Teisi iteratsioonimeetodeid: lõikajate meetod, Mülleri meetod, Steffenseni meetod, kõrgemat järku iteratsioonimeetodid

Loeng 4

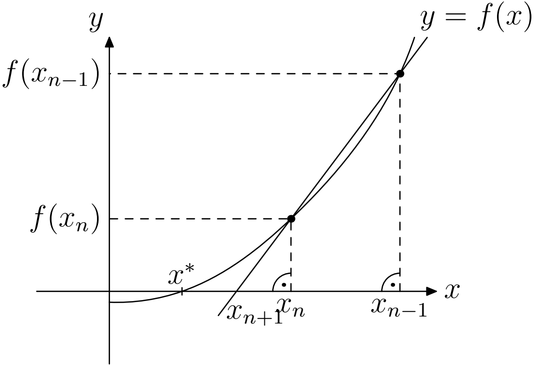
MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

04.03.2019

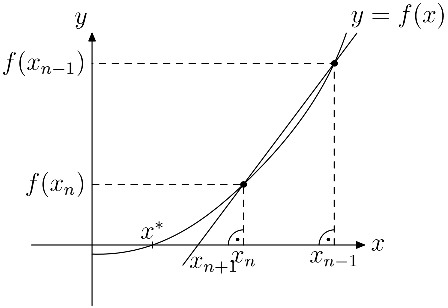
Ülesanne 16 Ülesanne 17 Ülesanne 18

Lõikajate meetod

Vaatleme võrrandit $f(x) = 0$. Olgu antud alglähendid x_0 ja x_1, $x_0 \neq x_1$. Ühendame punktid $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_1, f(x_1))$ sirgega. Selle sirge ja x-telje lõikepunkti esimene koordinaat olgu x_2. Sama protseduuri kordame lähenditega x_1, x_2, jne.



Lõikajate meetod



Tuletame arvutuseeskirja. Täisnurksetest kolmnurkadest saame

$$\frac{f(x_{n-1})}{f(x_n)} = \frac{x_{n-1} - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}},$$

millest

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Lõikajate meetod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Kui f on diferentseeruv, siis Lagrange'i valemi põhjal

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}), \quad \xi_n \in (x_n, x_{n-1}),$$

seega

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)}.$$

Lõikajate meetod on sarnane Newtoni meetodile, milles $f'(x_n)$ asemel on lõikajate meetodis $f'(\xi_n)$. Lõikajate meetod **ei ole hariliku iteratsioonimeetodi erijuht**, sest igal sammul kasutatakse järjekordse lähendi leidmisel kahte eelnevat lähendit.

Lõikajate meetodi koonduvuskiirus

Eeldame, et funktsioon f on küllalt sile (st kõik vajalikud tuletised eksisteerivad) ning $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$ (st lahend x^* on ühekordne), $f''(x^*) \neq 0$. Eeldame veel, et lõikajate meetodis $x_n \to x^*$ vähemalt geomeetrilise progressiooni kiirusega, s.t. $|x_{n+1} - x^*| \leqslant q|x_n - x^*|$, $q < 1$.

Milline on tegelik meetodi koonduvusjärk?

Lõikajate meetodi koonduvuskiirus

Eeldame, et funktsioon f on küllalt sile (st kõik vajalikud tuletised eksisteerivad) ning $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$ (st lahend x^* on ühekordne), $f''(x^*) \neq 0$. Eeldame veel, et lõikajate meetodis $x_n \to x^*$ vähemalt geomeetrilise progressiooni kiirusega, s.t. $|x_{n+1} - x^*| \leqslant q|x_n - x^*|$, $q < 1$.

Milline on tegelik meetodi koonduvusjärk?

Lähtume võrdusest

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Lõikajate meetodi koonduvuskiirus

Eeldame, et funktsioon f on küllalt sile (st kõik vajalikud tuletised eksisteerivad) ning $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$ (st lahend x^* on ühekordne), $f''(x^*) \neq 0$. Eeldame veel, et lõikajate meetodis $x_n \to x^*$ vähemalt geomeetrilise progressiooni kiirusega, s.t. $|x_{n+1} - x^*| \leqslant q|x_n - x^*|$, $q < 1$.

Milline on tegelik meetodi koonduvusjärk?

Lähtume võrdusest

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x^* = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - x^* = \frac{\varepsilon_{n-1}f(x_n) - \varepsilon_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

ja üritame leida α nii, et $|\varepsilon_{n+1}| \approx \text{const}|\varepsilon_n|^\alpha$.

