Numbriline integreerimine

Loeng 12–13

MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

6./13.05.2019

Ülesanne 41 Ülesanne 42 Ülesanne 43 Ülesanne 44 Ülesanne 45

Sissejuhatus

Oletame, et on vaja arvutada määratud integraal

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Kui on võimalik leida algfunktsioon F, s.t. $F'(x) = f(x)$, siis võib kasutada Newton–Leibnizi valemit

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Mõnikord ei õnnestu algfunktsiooni leida kui elementaarfunktsiooni, näiteks $\int e^{x^2} dx$ ei ole elementaarfunktsioon. Newton–Leibnizi valemit ei saa kasutada ka siis, kui funktsioonist f on teada vaid lõplik arv väärtusi. Sel juhul kasutatakse ligikaudseid meetodeid. Kui kasutatakse lõplikku hulka funktsiooni f väärtusi integraali leidmiseks, siis nimetatakse vastavat eeskirja **kvadratuurvalemiks**.

Sissejuhatus

Üsna levinud on järgmised kvadratuurvalemid

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i),$$

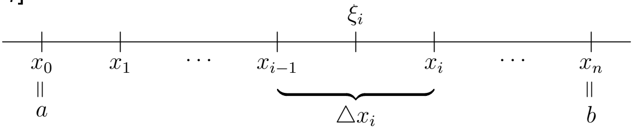
siin argumendi väärtusi x_i nimetatakse kvadratuurvalemi **sõlmedeks**, arve A_i kvadratuurvalemi **kordajateks**, avaldist $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$ **kvadratuursummaks**. Loomulik on eeldada, et $x_i \in [a, b]$.

Sissejuhatus

Olgu f suvaline Riemanni mõttes integreeruv funktsioon. Integraali definitsiooni põhjal

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

kus $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.



Siit saab suure hulga kvadratuurvalemeid

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

kus ξ_i on kvadratuurvalemi sõlmed, Δx_i kordajad ja kvadratuursummaks võetakse integraalsumma.

Sissejuhatus

Seda võtet ei saa kasutada, kui integraal on päratu, s.t. f on tõkestamata või integreerimispiirkond on tõkestamata. Sel juhul kasutatakse kvadratuurvalemeid

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

kus p on **kaalufunktsioon**, mille omadused peegeldavad integraali päratust või integreeritava funktsiooni iseärasusi, ning f on heade omadustega (sile, tõkestatud) funktsioon.

Näiteks päratu integraali

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}} \approx 2.42865$$

korral eraldatakse kaalufunktsioon järgmiselt

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^6}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{p(x)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}}_{f(x)},$$

kus

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} = (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta},$$

$a=-1$, $b=1$, $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$, ning funktsioon f on tõkestatud ja sile.

Sissejuhatus

Enimkasutatavad kaalufunktsioonid

lõigus $[a, b]$: $p(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$,
piirkonnas $[0, \infty)$: $p(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$,
piirkonnas $(-\infty, \infty)$: $p(x) = e^{-x^2}$ või $p(x) = e^{-|x|}$.

Tavaliselt nõutakse kaalufunktsioonilt teooria arendamisel, et

- $p(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, eksisteerib $\int_a^b p(x)dx > 0$,
- eksisteerivad $\int_a^b p(x)x^k dx$, $k = 1, 2, \ldots$.

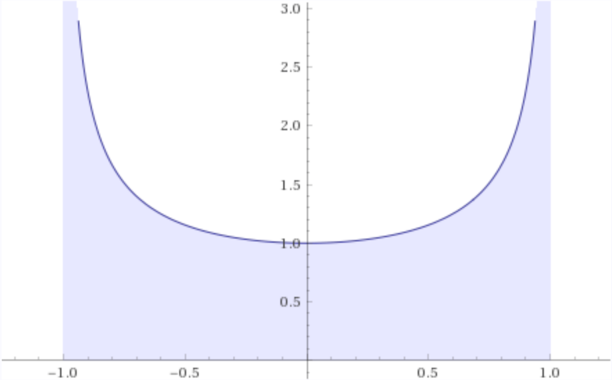
Nendest eeldustest järeldub, et iga polünoomi P korral eksisteerib $\int_a^b p(x)P(x)dx$.

Sissejuhatus

Näide

Vaatleme enimlevinud kaalufunktsioonide korral esimese eelduse täidetust.

Olgu $p(x) = (x - (-1))^{-\frac{1}{2}}(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$, siis $\int_{-1}^{1} p(x)dx = \pi$.

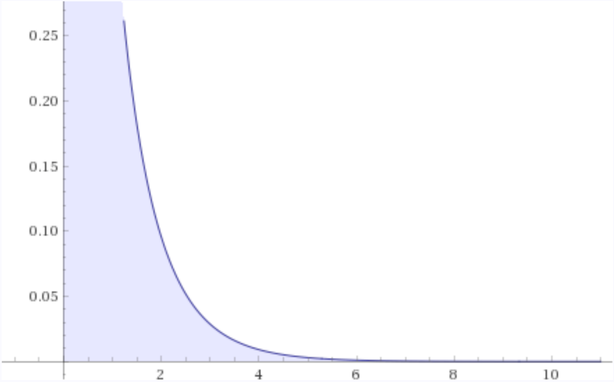


Sissejuhatus

Näide

Vaatleme enimlevinud kaalufunktsioonide korral esimese eelduse täidetust.

