

Võrrandite lahendamine. Harilik iteratsioonimeetod

Loeng 2

MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

18.02.2019

1 Sissejuhatus

- Üldiselt iteratsioonimeetoditest
- Lõigu poolitamise meetod

2 Harilik iteratsioonimeetod

- Meetodi kirjeldus
- Koonduvusteoreem
- Täiendused koonduvusteoreemile
- Geomeetriline tõlgendus
- Hariliku iteratsioonimeetodi käitumine lahendi ümbruses

Ülesanded 0–4

Ülesanne 5

Ülesanne 6

Ülesanded 7–8

Tuntumad on algebralised võrrandid kujul

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Juhtude $n = 1, \dots, 4$ korral on olemas lahendivalemid. Kui $n \geq 5$, siis üldiselt radikaalides lahendada ei saa (Abel, 1824).

Meie vaatleme võrrandeid

$$f(x) = 0,$$

kus f on suvaline ühe muutuja funktsioon.

Iteratsioonimeetodite üldine idee: valitakse alglähend x_0 või alglähendite komplekt $x_0, \dots, x_k$, seejärel leitakse järkjärgult järgmised lähendid (kasutades eelnevaid)

$$x_0, \dots, x_k \rightarrow x_{k+1} \rightarrow x_{k+2} \rightarrow \dots$$

ehk leitakse jada x_n .

Põhiküsimus: Kas jada x_n koondub lahendiks?

Sissejuhatus. Lõigu poolitamise meetod

Vt funktsiooni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mis on pidev ning mille korral $f(a)f(b) < 0$. Siis on teada, et eksisteerib $x^* \in (a, b)$ nii, et $f(x^*) = 0$ ehk x^* on võrrandi $f(x) = 0$ lahend.

Võtame $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$. Kui $f(x_0)f(x_2) < 0$, siis $x_3 = \frac{x_0 + x_2}{2}$, kui $f(x_1)f(x_2) < 0$, siis $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Edasi poolitatakse seda lõiku, mille otspunktides on funktsiooni f väärtused vastandmargilised, jne. Kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b - a}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

st viga kahaneb geomeetrilises progressioonis teguriga $\frac{1}{2}$.

Vt näidet ja jooniseid [siit](#).

Olgu antud võrrand

$$x = g(x). \quad (1)$$

Iga võrrandi kujul $f(x) = 0$ saab viia kujule (1) valides näiteks $g(x) = x - f(x)$ või $g(x) = x + 3f(x)$.

Harilikus iteratsioonimeetodis on vaja ühte alglähendit x_0 , järgmised lähendid leitakse eeskirja

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

kohaselt.

Näide

Vaatleme lineaarset võrrandit $x = \frac{x-3}{2}$, mille täpne lahend on $x = -3$.
Valime alglähendiks $x_0 = 1$ ning kirjutame välja esimesed iteratsioonisammud:

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$x_3 = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2} = -2,5$$

$$x_4 = \frac{-\frac{5}{2}-3}{2} = -\frac{11}{4} = -2,75$$

$$x_5 = \frac{-\frac{11}{4}-3}{2} = -\frac{23}{8} = -2,875$$

$$x_6 = \frac{-\frac{23}{8}-3}{2} = -\frac{47}{16} = -2,9375$$

...

Näide jätkub

Vaatleme lineaarset võrrandit $x = 2x + 3$, mille täpne lahend on $x = -3$.
Valime alglähendi x_0 ning kirjutame välja esimesed iteratsioonisammud:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$x_2 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$$

$$x_3 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$$

...

$$x_0 = -4$$

$$x_1 = 2 \cdot (-4) + 3 = -5$$

$$x_2 = 2 \cdot (-5) + 3 = -7$$

$$x_3 = 2 \cdot (-7) + 3 = -11$$

...

Teoreem (koonduvusteoreem)

Olgu

- 1) $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$, st $x \in [a, b] \Rightarrow g(x) \in [a, b]$,
- 2) g on **ahendav** lõigus $[a, b]$, st $\exists q < 1$ nii, et
 $|g(x_1) - g(x_2)| \leq q|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2$, korral.