Lõikajate meetodi koonduvuskiirus

Kasutades Taylori valemit punktis x^* näitame [tahvlil], et

$$\varepsilon_{n-1} f(x_n) - \varepsilon_n f(x_{n-1}) \approx \frac{1}{2} f''(x^*) \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})$$
$$f(x_n) - f(x_{n-1}) \approx f'(x^*)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}),$$

millest

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{\frac{1}{2} f''(x^*) \varepsilon_n \varepsilon_{n-1}}{f'(x^*)} = a \varepsilon_n \varepsilon_{n-1},$$

kus tähistasime $a = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.

Lõikajate meetodi koonduvuskiirus

Otsime võrrandile $\varepsilon_{n+1} = a\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}$ lahendit, teades, et $\varepsilon_n \to 0$ ja $|\varepsilon_{n+1}| = b|\varepsilon_n|^\alpha$ (meid huvitab α).

Ühelt poolt $|\varepsilon_n| = b|\varepsilon_{n-1}|^\alpha$ ja

$$|\varepsilon_{n+1}| = b|\varepsilon_n|^\alpha = b(b|\varepsilon_{n-1}|^\alpha)^\alpha = b^{1+\alpha}|\varepsilon_{n-1}|^{\alpha^2}.$$

Teiselt poolt,

$$|\varepsilon_{n+1}| = |a||\varepsilon_n||\varepsilon_{n-1}| = |a|(b|\varepsilon_{n-1}|^\alpha)|\varepsilon_{n-1}| = b|a||\varepsilon_{n-1}|^{\alpha+1}.$$

Seega $\alpha^2 = \alpha + 1$, millest $\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Lahend $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < 0$ ei luba koondumist $\varepsilon_n \to 0$, seepärast sobib ainult $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$ ja sel juhul leiab aset koondumine $\varepsilon_n \to 0$ hinnanguga

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \text{const}\,|x_n - x^*|^{1{,}618\ldots}.$$

Mülleri meetod

Vaatleme võrrandit $f(x) = 0$. Olgu antud kolm paarikaupa erinevat alglähendid x_0, x_1, x_2. Paneme läbi punktide $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2$, ruutparabooli P_{012}. Lahendame ruutvõrrandi $P_{012}(x) = 0$ ning selle lahendi, mis on lähemal arvule x_2, loeme lähendiks x_3. Sama võtet kordame lähenditega x_1, x_2, x_3, leides polünoomi P_{123} ja lahendades ruutvõrrandi $P_{123}(x) = 0$, millest määrame x_4 jne. Mülleri meetodit nimetatakse ka paraboolide meetodiks.

On olemas parajasti üks polünoom $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, mis rahuldab tingimusi $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$. Selles saab veenduda, tehes kindlaks, et kordajaid c_0, c_1, c_2 määrava süsteemi $c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$, determinant ei võrdu nulliga. Tegemist on Vandermondi determinandiga, mille kohta on teada, et

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \neq 0.$$

Mülleri meetod

Saab tõestada, et ühekordse lahendi korral on Mülleri meetodi koonduvuskiirus iseloomustatav hinnanguga

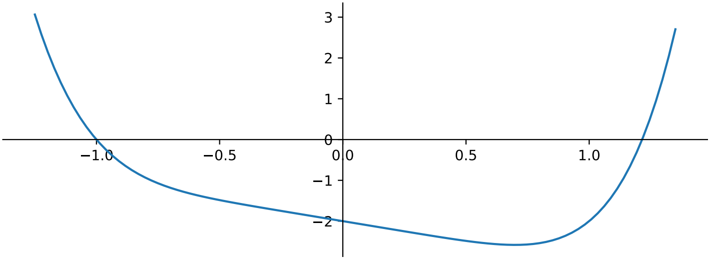
$$|x_{n+1} - x^*| \leq \text{const}\, |x_n - x^*|^{1{,}84\ldots}\,,$$

kahekordse lahendi korral

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \text{const}\, |x_n - x^*|^{1{,}23\ldots}\,.$$

Näide

Lahendame võrrandi $f(x) = 0$, $f(x) = x^6 - x - 2$, Newtoni, lõikajate ja Mülleri meetodiga. Funktsioonil f on kaks reaalset nullkohta $x = -1$ ja $x \approx 1.21486$.