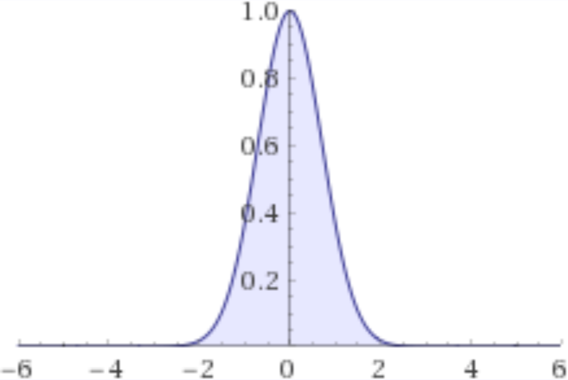
Olgu $p(x) = x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}$, siis $\int_0^\infty p(x)dx = \sqrt{\pi}$.



Näide

Vaatleme enimlevinud kaalufunktsioonide korral esimese eelduse täidetust.

Olgu $p(x) = e^{-x^2}$, siis $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \sqrt{\pi}$.



Sissejuhatus

Enne üldise teooria juurde asumist vaatleme mõningaid konkreetseid kvadratuurvalemeid integraali $\int_a^b f(x)dx$ arvutamiseks. Neis on kvadratuurvalemi sõlmed x_i valitud ühtlasel võrgul ning funktsiooni f on lähendatud Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiga, st

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} + \frac{f^{(n+1)(\xi(x))}}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

mingi n korral. Jääkliikme sellise esituse korral on eeldatud, et $f \in C^{n+1}[a, b]$.

Trapetsvalem

Olgu $n = 1$, $x_0 = a$ ja $x_1 = b$. Lähendame funktsiooni $f \in C^2[a, b]$ lineaarpolünoomiga, siis

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{P_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_0)(x - x_1)}_{R_1(x)}$$

ning

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_1)dx + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\underbrace{f''(\xi(x))}_{\text{pid}}\underbrace{(x - x_0)(x - x_1)}_{\text{säilitab märki } [x_0, x_1]}dx$$

Trapetsvalem

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_1)dx + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{f''(\xi(x))}_{\text{pid}}\underbrace{(x - x_0)(x - x_1)}_{\text{säilitab märki } [x_0, x_1]}dx$$

$$= \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}\frac{(x - x_1)^2}{2}\bigg|_{x_0}^{x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}\frac{(x - x_0)^2}{2}\bigg|_{x_0}^{x_1}$$

$$+\frac{f''(\eta)}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{(x_0 + x_1)x^2}{2} + x_0x_1x\right)\bigg|_{x_0}^{x_1}$$

$$= -f(x_0)\frac{x_0 - x_1}{2} + f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{2}$$

$$+\frac{f''(\eta)}{2}\left(\frac{x_1^3 - x_0^3}{3} - \frac{(x_0 + x_1)(x_1^2 - x_0^2)}{2} + x_0x_1(x_1 - x_0)\right)$$

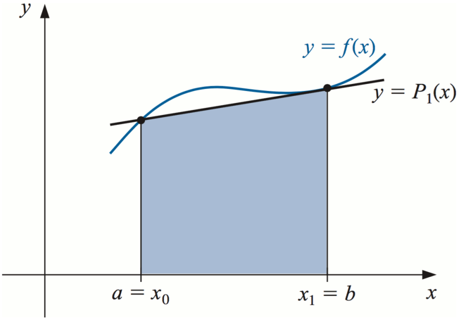
Trapetsvalem

$$
\begin{aligned}
&= -f(x_0)\frac{x_0 - x_1}{2} + f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{2} \\
&+ \frac{f''(\eta)}{2}\left(\frac{x_1^3 - x_0^3}{3} - \frac{(x_0 + x_1)(x_1^2 - x_0^2)}{2} + x_0 x_1 (x_1 - x_0)\right) \\
&= \frac{x_1 - x_0}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) \\
&+ \frac{f''(\eta)}{2}(x_1 - x_0)\left(\frac{x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2}{3} - \frac{x_1^2 + 2x_1 x_0 + x_0^2}{2} + x_0 x_1\right) \\
&= \frac{x_1 - x_0}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) \\
&+ \frac{f''(\eta)}{2}(x_1 - x_0)\left(-\frac{x_1^2 - 2x_1 x_0 + x_0^2}{6}\right) \\
&= \frac{x_1 - x_0}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) - \frac{(x_1 - x_0)^3}{12} f''(\eta).
\end{aligned}
$$

Trapetsvalem

Tähistame $h = x_1 - x_0$. Eeldusel $f \in C^2[a,b]$ oleme saanud trapetsvalemi kujul

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$



Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Tuletuskäigus kasutasime järgmist teoreemi (MA III)

Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Kui f on pidev, g integreeruv ja säilitab märki (s.t. $g(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral või $g(x) \leq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral), siis leidub $\xi \in (a, b)$ nii, et

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Näide 1

Vaatleme integraali $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$. Kui $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, siis teoreemi eeldused on täidetud ning leidub $\xi \in [-1, 1]$ nii, et

$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 dx = f(\xi) \int_{-1}^{1} dx = 2f(\xi), \quad \xi = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Tuletuskäigus kasutasime järgmist teoreemi (MA III)

Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Kui f on pidev, g integreeruv ja säilitab märki (s.t. $g(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral või $g(x) \leq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral), siis leidub $\xi \in (a, b)$ nii, et

