = 3$ korral kuupkoondumiseks). Piirjuhul $\alpha = 1$, $\lambda < 1$ on tegemist lineaarse koondumisega.
Astmeline koondumine on kiirem igast geomeetrilisest progressioonist.
Mida suurem on α ja väiksem on λ, seda kiirem on astmeline koondumine.

Kui iga $q > 0$ korral $\frac{|x_n - x^*|}{q^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, siis öeldakse, et jada x_n koondub **kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist**.
Kui iga $q \in (0,1)$ korral $\frac{|x_n - x^*|}{q^n} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, siis öeldakse, et jada x_n koondub **aeglasemalt igast geomeetrilisest progressioonist**.

Koonduvuse kirjeldamine

Näide

Vaatleme kolme nulli koonduvat jada: $x_n = 1/2^n$, $y_n = 1/2^{2^n}$ ja $z_n = 1/n$.

Koonduvuse kirjeldamine

Näide

Vaatleme kolme nulli koonduvat jada: $x_n = 1/2^n$, $y_n = 1/2^{2^n}$ ja $z_n = 1/n$.

Kuna $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$, siis $|x_{n+1} - 0| \leq q|x_n - 0|$, kus $q = \frac{1}{2}$. Jada x_n koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Koonduvuse kirjeldamine

Näide

Vaatleme kolme nulli koonduvat jada: $x_n = 1/2^n$, $y_n = 1/2^{2^n}$ ja $z_n = 1/n$.

Kuna $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$, siis $|x_{n+1} - 0| \leq q|x_n - 0|$, kus $q = \frac{1}{2}$. Jada x_n koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Kuna $y_{n+1} = \frac{1}{2^{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{2^n \cdot 2}} = \frac{1}{(2^{2^n})^2} = y_n^2$, siis jada y_n koondumine on ruutkoondumine ($\alpha = 2$, $\lambda = 1$).

Koonduvuse kirjeldamine

Näide

Vaatleme kolme nulli koonduvat jada: $x_n = 1/2^n$, $y_n = 1/2^{2^n}$ ja $z_n = 1/n$.

Kuna $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$, siis $|x_{n+1} - 0| \le q|x_n - 0|$, kus $q = \frac{1}{2}$. Jada x_n koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Kuna $y_{n+1} = \frac{1}{2^{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{2^n \cdot 2}} = \frac{1}{(2^{2^n})^2} = y_n^2$, siis jada y_n koondumine on ruutkoondumine ($\alpha = 2$, $\lambda = 1$).

Näitame, et $\forall q \in (0,1)$ korral $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/n}{q^n} = \infty$, st jada z_n koondub aeglasemalt igast geomeetrilisest progressioonist. Tõepoolest,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{1/n}{q^n} = \lim_{n\to\infty} (\ln 1 - \ln n - n \ln q) = -\lim_{n\to\infty} (\ln n + n \ln q)$$

$$= -\lim_{n\to\infty} n \left(\underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\ln q}_{<0} \right) = \infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{q^n} = \infty$$

Taylori rida/valem/polünoom

Funktsiooni f **Taylori rida punktis *a*** esitub kujul

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots.$$

Funktsiooni f n-astme **Taylori polünoom punktis *a*** esitub kujul

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Taylori valem võimaldab funktsiooni f esitada tema Taylori polünoomi ja jääkliikme summana

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x),$$

kus $\lim\limits_{x\to a} R_n(x) = 0$.

Taylori rida/valem/polünoom

Taylori rea ja polünoomi olemasoluks piisab kui eksisteerivad kõik vajalikud tuletised punktis a.

Jääkliikmele $R_n(x)$ saab anda erinevaid kujusid. Kui f on n korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, x]$ ja $n+1$ korda diferentseeruv vahemikus (a, x), siis leidub $\xi \in (a, x)$ nii, et

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(**jääkliikme Lagrange'i kuju**).

Geomeetrilise rea summa

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad \text{kui } |q| < 1$$