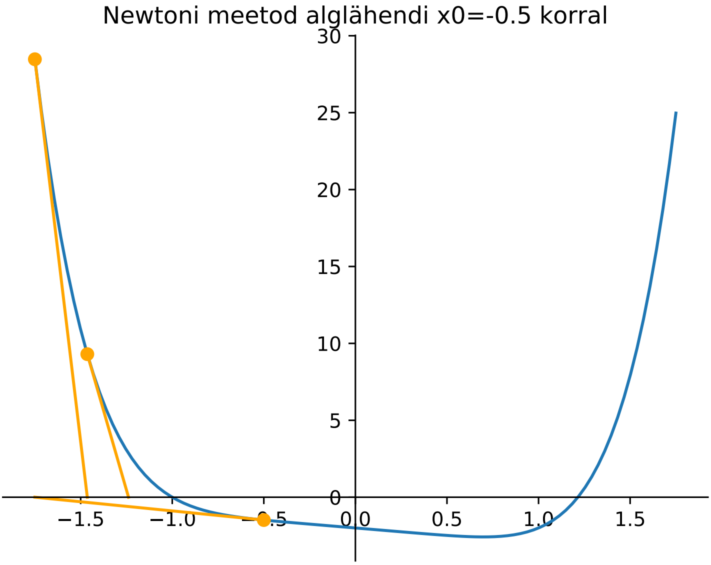


Olgu $x_0 = -0.5$, lõikajate ja Mülleri meetodis vajalikud x_1 ja x_1, x_2 olgu võrdsed Newtoni meetodi vastavate lähenditega.

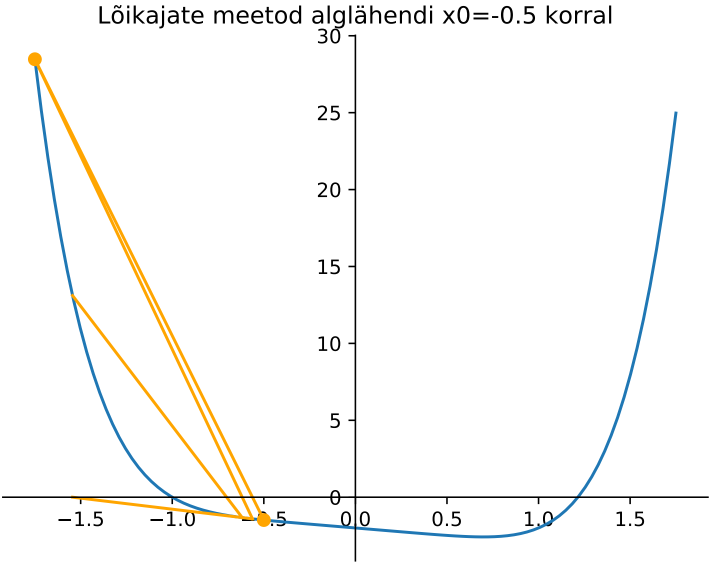
Näide

n	Nm x_n	Lm x_n	Mm x_n
0	-0.5	-0.5	-0.5
1	-1.75	-1.75	-1.75
2	-1.4637783951465650	-0.5619371663746384	-1.4637783951465650
3	-1.2386965421259135	-0.6178652170279614	-1.2570049943130046
4	-1.0845651693243710	-1.5443147232699284	???
5	-1.0133814026165113	-0.7029969992844275	
6	-1.0003754859815774	-0.7722731295086633	
7	-1.0000003019372237	-1.2100439953230686	
8	-1.0000000000001954	-0.9044061836731856	
9		-0.962247770127612	
10		-1.008597065801342	
11		-0.9992886271944168	
12		-0.9999869787883016	
13		-1.0000000198607872	
14		-0.9999999999994459	

Näide

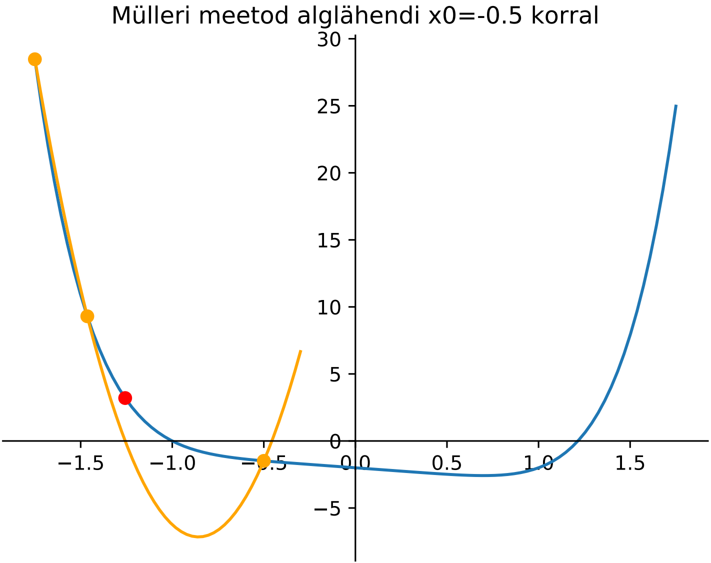

Newtoni meetod alglähendi x0=-0.5 korral
30
25
20
15
10
5
0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