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Näide 2

Vaatleme integraali $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$. Kui $f(x) = x$, $g(x) = x$, siis märgi säilitamise eeldus ei ole täidetud ning ei leidu $\xi \in [-1, 1]$ nii, et

$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^1 x^2 dx = f(\xi) \int_{-1}^1 x\,dx = \xi \cdot 0.$$

Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Tuletuskäigus kasutasime järgmist teoreemi (MA III)

Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Kui f on pidev, g integreeruv ja säilitab märki (s.t. $g(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral või $g(x) \leq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral), siis leidub $\xi \in (a, b)$ nii, et

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Näide 3

Vaatleme integraali $\int_{-3}^4 x^2dx = \frac{91}{3}$. Kui $f(x) = x$, $g(x) = x$, siis märgi säilitamise eeldus ei ole täidetud ning ei leidu $\xi \in [-3, 4]$ nii, et

$$\frac{91}{3} = \int_{-3}^4 x^2dx = f(\xi)\int_{-3}^4 x\,dx = \xi \cdot \frac{7}{2} \qquad \left(\xi = \frac{182}{21} = 8\frac{2}{3}\right).$$

Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Tuletuskäigus kasutasime järgmist teoreemi (MA III)

Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Kui f on pidev, g integreeruv ja säilitab märki (s.t. $g(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral või $g(x) \leq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral), siis leidub $\xi \in (a, b)$ nii, et

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Erijuht teoreemist, kus $g(x) = 1$ iga $x \in [a, b]$ korral, on laialdasemalt tuntud. Sel juhul

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a), \quad \xi \in (a, b).$$

Trapetsvalem

Lisaks kasutasime tuletuskäigus fakti, et kui $f \in C^2[a,b]$, siis funktsioon $x \to f''(\xi(x))$ on pidev. Tegemist on erijuhuga ülesannetest 32–33, kus oli vaja näidata, et eeldusel $f \in C^{n+1}[a,b]$ on funktsioon $x \to f^{n+1}(\xi(x))$ pidev.

Trapetsvalem liitkujul

Liitvalemi tuletamiseks jaotame lõigu $[a, b]$ võrdseteks osadeks pikkusega $h = \frac{b-a}{n}$, osalõikudel tekivad otspunktid $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$. Avaldame

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

ja rakendame igal osalõigul eespool saadud trapetsvalemit

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Kokku saame valemi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \\ &= \frac{b-a}{2n}(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi),\end{aligned}$$

kus $f_i = f(x_i)$.

Trapetsvalem liitkujul

Näidata on vaja veel, et jääkliikme

$$R_n(f) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

saab esitada kujul $R_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$.

Kuna

$$n \min_{1\le i\le n} f''(\xi_i) \le \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \le n \max_{1\le i\le n} f''(\xi_i),$$

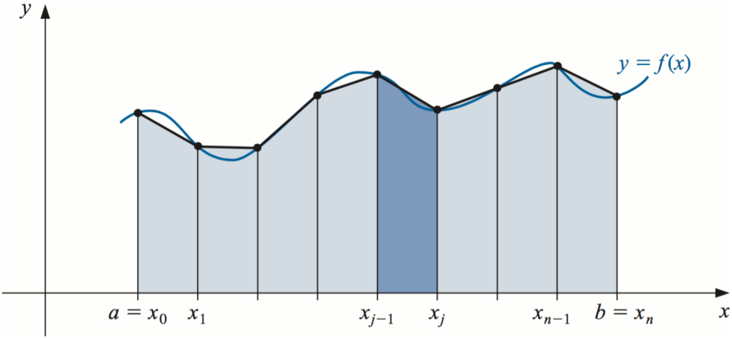
siis

$$\min_{\xi_1\le x\le \xi_n} f''(x) \le \min_{1\le i\le n} f''(\xi_i) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \le \max_{1\le i\le n} f''(\xi_i) \le \max_{\xi_1\le x\le \xi_n} f''(x)$$

ning f'' pidevuse tõttu leidub $\xi \in (a, b)$ nii, et $f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$.

Trapetsvalem liitkujul

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi) \quad \xi \in (a,b).$$



Simpsoni valem

Olgu $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ ja $h = \frac{b-a}{2}$. Lähendame funktsiooni f Lagrange'i ruutpolünoomiga, siis

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{2} f(x_i) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}_{P_2(x)} + \underbrace{\frac{f'''(\xi(x))}{6} \prod_{j=0}^{2} (x - x_i)}_{R_2(x)}$$

ning

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = {} & \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2)dx + \frac{f(x_1)}{-h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_2)dx \\ & + \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)dx \\ & + \frac{1}{6} \int_{x_0}^{x_2} f'''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)dx.\end{aligned}$$

Simpsoni valem

Vajaminevad integraalid on kõik lihtsasti leitavad

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx = \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) d(x - x_2)$$

$$= \int_{-2h}^{0} (y + h) y \, dy = \left(\frac{y^3}{3} + h\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{-2h}^{0} = \frac{8}{3}h^3 - 2h^3 = \frac{2}{3}h^3,$$

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_2) dx = \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_2) d(x - x_2)$$

$$= \int_{-2h}^{0} (y + 2h) y \, dy = \left(\frac{y^3}{3} + hy^2 \right) \Bigg|_{-2h}^{0} = \frac{8}{3}h^3 - 4h^3 = -\frac{4}{3}h^3,$$