Siis võrrandil (1) on lõigus $[a, b]$ parajasti üks lahend x^* , iga $x_0 \in [a, b]$ korral $x_n \rightarrow x^*$, kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_0 - x_1|. \quad (2)$$

Teoreemi tõestus tahvlil.

Tõestuse skeem:

- $(x_n) \subset [a, b]$;
- (x_n) on Cauchy jada ehk fundamentaaljada;
- $\exists x^* \in [a, b] : x^* = g(x^*)$;
- lahendi ühesus;
- hinnang (2).

(x_n) on **Cauchy jada** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : n, m > N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Ruumis $\mathbb{R}$ kaugus $\rho(x_n, x_m) = |x_n - x_m|$.

Iga koonduv jada on Cauchy jada, vastupidine kehtib vaid täielikes meetrilistes ruumides (nt $\mathbb{R}$).

Näiteid mittekoonduvatest Cauchy jadadest

- Ruum $\mathbb{Q}$ on mittetäielik. Jada $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$ koosneb ratsionaalarvudest, kuid koondub arvuks $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Vahemik $X = (0, 2)$ on mittetäielik. Jada $x_n = \frac{1}{n}$ koondub arvuks $0 \notin X$.

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on **pidev** punktis $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

Järeldus 1

Teoreem jääb kehtima, kui tema sõnastuses lõik $[a, b]$ asendada reaalarvude hulgaga $\mathbb{R}$ või poolsirgega $[a, \infty)$ või $(-\infty, b]$.

Järeldus 2

Teoreemis ja järelduses 1 võib ahendavuse nõude 2) asendada tingimusega, et g on diferentseeruv ja $|g'(x)| \leq q < 1 \ \forall x \in [a, b]$ (või $\forall x \in \mathbb{R}, [a, \infty), (-\infty, b]$).

Tõestuseks märgime, et tehtud eeldusel

$$g(x_1) - g(x_2) = g'(\xi)(x_1 - x_2), \quad \xi \in (x_1, x_2),$$

ja kui $x_1, x_2 \in [a, b]$, siis $\xi \in [a, b]$ ja ahendavuse tingimuse annab võrratus $|g'(\xi)| \leq q < 1$.

Näide

Võrrandil $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ on lõigus $[1, 2]$ parajasti üks lahend. Esitame selle võrrandi kujul (1), selleks on mitmeid võimalusi:

(a) $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10;$

(b) $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2};$

(c) $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2};$

(d) $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2};$

(e) $x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}.$

Võtame alglähendiks $x_0 = 1.5$. Esitame hariliku iteratsioonimeetodiga saadud lähendid järgnevas tabelis.

Näide jätkub

n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.7	$\sqrt{-8.65}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	$1.03 \cdot 10^8$		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

Näide jätkub

Analüüsimise teoreemi eelduste täidetust

(a) $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

$$g_1(1) = 6, g_1(2) = -12 \Rightarrow g_1([1, 2]) \not\subset [1, 2] \quad \neg 1)$$

$$|g'_1(x)| = |1 - 3x^2 - 8x| > 1 \quad \forall x \in [1, 2] \quad \neg 2)$$

(b) $g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$

$$x^* \approx 1.365, g'_2(x^*) \approx 3.4 > 1 \quad \neg 2)$$

(c) $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$

$$g'_3(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} < 0 \quad \forall x \in [1, 2] \quad (g_3 \text{ on rangelt kahanev})$$

$$g_3(2) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1, g_3([1, 2]) \not\subset [1, 2]$$

$$1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \leq g_3(x) \leq g_3(1) = 1.5 \quad \forall x \in [1, 1.5] \quad 1)$$