Näide



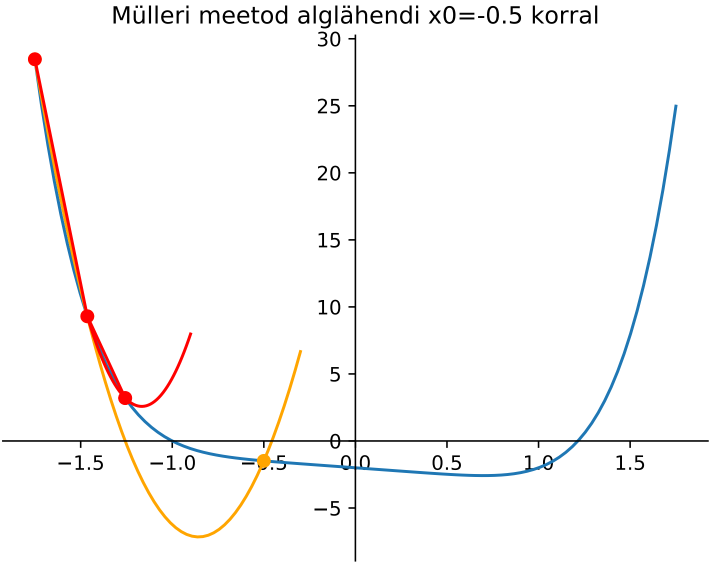
Lõikajate meetod algländi x0=-0.5 korral
30
25
20
15
10
5
0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

Näide



Mülleri meetod alglähendi x0=-0.5 korral
30
25
20
15
10
5
0
−5
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

Näide



Mülleri meetod alglähendi x0=-0.5 korral
30
25
20
15
10
5
0
−5
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

Näide

Olgu alglähendi $x_0 = -0.5$ asemel $x_0 = -1.25$, siis Mülleri meetod koondub. Vead $\varepsilon_n = x_n - x^*$ on esitatud järgnevas tabelis

n	Nm ε_n	Lm ε_n	Mm ε_n
0	-0.25	-0.25	-0.25
1	$-9.1 \cdot 10^{-2}$	$-9.1 \cdot 10^{-2}$	$-9.1 \cdot 10^{-2}$
2	$-1.5 \cdot 10^{-2}$	$-3.7 \cdot 10^{-2}$	$-1.5 \cdot 10^{-2}$
3	$-5.0 \cdot 10^{-4}$	$-6.5 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
4	$-5.3 \cdot 10^{-7}$	$-5.0 \cdot 10^{-4}$	$-6.4 \cdot 10^{-6}$
5	$-6.0 \cdot 10^{-13}$	$-7.0 \cdot 10^{-6}$	$-4.2 \cdot 10^{-10}$
6		$-7.5 \cdot 10^{-9}$	$-2.2 \cdot 10^{-16}$
7		$-1.1 \cdot 10^{-13}$	

Steffenseni meetod

Vaatleme võrrandit

$$x = g(x).$$

Kui rakendada võrrandile harilikku iteratsioonimeetodit ja näiteks $|g'(x^*)| = 0.99$, siis on vaja palju iteratsioonisamme, et saada mõistlikku täpsust. Steffenseni meetod aitab siin koonduvust kiirendada. Meetodi kirjeldamiseks on järgmised võimalused:

Steffenseni meetod

1. Võrrandi $x = g(x)$ lahendamisel lähtume alglähendist x_0, leiame $x_1 = g(x_0)$, seejärel $x_2 = g(x_1)$ ja

$$\widetilde{x}_2 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}.$$

Lähendiga $\widetilde{x}_2$ jätkame, leides $x_3 = g(\widetilde{x}_2)$, $x_4 = g(x_3)$, seejärel $\widetilde{x}_4$, nagu leidsime $\widetilde{x}_2$ jne. Üldiselt, kui $\widetilde{x}_n$ on leitud (n paaris), siis $x_{n+1} = g(\widetilde{x}_n)$, $x_{n+2} = g(x_{n+1})$,

$$\widetilde{x}_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + \widetilde{x}_n}.$$