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1) dx = \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1) d(x - x_0)$$

$$= \int_{0}^{2h} y(y - h) dy = \left(\frac{y^3}{3} - h\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{0}^{2h} = \frac{8}{3}h^3 - 2h^3 = \frac{2}{3}h^3,$$

Simpsoni valem

kvadratuursumma esitub kujul

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{f(x_0)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx + \frac{f(x_1)}{-h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)dx \\ &\quad + \frac{f(x_2)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)dx \\ &= \frac{f(x_0)}{2h^2}\frac{2}{3}h^3 + \frac{f(x_1)}{-h^2}\left(-\frac{4}{3}h^3\right) + \frac{f(x_2)}{2h^2}\frac{2}{3}h^3 \\ &= \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big).\end{aligned}$$

Simpsoni valem

Jääkliikme korral ei saa integraalarvutuse keskväärtusteoreemi kasutada, sest $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ muudab integreerimispiirkonnas märki, kuid integreerides piirkondades $[x_0, x_1]$ ja $[x_1, x_2]$ eraldi, saame

$$\int_{x_0}^{x_1} f'''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)dx$$

$$= f'''(\xi_1) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)d(x - x_1)$$

$$= f'''(\xi_1) \int_{-h}^{0} (y + h)y(y - h)dy = f'''(\xi_1) \left(\frac{y^4}{4} - h^2 \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-h}^{0} = f'''(\xi_1) \frac{1}{4} h^4,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f'''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)dx = \ldots = -f'''(\xi_2) \frac{1}{4} h^4$$

ning Simpsoni valemi kujul

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) + \frac{h^4}{24}\big(f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)\big).$$

Simpsoni valem

Praegusel juhul vealiige on kujul Ch^4. Parema vealiikme hinnangu (Ch^5) saame kasutades tuletuskäigus Taylori polünoomi. Olgu endiselt $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ ja $h = \frac{b-a}{2}$. Kasutame Taylori arendist

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 \\
+ \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x - x_1)^4,
\end{aligned}
$$

siis

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \Bigg(f(x_1)(x - x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 \\
+ \frac{f'''(x_1)}{24}(x - x_1)^4 \Bigg) \Bigg|_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4 dx
\end{aligned}
$$

Simpsoni valem

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \left(f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 \right.$$

$$\left. + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \right) \Bigg|_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx$$

$$= 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\eta_1)}{120}(x-x_1)^5 \Bigg|_{x_0}^{x_2}$$

$$= 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(x_1) + \frac{h^5}{60} f^{(4)}(\eta_1).$$

Kasutasime siin integraalarvutuse keskväärtusteoreemi ning ülesannet 44. Asendame $f''(x_1)$ diferentsvalemiga

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}\left(f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)\right) - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\eta_2),$$

saame

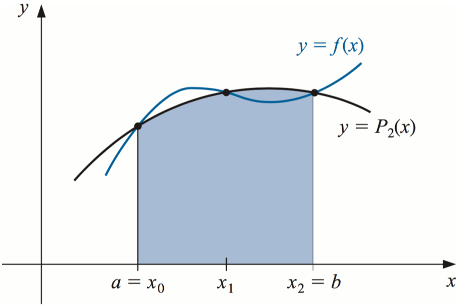
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + \frac{h^5}{60} f^{(4)}(\eta_1) - \frac{h^5}{36} f^{(4)}(\eta_2).$$

Simpsoni valem

Saab näidata, et jääkliige esitub kujul $-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$. Seega eeldusel $f \in C^4[a, b]$ oleme saanud Simpsoni valemi kujul

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b),$$

kus $h = \frac{b-a}{2}$.



Simpsoni valem

Ülesanne* (1 p) Tuletada Simpsoni valem koos vealiikmega kasutades esitust

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi)$$

ning fakti, et Simpsoni valem on täpne kuni 3. astme polünoomide korral (st jääkliige on null). Leidke a_0, a_1, a_2 kasutades funktsioone $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3$, seejärel leidke k rakendades valemit funktsioonile $f(x) = x^4$.

Simpsoni valem liitkujul

Liitvalemi tuletamiseks jaotame lõigu $[a, b]$ n osaks, kus nüüd valime n paarisarvu, kuid ikka olgu $h = \frac{b-a}{n}$. Avaldame integraali $\int_a^b f(x)dx$ summana integraalidest üle osalõikude $[a, a+2h]$, $[a+2h, a+4h]$, $\ldots$, $[b-2h, b]$ ning igale osaintegraalile rakendame Simpsoni valemit. Tulemusena saame

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{h}{3}(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})) - \sum_{i=1}^{n/2} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i).$$

Analoogiliselt trapetsvalemi juhtumiga keskmistame siingi $f^{(4)}$ väärtused

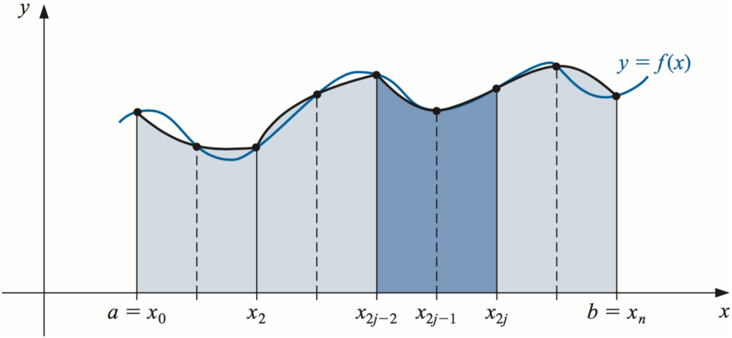
$$\sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) = \frac{n}{2} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Kokkuvõttes saame valemi

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 4f_{n-1} + f_n) - \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi).$$

Simpsoni valem liitkujul

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 4f_{n-1} + f_n) - \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi).$$



Näide

Näide

Kasutame trapetsvalemit ja Simpsoni valemit (lihtkujul) integraali $\int_0^2 f(x)dx$ leidmiseks.

