Newtoni meetod

Loeng 3

MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

25.02.2019

Ülesanded 9–10 | Ülesanded 11–12 | Ülesanded 13–14 | Ülesanne 15

Meetodi kirjeldus

Vaatleme võrrandit

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Eeldame, et f on diferentseeruv.

Newtoni meetodis antakse ette alglähend x_0, järgmised lähendid leitakse valemiga

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots .}$$

Meetodi sammu saab sooritada, kui $f'(x_n) \neq 0$.

Meetodi kirjeldus

Eeldame, et (1) lahendamisel on x_n leitud. Taylori valemi põhjal

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + R(x_n; x).$$

Seega

$$(1) \Leftrightarrow f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + R(x_n; x) = 0.$$

Jättes ära jääkliikme, saame (lineaarse) võrrandi

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0,$$

mille lahend on

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Newtoni meetodi igal sammul asendatakse algvõrrand tema lineariseeringuga.

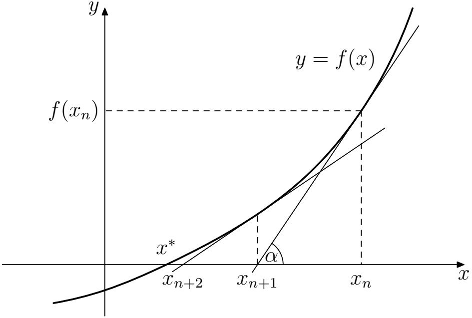
Newtoni meetodi geomeetriline tõlgendus

Teisendame Newtoni meetodi eeskirja

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

kujule

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = \tan\alpha.$$



Iga järgnev lähend on eelmises võetud puutuja lõikepunkt x-teljega. Newtoni meetodit nimetatakse ka puutujate meetodiks.

Siin joonisel $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $x_n > x^*$.

Ülesanded

13. Teha joonised juhtudeks
    1) $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$;
    2) $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$;
    3) $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$.

    Kõikidel juhtudel vaadelda olukorda $x_n > x^*$ ja $x_n < x^*$. Kanda joonisele vähemalt kolm järjestikust lähendit x_n, x_{n+1}, x_{n+2}.
14. Leida geomeetriline pilt, kus
    a) võrrandil $f(x) = 0$ on lahend olemas, aga Newtoni meetod ei ole rakendatav, sest $f'(x_n) = 0$;
    b) võrrandil $f(x) = 0$ on lahend olemas, kõik jada x_n liikmed on Newtoni meetodil leitavad, aga jada x_n on tõkestamata ja seega ei koondu;
    c) võrrandil $f(x) = 0$ on lahend olemas, kõik jada x_n liikmed on Newtoni meetodil leitavad, jada x_n on tõkestatud, aga ei koondu.

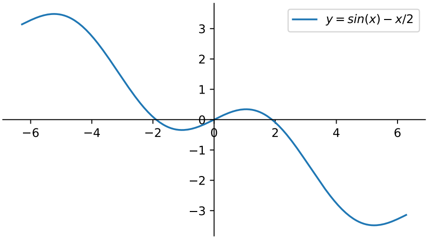
Meetodi kirjeldus

Näide

Lahendame Newtoni meetodiga võrrandi $f(x) = 0$, kus

$$f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2},$$

kasutades alglähendina väärtusi a) $x_0 = \frac{\pi}{2}$; b) $x_0 = 16$; c) $x_0 = 10\pi$.



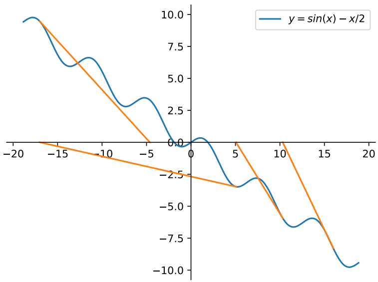
Näide jätkub

n	a) x_n	b) x_n	c) x_n
0	1.5707963268	16	31.4
1	2.0000000000	10.3	62.8
2	1.9009955942	5.1	125.6
3	1.8955116454	-17.0	251.3
4	1.8954942672	-4.6	...
5	1.8954942670	0.99	
6		-5.6	
7		-19.3	
8		-41.4	
...		...	
17		-121.0	
...		...	
24		-3.5329332348	
25		-2.0250023274	
26		-1.9036797043	
27		-1.8955325986	
28		-1.8954942679	
29		-1.8954942670	