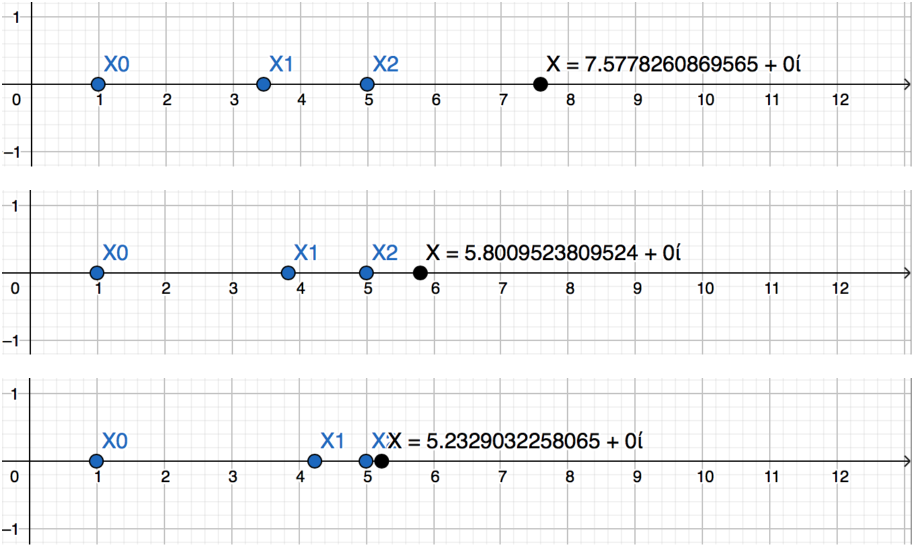
Viimast eeskirja $\widetilde{x}_{n+2}$ leidmiseks nimetatakse **Aitkeni teisenduseks**. Niisiis võib meetodit kirjeldada

$$x_0 \xrightarrow{\text{h.it.}} x_1 \xrightarrow{\text{h.it.}} x_2 \xrightarrow{\text{A.t.}} \widetilde{x}_2 \xrightarrow{\text{h.it.}} x_3 \xrightarrow{\text{h.it.}} x_4 \xrightarrow{\text{A.t.}} \widetilde{x}_4 \to \ldots .$$

.

Steffenseni meetod

Aitkeni teisendus $x_2 \to \widetilde{x_2}$



Steffenseni meetod

Aitkeni teisenduse aluseks on asjaolu, et

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \approx \frac{x_{n+2} - x^*}{x_{n+1} - x^*}.$$

Avaldame siit x^*. Saame

$$(x_{n+1} - x^*)^2 \approx (x_{n+2} - x^*)(x_n - x^*),$$

millest

$$x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x^* + (x^*)^2 \approx x_n x_{n+2} - (x_{n+2} + x_n)x^* + (x^*)^2$$

ning

$$x^* \approx \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Steffenseni meetod

2. Leiame $x_1 = g(x_0)$ ja rakendame võrrandile $f(x) \equiv x - g(x) = 0$ lõikajate meetodit punktides x_0, x_1. Siis

$$f(x_0) = x_0 - g(x_0) = x_0 - x_1,$$
$$f(x_1) = x_1 - g(x_1) = x_1 - x_2,$$

$$\frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_0(x_1 - x_2) - x_1(x_0 - x_1)}{x_1 - x_2 - (x_0 - x_1)} = \frac{-x_0 x_2 + x_1^2}{-x_2 + 2x_1 - x_0} = \widetilde{x}_2.$$

Seega saab Steffenseni meetodit esitada

$$x_0 \xrightarrow[x=g(x)]{\text{h.it.}} x_1 \xrightarrow[x-g(x)=0]{\text{l.m.}} \widetilde{x}_2 \xrightarrow[x=g(x)]{\text{h.it.}} x_3 \xrightarrow[x-g(x)=0]{\text{l.m.}} \widetilde{x}_4 \to \ldots .$$

Steffenseni meetod

3. Steffenseni meetodit võib veel käsitleda kui harilikku iteratsioonimeetodit, mis on rakendatud võrrandile $x = \varphi(x)$, kus

$$\varphi(x) = \frac{xg(g(x)) - (g(x))^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x},$$

ehk

$$x_0 \xrightarrow[x=\varphi(x)]{\text{h.it.}} \widetilde{x}_2 \xrightarrow[x=\varphi(x)]{\text{h.it.}} \widetilde{x}_4 \to \ldots .$$

Steffenseni meetodi koonduvuskiirus

Vaatleme Steffenseni meetodit kui harilikku iteratsioonimeetodit võrrandi $x = \varphi(x)$ korral, kus

$$\varphi(x) = \frac{xg(g(x)) - (g(x))^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x}. \tag{1}$$

Eeldame, et g on pidevalt diferentseeruv, $x^* = g(x^*)$ ja $g'(x^*) \neq 1$.