Trapetsvalem: $\int_0^2 f(x)dx \approx f(0) + f(2)$, $R_1(F) = -\frac{2}{3}f''(\xi)$
Simpsoni valem: $\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}(f(0) + 4f(1) + f(2))$, $R_2(f) = -\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)$

$f(x)$	x^2	x^4	$(x+1)^{-1}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
Täpne väärtus	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
Trapetsvalem	4.000	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389
Simpsoni valem	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemid

Definitsioon

Kvadratuurvalemit

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R_n(f) \tag{1}$$

nimetatakse interpolatsioonitüüpi valemiks, kui

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \int_a^b p(x)P_n(x)dx,$$

kus $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, ja P_n aste ei ületa arvu n, st kvadratuursumma on sõlmedega x_i interpolatsioonipolünoomi integraal kaaluga p.

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemid

Lagrange'i valemi põhjal $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{ni}(x)$, seepärast

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \int_a^b p(x)\left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{ni}(x)\right)dx = \sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b p(x)\ell_{ni}(x)dx\right)f(x_i)$$

iga funktsiooni f korral parajasti siis, kui $A_i = \int_a^b p(x)\ell_{ni}(x)dx$. Sellega on tõestatud

Lause

Kvadratuurvalem (1) on interpolatsioonitüüpi parajasti siis, kui tema kordajad avalduvad $A_i = \int_a^b p(x)\ell_{ni}(x)dx$.

Niisiis on interpolatsioonitüüpi valemites kordajad üheselt määratud, kui sõlmed on antud (muidugi peame silmas, et a, b ja p on fikseeritud).

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemid

Interpolatsioonivalemist $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ saame

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)P_n(x)dx + \int_a^b p(x)R_n(x)dx,$$

millest järeldub, et $\int_a^b p(x)P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ parajasti siis, kui $R_n(f) = \int_a^b p(x)R_n(x)dx$. Siit saame järgmise väite.

Lause

Kvadratuurvalem (1) on interpolatsioonitüüpi parajasti siis, kui tema jääkliige avaldub interpolatsioonivalemi jääkliikme kaudu kujul

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)R_n(x)dx.$$

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemid

Kvadratuurvalemit nimetatakse **täpseks** funktsiooni f korral, kui f puhul integraal ja kvadratuursumma on võrdsed ehk jääkliige $R_n(f)$ on võrdne nulliga.

Teoreem

Kvadratuurvalem (1) on interpolatsioonitüüpi parajasti siis, kui ta on täpne kõigi ülimalt n astme polünoomide korral.

Tõestus. "$\Leftarrow$" Kui (1) on täpne kõigi n astme polünoomide korral, siis on ta täpne ka Lagrange'i fundamentaalpolünoomide ℓ_{ni} korral. Seepärast

$$\int_a^b p(x)\ell_{ni}(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j \ell_{ni}(x_j) = A_i,$$

sest $\ell_{ni}(x_j) = \delta_{ij}$. Seega (1) on interpolatsioonitüüpi.

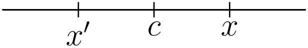
Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemid

"$\Rightarrow$" Olgu (1) interpolatsioonitüüpi. Valime vabalt polünoomi P, mille aste ei ületa arvu n. Tema interpolatsioonipolünoomiks on tema ise, sest tema aste ei ületa arvu n, ta rahuldab interpolatsioonitingimusi ja interpolatsioonipolünoom on üheselt määratud. Seega interpolatsioonivalemi jääkliige $R_n(x) = 0$ ja kvadratuurvalemi jääkliige $R_n(P) = \int_a^b p(x)R_n(x)dx = 0$, mis tähendab, et (1) on täpne polünoomi P korral. □

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemid

Meenutame, et funktsiooni f nimetatakse paarisfunktsiooniks, kui $f(-x) = f(x)$, ja paarituks funktsiooniks, kui $f(-x) = -f(x)$, iga x korral funktsiooni f määramispiirkonnast D, mis peab olema sümmeetriline punkti 0 suhtes: kui $x \in D$, siis $-x \in D$.

Üldisemalt, funktsiooni f nimetatakse **paarisfunktsiooniks punkti** c **suhtes**, kui $f(x') = f(x)$ iga x ja x' korral, mis paiknevad sümmeetriliselt punkti c suhtes: $x - c = c - x'$ ehk $x' = 2c - x$. Loomulik on eeldada, et funktsiooni f määramispiirkond D on siin sümmeetriline punkti c suhtes, s.t. $x \in D$ korral $2c - x \in D$. Analoogiliselt defineeritakse **paaritu funktsioon mingi punkti suhtes**.



Ülesanne

41. Tõestada, et kui interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemis kaalufunktsioon p on paaris integreerimispiirkonna keskpunkti $c = \frac{a+b}{2}$ suhtes ja sõlmed paiknevad sümmeetriliselt c suhtes, siis sümmeetrilistele sõlmedele vastavad kordajad on võrdsed, s.t. kui $x_i - c = c - x_j$, siis $A_i = A_j$.