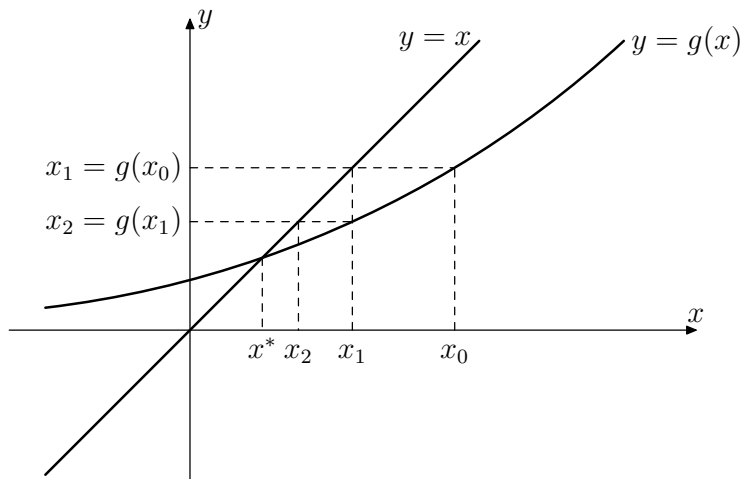
$$|g'_3(x)| \leq |g'_3(1.5)| \approx 0.66 \quad \forall x \in [1, 1.5] \quad 2)$$

(d) $g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$

$$|g'_4(x)| < 0.15 \quad \forall x \in [1, 2] \quad 2)$$

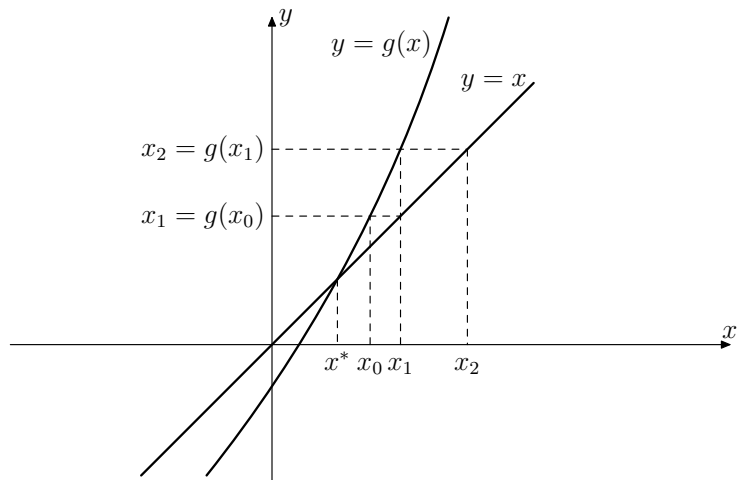
- 1 Olgu võrrandil $x = g(x)$ lahend x^* ning funktsioon g ahendav vahemikus $(x^* - \delta, x^* + \delta)$, $\delta > 0$. Tõestada, et kui $x_0 \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$, siis harilik iteratsioonimeetod koondub lahendiks x^* .
- 2 Olgu võrrandil $x = g(x)$ lahend $x^* \in [a, b]$ ning $0 \leq g'(x) \leq q < 1$ $\forall x \in [a, b]$. Tõestada, et iga $x_0 \in [a, b]$ korral harilik iteratsioonimeetod koondub lahendiks x^* .
- 3 Leida näide funktsioonist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $|g(x_1) - g(x_2)| < |x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$, aga võrrandil $x = g(x)$ ei ole lahendit.
- 4 Sama, mis ülesanne 3, kus $\mathbb{R}$ asemel on mingi poolsirge $[a, \infty)$.

Geomeetiline tõlgendus



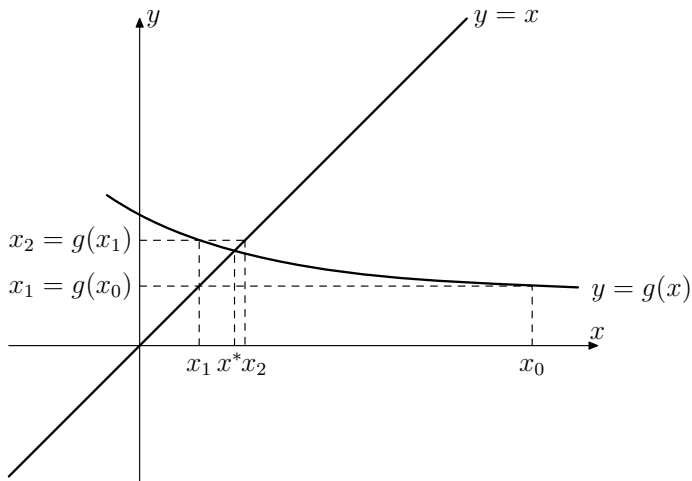
Siin $0 < g'(x) < 1$, meetod koondub.