Väärtus $\varphi(x^*)$ ei ole võrduse (1) põhjal määratud, sest $x = x^*$ korral on lugeja ja nimetaja väärtus 0. Olgu $\varphi(x^*) = x^*$. (Kas φ on pidev punktis x^*? Jah, selleks tuleks näidata, et $\lim\limits_{x \to x^*} \varphi(x) = \varphi(x^*)$, aga meie näitame midagi enamat). Leiame

$$\varphi'(x^*) = \lim_{x \to x^*} \frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*}.$$

Steffenseni meetodi koonduvuskiirus

Lagrange'i valemi põhjal

$$g(g(x)) - g(x) = g'(\xi)(g(x) - x), \quad \xi \in (x, g(x)),$$

ja kui $x \to x^*$, siis $g(x) \to g(x^*) = x^*$ ning $\xi \to x^*$. Seega

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{xg(g(x)) - xg(x) + xg(x) - (g(x))^2}{g(g(x)) - g(x) - (g(x) - x)} = \\ &= \frac{xg'(\xi)(g(x) - x) - g(x)(g(x) - x)}{(g'(\xi) - 1)(g(x) - x)} = \frac{xg'(\xi) - g(x)}{g'(\xi) - 1},\end{aligned}$$

mille saamisel kasutame asjaolu $g(x) \neq x$, kui $x \neq x^*$, mis kehtib, kui x on x^* küllalt väikeses ümbruses $(g(x) - g(x^*) = g'(\xi_2)(x - x^*)$, $g'(\xi_2) \neq 1$ $\Rightarrow g(x) - x^* \neq x - x^*)$.

Steffenseni meetodi koonduvuskiirus

Kasutades veel asendust $g(x) = g(x^*) + g'(\xi_1)(x - x^*)$, $\xi_1 \in (x, x^*)$, milles asendame $g(x^*)$ arvuga x^*, saame

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi(x^*) &= \frac{xg'(\xi) - g(x)}{g'(\xi) - 1} - x^* = \\ &= \frac{xg'(\xi) - x^* - g'(\xi_1)(x - x^*) - x^*g'(\xi) + x^*}{g'(\xi) - 1} = \\ &= \frac{(g'(\xi) - g'(\xi_1))(x - x^*)}{g'(\xi) - 1}.\end{aligned}$$

Nüüd

$$\lim_{x \to x^*} \frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \to x^*} \frac{g'(\xi) - g'(\xi_1)}{g'(\xi) - 1} = \frac{g'(x^*) - g'(x^*)}{g'(x^*) - 1} = 0,$$

mis ütleb, et $\varphi'(x^*) = 0$ ja Steffenseni meetod koondub tehtud eeldustel kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist.

Ülesanne

16. Näidata §1 ülesannet 7 kasutades, et g küllaldase sileduse korral on eespool tehtud eeldustel Steffenseni meetod ruutkoonduvusega.

Näide

Lahendame võrrandi $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ viies selle kujule $x = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$.
Alglähend olgu $x_0 = 1.5$.

n	h.it.m x_n	Sm x_{2k+1}, $\widetilde{x}_{2k}$	Nm x_n
0	1.5	1.5	1.5
1	1.348399725	1.348399725	1.373333333
2	1.367376372	1.365265224	1.365262015
3	1.364957015	1.365225534	1.365230014
4	1.365264748	1.365230013	1.365230013
5	1.365225594	1.365230013	
6	1.365230576		
7	1.365229942		
8	1.365230023		
9	1.365230012		
10	1.365230014		
11	1.365230013		

Kõrgemat järku iteratsioonimeetodid

Vaatleme võrrandi $f(x) = 0$ lahendamist mingi iteratsioonimeetodiga. Olgu leitud x_n. Meenutame, et Newtoni meetodis arendasime

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + R_1(x),$$

jätsime ära jääkliikme R_1, saadud võrrandi $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$ lahendamisel saime

$$x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{ja} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Võtame pikema arendise