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemid

Märgime veel, et kui $f \in C^{n+1}[a,b]$, siis interpolatsioonivalemi jääkliige avaldub kujul

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

ning interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemis jääkliige saab kuju

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b p(x) f^{(n+1)}(\xi(x))\omega_n(x)dx.$$

Newton–Cotesi valemid

Newton–Cotesi valemid on

- interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemid,
- milles integreerimispiirkond on lõik, s.t. $a, b \in \mathbb{R}$,
- $p(x) = 1$ iga $x \in [a, b]$ korral,
- $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Newton–Cotesi valemites on vabadus ainult a, b ja n valikus.

Newton–Cotesi valemid

Newton–Cotesi valemid on kujul

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R_n(f).$$

Kuna nad on interpolatsioonitüüpi, siis $A_i = \int_a^b \ell_{ni}(x)dx$. Arvestades ℓ_{ni} kuju, saame

$$A_i = \int_a^b \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}dx.$$

Teeme muutujavahetuse $x = a + th$, kus $h = \frac{b-a}{n}$, siis $dx = h\,dt$,

$$x - x_j = a + th - (a + jh) = (t - j)h,$$
$$x_i - x_j = a + ih - (a + jh) = (i - j)h$$

ning integraali rajad a ja b asenduvad vastavalt arvudega 0 ja n. Selle tulemusena arvutame

$$\begin{aligned}
A_i &= \int_a^b \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}dx \\
&= h\int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-(i-1))(t-(i+1))\dots(t-n)}{i(i-1)\dots1\cdot(-1)\dots(i-n)}dt \\
&= \frac{b-a}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n t(t-1)\dots(t-(i-1))(t-(i+1))\dots(t-n)dt \\
&=: (b-a)B_i,
\end{aligned}$$

kus arvud B_i ei sõltu integreerimispiirkonnast $[a, b]$, küll sõltuvad nad arvust n, seepärast kirjutame $B_i = B_{ni}$, kui n ei ole fikseeritud.

Newton–Cotesi valemid

Niisiis on Newton–Cotesi valemid kirjutatavad kujul

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} B_i f(x_i) + R_n(f),$$

kus

$$B_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n t(t-1)\dots(t-(i-1))(t-(i+1))\dots(t-n)dt.$$

Esitame mõned kordajate B_i omadused.

1. $\sum_{i=0}^{n} B_{ni} = 1$, selle saame, kui võtame kvadratuurvalemis $f(x) \equiv 1$, selle funktsiooni kui 0 astme polünoomi korral on kvadratuurvalem täpne.
2. $B_{ni} = B_{n,n-i}$ ülesande 41 põhjal.
3. $\sum_{i=0}^{n} |B_{ni}| \to \infty$, kui $n \to \infty$; seda väidet siin ei tõestata.

Newton–Cotesi valemid

Omadused 1) ja 3) lubavad väita, et arvu n kasvades hakkavad esinema negatiivsed kordajad, esimene neist ilmneb juhul $n = 8$ ja $n \geq 10$ korral on neid juba alati. Omadus 3) tähendab veel seda, et arvu n kasvades suureneb andmetes esinevate ebatäpsuste mõju. Näitame seda.

Oletame, et arvude $f(x_i)$ asemel on leitud $\tilde{f}_i$ nii, et $|\tilde{f}_i - f(x_i)| \leq \varepsilon$. Kvadratuursumma $\sum\limits_{i=0}^{n} B_{ni} f(x_i)$ asemel arvutatakse $\sum\limits_{i=0}^{n} B_{ni} \tilde{f}_i$. Siis

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n} B_{ni} \tilde{f}_i - \sum_{i=0}^{n} B_{ni} f(x_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n} B_{ni} \left(\tilde{f}_i - f(x_i) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} |B_{ni}| \left| \tilde{f}_i - f(x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |B_{ni}| \varepsilon \to \infty, \end{aligned}$$

kui $n \to \infty$.

Newton–Cotesi valemite jääkliige

Kui $f \in C^{n+1}[a, b]$, siis interpolatsioonivalemi jääkliige avaldub kujul

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

millest saame Newton-Cotesi valemi jääkliikme jaoks esituse

$$R_n(f) = \int_a^b R_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x))\omega_n(x)dx.$$

Kui tähistada $M_{n+1} = \max\limits_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|$, saaksime hinnangu

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1} \int_a^b |\omega_n(x)|dx,$$

kuid see on oluliselt üle hinnatud, sest ω_n muudab sõlmest läbiminekul märki (selline arutelu sobib ka teiste interpolatsioonitüüpi valemite korral, kus üldjuhul esineb ka kaalufunktsioon p). Newton–Cotesi valemites saab jääkliikme teisendada märksa sobivamale kujule kui üldjuhul.

Newton–Cotesi valemite jääkliige

Olgu Newton–Cotesi valemis $n = 1$ ja $f \in C^2[a, b]$. Siis

$$
\begin{aligned}
R_1(f) &= \frac{1}{2!} \int_a^b f''(\xi(x))(x-a)(x-b)dx \\
&= \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x-a)(x-b)d(x-a) \\
&= \frac{1}{2} f''(\xi) \int_0^{b-a} y(y-(b-a))dy \\
&= \frac{1}{2} f''(\xi) \left(\frac{y^3}{3} - (b-a)\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{b-a} = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).
\end{aligned}
$$

Kasutasime siin integraalarvutuse keskväärtusteoreemi (funktsioon $x \to f''(\xi(x))$ on pidev ja kehtib ka $(x-a)(x-b) \le 0$ iga $x \in [a, b]$ korral).

