Numbriline integreerimine

Loeng 14

MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

20.05.2019

Ülesanne 46 Ülesanne 47

Kvadratuurvalemi jääkliikme peaosa

Vaatleme kvadratuurvalemit

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R_h(f),$$

kus $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$, $A_i = A_{ni}$ ja peame silmas protsessi, kus n ja h muutuvad nii, et $n \to \infty$ ja $h \to 0$.

Definitsioon

Kui küllalt sileda funktsiooni f korral $R_h(f) = K(f)h^q + \varrho_h(f)$, kus $\varrho_h(f) = O(h^{q+1})$, $K(f)$ on konstant, mis ei sõltu arvust h, seejuures eksisteerib sile funktsioon f nii, et $K(f) \neq 0$, siis osa $K(f)h^q$ nimetatakse jääkliikme peaosaks.

Kvadratuurvalemi jääkliikme peaosa

Leiame trapetsvalemi jääkliikme peaosa. Eespool nägime, et

$$R_h(f) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i),$$

kus $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Kasutame siin Taylori arendist

$$f''(\xi_i) = f''\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f'''(\eta_i)\left(\xi_i - \left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right),$$

$\eta_i \in \left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, \xi_i\right)$ või $\eta_i \in \left(\xi_i, x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$. Siis

$$\begin{aligned}R_h(f) &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{12}\left(f''\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f'''(\eta_i)\left(\xi_i - \left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)\right) \\ &= -\frac{h^2}{12}\sum_{i=1}^{n} hf''\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{12} f'''(\eta_i)\left(\xi_i - \left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Kvadratuurvalemi jääkliikme peaosa

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{h^2}{12}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} hf''\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)}_{\text{ristkülikvalem}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{h^3}{12}f'''(\eta_i)\underbrace{\left(\xi_i-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)}_{|\ldots|\le\frac{h}{2}} \\
&= -\frac{h^2}{12}\left(\int_a^b f''(x)dx - \frac{b-a}{24}h^2 f^{(4)}(\xi)\right) + O(h^3) \\
&= \frac{f'(a)-f'(b)}{12}h^2 + O(h^4) + O(h^3) \\
&= K(f)h^2 + O(h^3),
\end{aligned}
$$

kus $K(f) = \frac{1}{12}(f'(a)-f'(b))$.

Eeldusel $f \in C^4[a,b]$ trapetsvalemis $q = 2$ ning jääkliikme peaosa

$$K(f)h^q = \frac{1}{12}\left(f'(a)-f'(b)\right)h^2.$$

Kvadratuurvalemi jääkliikme peaosa

46. Leida Simpsoni valemi ja Newtoni $\frac{3}{8}$–valemi jääkliikme peaosad.

Jääkliikme peaosa mõistet saab kasutada ka ristkülikvalemi korral, kus üldisemalt võib vaadelda valemeid

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R_h(f),$$

$h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = x_1 + (i-1)h$, $i = 2, \ldots, n$, seejuures $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, n$, ning $A_i = A_{ni}$.

47. Leida ristkülikvalemi jääkliikme peaosa.

Runge võte

Olgu jääkliikmes välja eraldatud peaosa ehk

$$R_h = Kh^q + \varrho_h, \quad \varrho_h = O(h^{q+1}).$$

Kasutame integraali tähisena sümbolit I, kvadratuursumma olgu sammu h korral I_h. Siis $I = I_h + R_h$.

Oletame, et sama integraali leidmiseks kasutatakse kvadratuurvalemit kahe erineva sammu h ja H korral, mis muidugi tähendab, et ka sõlmede arv on erinev. Selles olukorras

$$R_h = Kh^q + \varrho_h = I - I_h,$$
$$R_H = KH^q + \varrho_H = I - I_H$$

ning lahutades saame

$$K(H^q - h^q) + \varrho_H - \varrho_h = I_h - I_H,$$
$$K = \frac{I_h - I_H}{H^q - h^q} + \frac{\varrho_h - \varrho_H}{H^q - h^q}.$$

Runge võte

Asendades suuruse $K = \frac{I_h - I_H}{H^q - h^q} + \frac{\varrho_h - \varrho_H}{H^q - h^q}$ jääkliikme avaldisse, saame

$$R_h = Kh^q + \varrho_h = \frac{I_h - I_H}{\left(\frac{H}{h}\right)^q - 1} + \frac{\varrho_h - \varrho_H}{\left(\frac{H}{h}\right)^q - 1} + \varrho_h.$$

Vaatame edasi juhtu, kus $H = kh$, $k = \text{const} > 1$. Siis

$$R_h = \frac{I_h - I_H}{k^q - 1} + \frac{\varrho_h - \varrho_H}{k^q - 1} + \varrho_h.$$

Seejuures $\varrho_H = O(H^{q+1}) = O((kh)^{q+1}) = O(h^{q+1})$, seega

$$\frac{\varrho_h - \varrho_H}{k^q - 1} + \varrho_h = O(h^{q+1})$$

ning

$$R_h = \frac{I_h - I_H}{k^q - 1} + O(h^{q+1}).$$

Siit on näha, et jääkliikme ligikaudne väärtus on $\frac{I_h - I_H}{k^q - 1}$, sest see on sama järku peaosaga Kh^q.

Runge võte

Levinuim arvutustes kasutatav juht on $k = 2$, siis on jääkliikme ligikaudne väärtus $\frac{I_h - I_{2h}}{2^q - 1}$. Näiteks ristkülik- ja trapetsvalemi korral $q = 2$ ning $R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{3}$, Simpsoni ja Newtoni $\frac{3}{8}$–valemi korral $q = 4$ ning $R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15}$.

Näide

Leiame

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

täpsusega 10^{-4} kasutades trapetsvalemit ning Simpsoni valemit. Hindame viga Runge võttega.

Runge võte

Näide jätkub

Trapetsvalemi korral

n	$h=(b-a)/n$	I_h	$(I_h-I_{2h})/3$	$R_h=I-I_h$
2	0.5	0.782616		-0.2191792
4	0.25	0.619601	-0.0543382	-0.0561645
8	0.125	0.577565	-0.0140120	-0.0141285
16	0.0625	0.566974	-0.0035303	-0.0035376
32	0.03125	0.564321	-0.0008843	-0.0008847
64	0.015625	0.563658	-0.0002212	-0.0002212
128	0.0078125	0.563492	-0.0000553	-0.0000553

Simpsoni valemi korral

n	$h=(b-a)/n$	I_h	$(I_h-I_{2h})/15$	$R_h=I-I_h$
2	0.5	0.590440		-0.0270041
4	0.25	0.565263	-0.0016785	-0.0018263
8	0.125	0.563553	-0.0001140	-0.0001164
16	0.0625	0.563444	-0.0000073	-0.0000073