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x - x_n)^2 + R_2(x),$$

jätame ära jääkliikme R_2 ja jõuame võrrandini

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x - x_n)^2 = 0.$$

Kõrgemat järku iteratsioonimeetodid

Võrrandi

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x - x_n)^2 = 0.$$

korral on järgmised võimalused:

1. Lahendame ruutvõrrandi ning selle lahendi, mis on lähemal lähendile x_n, võtame lähendiks x_{n+1}.

Ülesanne

17. Eeldades, et lahend on ühekordne, tuletada eeskiri lähendi x_{n+1} leidmiseks (määrata, kumb ruutvõrrandi lahend tuleb võtta), kui x_n on lahendile küllalt lähedal.

Kõrgemat järku iteratsioonimeetodid

2. Asendame ruutvõrrandis $(x - x_n)^2 = \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2$, mis on pärit Newtoni meetodist. Säilinud lineaarsest võrrandist saame lahendina

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 .$$

   Seda meetodit nimetatakse Euler–Tšebõšovi meetodiks.

3. Asendame ruutvõrrandi ruutliikmes $(x - x_n)^2 = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(x - x_n)$, s.t. korrutises $(x - x_n)(x - x_n)$ asendame ainult ühe teguri Newtoni meetodi põhjal. Saadud lineaarse võrrandi lahendiks tuleb

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - \frac{1}{2}f''(x_n)f(x_n)}.$$

   Taolist meetodit nimetatakse Halley meetodiks.

Ülesanne

18. Tõestada, et nii Euler–Tšebõšovi kui ka Halley meetod on kuupkoonduvusega, kui lahend on ühekordne ja f'' rahuldab Lipschitzi tingimust.

Näide

Lahendame võrrandi $f(x) = 0$, $f(x) = x^6 - x - 2$ Newtoni, Euler-Tšebõšovi ja Halley meetodiga. Funktsioonil f on kaks reaalset nullkohta $x = -1$ ja $x \approx 1.21486$ (mõlemad ühekordsed).

n	Nm x_n	ETm x_n	Hm x_n
0	0.0	0.0	0.0
1	-2.0	-2.0	-2.0
2	-1.668393782	-1.531652621	-1.435698296
3	-1.398088630	-1.197254535	-1.090160704
4	-1.190336558	-1.025167548	-1.001266040
5	-1.057668076	-1.000092560	-1.000000004
6	-1.006494329	-1.0	-1.0
7	-1.000089433	-1.0	-1.0
8	-1.000000017		
9	-1.0		
10	-1.0		

Näide

n	Nm x_n	ETm x_n	Hm x_n
0	0.5	0.5	0.5
1	-2.557692308	8.230171825	-0.17526952
2	-2.131210465	6.287005969	-1.952352562
3	-1.776854594	4.802791791	-1.40317601
4	-1.485553103	3.669495216	-1.075539253
5	-1.255120006	2.805345421	-1.000749201
6	-1.094391081	2.150408613	-1.000000001
7	-1.016415895	1.667238805	-1.0
8	-1.000562328	1.351001634	
9	-1.000000677	1.224869244	
10	-1.0	1.214869222	
11	-1.0	1.214862322	
12		1.214862322	

Kõrgemat järku iteratsioonimeetodid

Praktikas neid meetodeid peaaegu ei kasutata, sest nad kasutavad funktsiooni f teist tuletist ja see ei ole näiteks katseandmete põhjal enamasti leitav. Peale selle, kui $\varepsilon_n = |x_n - x^*|$, siis kuupkoonduvuse korral $\varepsilon_n \sim 10^{-1}$ annab $\varepsilon_{n+1} \sim 10^{-3}$, $\varepsilon_{n+2} \sim 10^{-9}$, ruutkoonduvuses aga $\varepsilon_{n+1} \sim 10^{-2}$, $\varepsilon_{n+2} \sim 10^{-4}$, $\varepsilon_{n+3} \sim 10^{-8}$, s.t. tavaliselt vajalik täpsus saavutatakse ruutkoonduvuse korral ainult ühe lisasammuga, pidades silmas, et enne täpsuse $\varepsilon_n \sim 10^{-1}$ saavutamist kuupkoonduvusel koonduvuskiiruse eelist ei ole.

Kokkuvõte iteratsioonimeetoditest

Ligikaudseid meetodeid on vaja võrrandite lahendamisel kasutada siis, kui täpne lahendivalem ei ole teada või on liiga keeruline. Enamus võrrandeid lahendatakse praktikas ligikaudselt.