Newton–Cotesi valemite jääkliige

Üldiselt saab tõestada (tuginedes keskväärtusteoreemile, aga arutelu on küllalt tehniline), et kui n on paaris, siis

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b (x-c)\omega_n(x)dx,$$

kus $c \in \mathbb{R}$ on suvaline; kui aga n on paaritu, siis

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega_n(x)dx.$$

Muidugi kehtivad need jääkliikme esitused juhul, kui funktsioonilt f nõuda sobivat siledust: paaris n korral $f \in C^{n+2}[a,b]$, paaritu n korral $f \in C^{n+1}[a,b]$.

Newton–Cotesi valemite jääkliige

Nendele tulemustele tuginedes saadakse

$$
\begin{aligned}
R_2(f) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b (x-a)(x-c)^2(x-b)dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\int_a^b (x-c+h)(x-c)^2(x-c-h)d(x-c) \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\int_{-h}^{h} (y+h)y^2(y-h)dy \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\left(\frac{y^5}{5}-h^2\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-h}^{h} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^5\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi),
\end{aligned}
$$

kus $c = \frac{a+b}{2}$, $h = \frac{b-a}{2}$,

Newton–Cotesi valemite jääkliige

$$
\begin{aligned}
R_3(f) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b (x-a)(x-(a+h))(x-(a+2h))(x-(a+3h))dx \\
&\overset{x=a+th}{=} \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^3 th(t-1)h(t-2)h(t-3)h\,h\,dt \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}h^5\int_0^3 (t^4-6t^3+11t^2-6t)dt \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}h^5\left(\frac{t^5}{5}-6\frac{t^4}{4}+11\frac{t^3}{3}-6\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^5\left(\frac{243}{5}-\frac{243}{2}+99-27\right) \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^5\left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 f^{(4)}(\xi), \quad h=\frac{b-a}{3}.
\end{aligned}
$$

Newton-Cotesi valemid juhul $n = 1, 2, 3$ ja $n = 0$

Vaatleme Newton-Cotesi valemeid

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} B_i f(x_i) + R_n(f),$$

kus $\sum\limits_{i=0}^{n} B_i = 1$ ja $B_i = B_{n-i}$, lisaks on valem täpne kõigi ülimalt n-astme polünoomide korral.

Newton–Cotesi valemid juhul $n = 1, 2, 3$

Olgu $n = 1$, siis kordajad B_i rahuldavad seoseid

$$\begin{aligned} B_0 + B_1 &= 1, \\ B_0 &= B_1, \end{aligned}$$

millest järeldub, et $B_0 = B_1 = \frac{1}{2}$. Kvadratuurvalem on

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b),$$

kusjuures selline on jääkliige, kui $f \in C^2[a, b]$. Tegemist on trapetsvalemiga.

Newton–Cotesi valemid juhul $n = 1, 2, 3$

Olgu $n = 2$, siis $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$. Kordajate omadustest saame

$$\begin{aligned} B_0 + B_1 + B_2 &= 1, \\ B_0 &= B_2. \end{aligned}$$

Kordajad B_i ei sõltu lõigust $[a, b]$, arvutuste lihtsuse huvides võtame hetkeks $[a, b] = [0, 2]$ ja integreeritavaks polünoomi $f(x) = x^2$, kusjuures teame, et siis valem on täpne. Saame

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} = 2(B_0 \cdot 0 + B_1 \cdot 1 + B_2 \cdot 4) \text{ ehk } B_1 + 4B_2 = \frac{4}{3}.$$

Arvestades veel eespool toodud võrdustest saadavat $B_1 + 2B_2 = 1$, leiame, et $B_0 = B_2 = \frac{1}{6}$, $B_1 = \frac{4}{6}$. Oleme saanud Simpsoni valemi

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi).$$

Newton–Cotesi valemid juhul $n = 1, 2, 3$

Olgu $n = 3$, siis $B_0 = B_3 = \frac{1}{8}$, $B_1 = B_2 = \frac{3}{8}$. Tähistades $h = \frac{b-a}{3}$, saame

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)) - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi),$$

seda nimetatakse Newtoni $\frac{3}{8}$–valemiks.

42. Näidata, kuidas leitakse kordajad $B_0, \ldots, B_3$ Newton–Cotesi valemis juhul $n = 3$.

Newton–Cotesi valemid juhul $n = 1, 2, 3$

Liitvalemi saamiseks võtame kolmega jaguva arvu n, siis $h = \frac{b-a}{n}$ ja lahutame integraali $\int_a^b f(x)dx$ osaintegraalideks üle lõikude $[a, a+3h]$, $[a+3h, a+6h]$, ..., $[b-3h, b]$. Seejärel rakendame igale osaintegraalile Newtoni $\frac{3}{8}$–valemit ja keskmistame jääkliikmes tekkiva $f^{(4)}$ väärtuste summa, tulemusena saame

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3(b-a)}{8n}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \ldots + 3f_{n-1} + f_n) - \frac{(b-a)^5}{80n^4} f^{(4)}(\xi).$$

Newton–Cotesi valemid juhul $n = 1, 2, 3$

Kui võrrelda Simpsoni ja Newtoni $\frac{3}{8}$–valemi jääkliikmeid, vastavalt

$$-\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \quad \text{ja} \quad -\frac{(b-a)^5}{80n^4} f^{(4)}(\xi),$$

siis näiteks $n = 12$ korral tuleb kasutada esimest. Kui aga $n = 9$, siis saab kasutada vaid Newtoni $\frac{3}{8}$–valemit, Simpsoni valemit mitte.