$$f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$$

Variandi b) korral



Meetodi kirjeldus

Näide jätkub

n	a) x_n	b) x_n	c) x_n
0	1.5707963268	16	31.4
1	2.0000000000	10.3	62.8
2	1.9009955942	5.1	125.6
3	1.8955116454	-17.0	251.3
4	1.8954942672	-4.6	...
5	1.8954942670	0.99	
6		-5.6	
7		-19.3	
8		-41.4	
...		...	
17		-121.0	
...		...	
24		-3.5329332348	
25		-2.0250023274	
26		-1.9036797043	
27		-1.8955325986	
28		-1.8954942679	
29		-1.8954942670	

$$f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$$

Variandi c) korral

$$x_0 = 10\pi$$

$$x_1 = 10\pi - \frac{0 - \frac{10\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 20\pi$$

$$x_2 = 20\pi - \frac{0 - \frac{20\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 40\pi$$

$$x_3 = 80\pi$$

...

Meetodi kirjeldus

Newtoni meetod on erijuht harilikust iteratsioonimeetodist, kus võrrand (1) on teisendatud kujule

$$x = g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

Funktsioon g on määratud funktsiooni f määramispiirkonna punktides, milles $f'(x) \neq 0$.

Newtoni meetodi korral kehtivad kõik hariliku iteratsioonimeetodi kohta käivad tulemused.

Meetodi kirjeldus

Olgu $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $f \in C^2[a, b]$. Vaatleme Newtoni meetodit kui harilikku iteratsioonimeetodit $x_{n+1} = g(x_n)$. Kuna

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

siis ühekordse lahendi x^* korral (st $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$) saame $g'(x^*) = 0$ ning lahendi mingis ümbruses $|g'(x)| \leq q < 1$.

Teoreem. Kui $f \in C^2[a, b]$ ning võrrandi $f(x) = 0$ lahendi $x^* \in [a, b]$ korral $f'(x^*) \neq 0$, siis leidub $\delta > 0$ nii, et Newtoni meetod koondub võrrandi lahendiks iga $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ korral, st piisavalt hea alglähendi korral Newtoni meetod koondub alati.

Ülesanded

9. Tõestada, et kui f on kaks korda pidevalt diferentseeruv, $f(x^*) = 0$ (s.t. x^* on võrrandi (1) lahend) ja $f'(x^*) \neq 0$, siis vastava funktsiooni g korral $g'(x^*) = 0$, mis tähendab, et Newtoni meetod koondub kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist.
10. Tõestada, et kui f on kolm korda pidevalt diferentseeruv, $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$, siis Newtoni meetod on ruutkoonduvusega. Kasutada eelmise paragrahvi ülesannet 7.

Newtoni meetodi koonduvuskiirus

Näitame, et ülesannetes 9–10 tehtud eeldusi saab oluliselt nõrgendada.

Eeldame, et f on pidevalt diferentseeruv, $f(x^*) = 0$ ja $f'(x^*) \neq 0$ (st lahend x^* on ühekordne).

Lause 1

Kui f on pidevalt diferentseeruv, siis ühekordse lahendi korral koondub Newtoni meetod kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist.

Lause 2

Kui f' rahuldab Lipschitzi tingimust, siis ühekordse lahendi korral on Newtoni meetod ruutkoonduvusega.

Newtoni meetodi koonduvuskiirus

Lause 1

Kui f on pidevalt diferentseeruv, siis ühekordse lahendi korral koondub Newtoni meetod kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist.

Tõestus. Tähistame $\varepsilon_n = x_n - x^*$ ja näitame, et

$$\varepsilon_{n+1} = \left(1 - \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}\right)\varepsilon_n, \quad \xi_n \in (x_n, x^*).$$

...

Kuna $|\varepsilon_{n+1}| = q_n|\varepsilon_n|$, $q_n \to 0$, siis koondub Newtoni meetod kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist.

Newtoni meetodi koonduvuskiirus

Lause 2

Kui f' rahuldab Lipschitzi tingimust, siis ühekordse lahendi korral on Newtoni meetod ruutkoonduvusega.