Võrrandi $f(x) = 0$ lahendit x^* nimetatakase m-kordseks, kui $f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$, $f^{(m)}(x^*) \neq 0$.

Iteratsioonimeetodite korral valitakse alglähend x_0 või alglähendite komplekt $x_0, \ldots, x_k$ ning leitakse järkjärgult järgmised lähendid

$$x_0, \ldots, x_k \to x_{k+1} \to x_{k+2} \to \ldots$$

ehk leitakse jada x_n. Põhiküsimus: Kas jada x_n koondub lahendiks?

Praktikas kasutatakse iteratsioonide lõpetamiseks järgmisi kriteeriume:

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon_x$
- $|f(x_n)| \leq \varepsilon_f$
- $n \leq n_{\max}$

Kokkuvõte iteratsioonimeetoditest

Lõigu poolitamise meetod

+ koondub alati
+ koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega, mille tegur on $\frac{1}{2}$
+ veahinnang täpselt teada
+ igal sammul on vaja arvutada üks funktsiooni väärtus

– koondumine on aeglane

Harilik iteratsioonimeetod

+ igal sammul on vaja arvutada üks funktsiooni väärtus

– võrrandi $f(x) = 0$ korral on palju võimalusi, kuidas viia see kujule $x = g(x)$

± koondub kui $|g'(x)| \leq q < 1$ mingis lahendi ümbruses

– koondumine geomeetrilise progressiooni kiirusega, mille tegur on q (lineaarne koondumine ($\alpha = 1$), aeglane)

+ kui $g'(x^*) = 0$, siis koondub kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist

Kokkuvõte iteratsioonimeetoditest

Newtoni meetod (erijuht harilikust iteratsioonimeetodist)

+ ühekordse lahendi ja $f \in C^2$ korral ruutkoonduvus ($\alpha = 2$, kiire)
+ m-kordse lahendi ja $f \in C^m$ korral lineaarne koonduvus (koonduvus geomeetrilise progressiooni kiirusega, mille tegur on $1 - \frac{1}{m}$)
- ei pruugi koonduda (võib tekkida jagamine nulliga, võib hajuda), koondub ainult hea alglähendi korral
- vajab igal sammul tuletise arvutamist lisaks f-ni väärtuse arvutamisele
- ranget praktikas kasutatavat veahinnangut ei ole võimalik anda; kui $|g'(x)| = \left|\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)'\right| \leq q = 0.5$, siis $|x_n - x^*| \leq |x_n - x_{n-1}|$
+ m-kordse lahendi korral kasutada Newton-Schröderi meetodit (teatud eeldustel ruutkoonduvus)
+ nulliga jagamise vältimiseks kasutada modifitseeritud Newtoni meetodit (lineaarne koonduvus)

Kokkuvõte iteratsioonimeetoditest

Lõikajate meetod

+ ühekordse lahendi korral koondub kiiremini lineaarsest ($\alpha \approx 1.618$) (hea alglähendi korral küllalt kiire)
+ mitmekordse lahendi korral lineaarne koonduvus
+ ei vaja tuletise arvutamist, vajab ainult ühe funktsiooni väärtuse arvutamist igal sammul
– ei pruugi koonduda
– ranget praktikas kasutatavat veahinnangut ei ole võimalik anda

Mülleri meetod ehk paraboolide meetod

+ ühekordse lahendi korral koondub kiiremini lineaarsest ($\alpha \approx 1.84$)
+ kahekordse lahendi korral koondub kiiremini lineaarsest ($\alpha \approx 1.23$)
+ ei vaja tuletise arvutamist
– ruutparabool ei pruugi x-teljega lõikuda (nt kui kolm järjestikust lähendit satuvad ühele poole lahendit)

Kokkuvõte iteratsioonimeetoditest

Steffenseni meetod

+ võimalus harilikku iteratsioonimeetodit kiirendada
+ teatud eeldustel koondub kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist
+ võimalik saada isegu ruutkoonduvus (ilma tuletisi arvutamata!)

Kõrgemat järku iteratsioonimeetodid sh Euler–Tšebõšovi ja Halley meetod

+ teatud eeldustel kuupkoonduvusega
– igal sammul peab arvutama lisaks f-ni väärtusele ka esimese ja teise tuletise väärtused
– praktikas piisab ruutkoonduvusest, kuupkoonduvus ei anna nii palju juurde