Newton–Cotesi valemid juhul $n = 1, 2, 3$

Siiani vaadeldud valemite jääkliikmetest saab järeldada, et protsessis $h \to 0$ või $n \to \infty$ trapetsvalemis kvadratuursumma koondub integraaliks, kui $f \in C^2[a, b]$, samuti Simpsoni ja Newtoni $\frac{3}{8}$–valemis, kui $f \in C^4[a, b]$. Tegelikult toimub koondumine iga Riemanni mõttes integreeruva funktsiooni korral. Näiteks trapetsvalemis

$$\begin{aligned}
&\frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n) = \\
&\qquad = \frac{1}{2}h(f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}) + \frac{1}{2}h(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) \to \\
&\qquad \to \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,
\end{aligned}$$

sest kvadratuursumma jaotasime kaheks liidetavaks, mis mõlemad on integraalsummad kordajaga $\frac{1}{2}$: esimesel summal on võetud funktsiooni väärtused iga osalõigu vasakpoolses otspunktis, teisel summal aga iga osalõigu parempoolses otspunktis.

Ülesanne

43. Tõestada, et Simpsoni ja Newtoni $\frac{3}{8}$–valemis toimub koondumine iga Riemanni mõttes integreeruva funktsiooni korral.

Ristkülikvalem

Vaatleme kvadratuurvalemit

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + R_0(f),$$

s.t. kasutatakse ainult ühte sõlme x_0. Määrame kordaja A_0 ja sõlme x_0 nii, et valem oleks täpne võimalikult kõrge astme polünoomide korral. Kui $f(x) = 1$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis tema puhul täpsus annab $\int_a^b f(x)dx = b - a = A_0 \cdot 1$, mistõttu $A_0 = b - a$. Kui $f(x) = x$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis $\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2}$, kvadratuursumma on $(b - a)x_0$, integraali ja kvadratuursumma võrdumine annab $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Ristkülikvalem

Eeldame, et $f \in C^2[a,b]$ ja püüame leida jääkliikmele sobivat esitust. Taylori arendist kasutades

$$
\begin{aligned}
R_0(f) &= \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(x_0) \\
&= \int_a^b \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-x_0)^2 \right) dx \\
&\quad - (b-a)f(x_0) \\
&= f'(x_0) \underbrace{\int_a^b (x-x_0)dx}_{=0} + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi(x))(x-x_0)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Edasises teisenduses tugineme asjaolule, et funktsioon $x \to f''(\xi(x))$ on pidev (vt ül 44), siis saame kasutada integraalarvutuse keskväärtusteoreemi.

Ristkülikvalem

Seega

$$R_0(f) = \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x - x_0)^2 dx = \frac{1}{2} f''(\xi) \frac{(x - \frac{a+b}{2})^3}{3} \Bigg|_a^b = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

Selliselt oleme saanud ristkülikvalemi

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

Ülesanne

44. Tõestada, et Taylori valemis

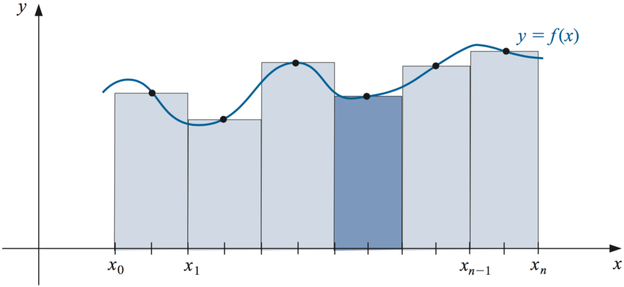
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}(x - x_0)^n$$

on funktsioon $x \to f^{(n)}(\xi(x))$ pidev, kui $f \in C^n[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mingi $\delta > 0$ korral.

Ristkülikvalem

Ristkülikvalem liitvalemina esitub kujul

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\ldots+f\left(b-\frac{h}{2}\right)\right) + \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi).$$



On selge, et ristkülikvalemis kvadratuursumma koondub integraaliks iga Riemanni mõttes integreeruva funktsiooni korral, sest kvadratuursumma on ise integraalsumma, seega eeldus $f \in C^2[a, b]$ ei ole koondumiseks tarvilik.

Ülesanne

45. Kas trapetsvalem, Simpsoni valem, Newtoni $\frac{3}{8}$–valem, ristkülikvalem (liitvalemid) on interpolatsioonitüüpi?

Ülesanne* (1 p) Leidke kordajad ja jääkliige kvadratuurvalemis

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f\left(\frac{3}{4}\right)$$

eeldusel, et see on täpne võimalikult kõrge astme polünoomide korral. Võrrelge saadud valemit Simpsoni valemiga.

Ülesanne* (0.5 p) Trapetsvalem on täpne 1. astme polünoomide korral. Kas saab leida kvadratuurvalemi kujul

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A\big(f(x_0) + f(x_1)\big),$$

mis oleks täpne kõigi kuni 2. astme polünoomide korral? (Vaja on määrata A, x_0 ja x_1.)