Tõestus. Eeldame, et f' rahuldab Lipschitzi tingimust

$$\exists L > 0 : |f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y.$$

Näitame, et siis

$$\left|1 - \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}\right| \leq \frac{L\,|\varepsilon_n|}{\frac{1}{2}\,|f'(x^*)|} = \text{const}\,|\varepsilon_n|\,,$$

mistõttu $|\varepsilon_{n+1}| = \left|1 - \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}\right| |\varepsilon_n| \leq \text{const}\,|\varepsilon_n|^2$.

Newtoni meetodi koonduvuskiirus

Näide

Vaatleme loengus 2 toodud näidet võrrandi $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, $x \in [1, 2]$, lahendamise kohta hariliku iteratsioonimeetodiga juhtudel

(c) $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$;

(d) $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$;

(e) $x = g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$ (Newtoni meetod!).

Esitame järgnevas tabelis lähendid x_n ja suurused $\frac{|x_n - \tilde{x}^*|}{|x_{n-1} - \tilde{x}^*|^\alpha}$, kus $\tilde{x}^* = 1.365230013$.

Newtoni meetodi koonduvuskiirus

Näide jätkub

	(c)	$\alpha = 1$	(d)	$\alpha = 1$	(e)	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
n	x_n	λ	x_n	λ	x_n	λ	λ
0	1.5		1.5		1.5		
1	1.286953768	0.58	1.348399725	0.12	1.373333333	0.06013	0.45
2	1.402540804	0.48	1.367376372	0.13	1.365262015	0.00395	0.49
3	1.345458374	0.53	1.364957015	0.13	1.365230014	0.00003	0.89
4	1.375170253	0.5	1.365264748	0.13	1.365230013		
5	1.360094193	0.52	1.365225594	0.13			
6	1.367846968	0.51	1.365230576	0.13			
7	1.363887004	0.51	1.365229942	0.13			
8	1.365916733	0.51	1.365230023	0.13			
9	1.364878217	0.51	1.365230012	0.08			
10	1.365410061	0.51	1.365230014	0.75			
11	1.365137821	0.51	1.365230013				
20	1.365230236	0.51					
29	1.365230013						

Newtoni meetodi koonduvuskiirus kordse lahendi korral

Olgu f m korda pidevalt diferentseeruv ja $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0$, $\ldots$, $f^{(m-1)}(x^*) = 0$, $f^m(x^*) \neq 0$. Sel juhul nimetame lahendit x^* m-kordseks.

Lause 3

Kui f on m korda pidevalt diferentseeruv, siis m-kordse lahendi korral koondub Newtoni meetod geomeetrilise progressiooni kiirusega, mille tegur on $1 - \frac{1}{m}$.

Tõestus. Arendame $f(x_n)$ ja $f'(x_n)$ Taylori valemi järgi punktis x^*, saame

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\xi_n)}{m!}(x_n - x^*)^m, \qquad f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(\eta_n)}{(m-1)!}(x_n - x^*)^{m-1},$$

kus $\xi_n, \eta_n \in (x_n, x^*)$. Näitame, et $\varepsilon_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\frac{f^{(m)}(\xi_n)}{f^{(m)}(\eta_n)}\right)\varepsilon_n = q_n\varepsilon_n$, kus $q_n \to 1 - \frac{1}{m}$.

Mida suurem m, seda aeglasem koondumine.

Newtoni meetodi koonduvuskiirus kordse lahendi korral

m-kordse lahendi korral ($f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0$, ..., $f^{(m-1)}(x^*) = 0$, $f^m(x^*) \neq 0$) saab olukorra parandamiseks kasutada Newton-Schröderi meetodit

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots,}$$

kus m on lahendi kordsus.

Newtoni meetodi koonduvuskiirus kordse lahendi korral

m-kordse lahendi korral ($f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0$, ..., $f^{(m-1)}(x^*) = 0$, $f^m(x^*) \neq 0$) saab olukorra parandamiseks kasutada Newton-Schröderi meetodit

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots,}$$

kus m on lahendi kordsus.

Kuidas saab leida Newton–Schröderi meetodis kasutatavat lahendi kordsust, lähtudes algselt antud võrrandist (1) ehk funktsioonist f, sest lahend x^* ei ole teada ja ei saa leida f tuletisi kohal x^*?