Geomeetiline tõlgendus



Siin $g'(x) > 1$, meetod ei koonu.

Geomeetiline tõlgendus



Siin $-1 < g'(x) < 0$, meetod koondub.

- 5 Teha joonis juhu $g'(x) < -1$ kohta.

Hariliku iteratsioonimeetodi käitumine lahendi ümbruses

Eeldame, et g on pidevalt diferentseeruv. Olgu x^* võrrandi (1) lahend, s.t. $x^* = g(x^*)$. Olgu leitud iteratsioonijada x_n eeskirja $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ kohaselt. Siis Lagrange'i valemi põhjal

$$x_{n+1} - x^* = g(x_n) - g(x^*) = g'(\xi_n)(x_n - x^*),$$

kus $\xi_n \in (x_n, x^*)$ või $\xi_n \in (x^*, x_n)$. Kui $x_n \approx x^*$, siis $\xi_n \approx x^*$ ja $g'(\xi_n) \approx g'(x^*)$, sest g' on pidev. Seega

$$x_{n+1} - x^* \approx g'(x^*)(x_n - x^*).$$

Viga $x_n - x^*$ käitub lahendi x^* ümbruses ligikaudu nagu geomeetriline progressioon teguriga $g'(x^*)$. Kui $g'(x^*) = 0$, siis koondub harilik iteratsioonimeetod kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist. Kui $|g'(x^*)| > 1$, siis harilik iteratsioonimeetod ei koonu lahendiks. Kõikidel juhtudel näitab $g'(\xi_n)$ märk, kas lähendid x_n ja x_{n+1} paiknevad ühel pool või erinevatel pooltel lahendist x^* .

- 6 Tõestada, et kui $g'(x^*) = 0$, siis iga $q > 0$ korral $\frac{|x_n - x^*|}{q^n} \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$ (st. juhul $g'(x^*) = 0$ koondub harilik iteratsioonimeetod kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist).

Näide

Olgu vaja lahendada võrrand $x^2 - a = 0$, kus $a > 0$, st leida ruutjuur arvust a . Viime võrrandi kujule (1).

- ① $x = \frac{a}{x}$, st $g(x) = \frac{a}{x}$. Iteratsioonivalem on $x_{n+1} = \frac{a}{x_n}$.

Siin $g'(x) = -\frac{a}{x^2}$ ning $g'(x^*) = -\frac{a}{(x^*)^2} = -1$

Eelnev arutelu ei võimalda väita koondumist ega ka seda välistada.

Täpsema analüüsi põhjal juhul $a \geq 1$ iteratsioonimeetod ei koonu, juhul $a < 1$ koondub aeglasemalt igast geomeetrilisest progressionist.

- ② $2x = x + \frac{a}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$. Iteratsioonivalem on

$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$. Siin $g'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$ ja $g'(x^*) = 0$.

Iteratsioonimeetod koondub kiiremini igast geomeetrilisest progressionist.

Sellest, kuidas arvutid tegelikult ruutjuurt arvutavad, saate lugeda [siit](#) ja [siit](#).

- 7 Tõestada, et kui g on m korda diferentseeruv, $g^{(m)}$ on tõkestatud ja $g'(x^*) = 0, \dots, g^{(m-1)}(x^*) = 0$, siis harilikus iteratsioonimeetodis kehtib hinnang

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \text{const} |x_n - x^*|^m.$$

- 8 Tõestada ülesande 7 abil, et ruutjuure leidmise meetod $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ on ruutkoonduvusega.