Ülesanded

11. Näidata, et kui $f^{(m)}$ on pidev, siis Newton–Schröderi meetod koondub kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist, kui aga $f^{(m)}$ rahuldab Lipschitzi tingimust, siis Newton–Schröderi meetod on ruutkoonduvusega.
12. Tõestada, et m-kordse lahendi puhul, kui x_n on leitud Newtoni meetodiga, siis

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}} \to 1-\frac{1}{m} \qquad \text{ja} \qquad \frac{x_n-x_{n-1}}{-x_{n+1}+2x_n-x_{n-1}} \to m.$$

Newtoni meetodi koonduvuskiirus kordse lahendi korral

m-kordse lahendi korral ($f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0$, ..., $f^{(m-1)}(x^*) = 0$, $f^m(x^*) \neq 0$) saab olukorra parandamiseks kasutada Newton-Schröderi meetodit

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots,}$$

kus m on lahendi kordsus.

Kuidas saab leida Newton–Schröderi meetodis kasutatavat lahendi kordsust, lähtudes algselt antud võrrandist (1) ehk funktsioonist f, sest lahend x^* ei ole teada ja ei saa leida f tuletisi kohal x^*?

Lahendamist võib alustada Newtoni meetodiga ja kui mõningase arvu sammude järel on lahendi kordsus teada, võib üle minna Newton–Schröderi meetodile.

Newtoni meetodi koonduvuskiirus kordse lahendi korral

Näide

Lahendame võrrandi $f(x) = 0$, kus $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in [-1, 1]$.

n	NM x_n	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$	$\frac{\lvert x_n - 0\rvert}{\lvert x_{n-1} - 0\rvert}$	NSM x_n	$\frac{\lvert x_n - 0\rvert}{\lvert x_{n-1} - 0\rvert^2}$
0	1			1	
1	0.581977		0.581977	0.163953	0.163953
2	0.319055	0.62896	0.548226	0.00447811	0.166592
3	0.167996	0.57454	0.526543	$3.34225 \cdot 10^{-6}$	0.166667
4	0.086349	0.54050	0.513993	$1.08645 \cdot 10^{-11}$	0.972597
5	0.043796	0.52118	0.507195		
6	0.022058	0.51084	0.503650		
7	0.011069	0.50549	0.501838		
8	0.005545	0.50276	0.500922		
9	0.002775	0.50138	0.500462		
10	0.001388	0.50069	0.500231		
11	0.000694	0.50035	0.500116		
12	0.000347	0.50017	0.500058		
13	0.000174	0.50009	0.500029		
14	$8.68 \cdot 10^{-5}$	0.50004	0.500014		
15	$4.34 \cdot 10^{-5}$	0.50002	0.500007		
16	$2.17 \cdot 10^{-5}$	0.50001	0.500004		
17	$1.09 \cdot 10^{-5}$	0.50001	0.500002		
18	$5.42 \cdot 10^{-6}$	0.5000	0.500001		
...	...	...	...		

Modifitseeritud Newtoni meetod

Modifitseeritud Newtoni meetodi arvutuseeskiri võrrandi (1) lahendamisel on

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, \ldots,}$$

s.t. igal sammul kasutatakse alglähendil x_0 leitud tuletist $f'(x_0)$. Võttes siin $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$, näeme, et modifitseeritud Newtoni meetod on hariliku iteratsioonimeetodi erijuht. Seejuures $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}$ ja $g'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)}{f'(x_0)}$.

Üldiselt $f'(x^*) \neq f'(x_0)$, seepärast $g'(x^*) \neq 0$ ja modifitseeritud Newtoni meetod koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega eeldusel, et koondumine leiab aset.

Näited

Näited

1. Vaatleme võrrandit $f(x) = x^2 - a = 0$. Siis $f'(x) = 2x$, Newtoni meetod on

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

   See on tuttav hariliku iteratsioonimeetodi käsitlemisest, teame, et ta on ruutkoonduvusega. Meetod koondub iga alglähendi $x_0 \neq 0$ korral.

2. Olgu $f(x) = x^3 - a = 0$, siis $f'(x) = 3x^2$ ja iteratsioonieeskiri on

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right).$$

Ülesanded

15. Kui palju on näites 2 alglähendeid ja millised need on, kus Newtoni meetod ei koondu? Soovitus: vaadelda geomeetrilist tõlgendust.