Võrrandisüsteemide lahendamine

Loeng 5

MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

11.03.2019

Ülesanded 19–20

Sissejuhatus

Vaatleme võrrandisüsteeme

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

kus $f_1, \dots, f_n$ on antud funktsioonid, $x_1, \dots, x_n$ otsitavad arvud. Tähistame $x = (x_1, \dots, x_n)$, $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, siis võime vaadeldava süsteemi kirjutada

$$F(x) = 0,$$

kus $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ või $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.

Sissejuhatus

Käsitleme ka süsteeme $x = G(x)$, mis võrandite kaupa kirjutatult on

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = g_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

st siin $G(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$.

Selliste süsteemide lahend on vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$, kus $F(x^*) = 0$ või $x^* = G(x^*)$.

Iteratsioonimeetodil leitakse vektorite jada x^m, $m = 0, 1, \dots$, $x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m) \in \mathbb{R}^n$.

Sissejuhatus

Kui $x, y \in \mathbb{R}$ korral on elementide x ja y vaheline kaugus $|x - y|$, siis $x, y \in \mathbb{R}^n$ korral on elementide x ja y vaheliseks kauguseks $\|x - y\|$, kus $\|\cdot\|$ on mingi norm ruumis $\mathbb{R}^n$. Enimkasutatavad normid on

$$
\begin{aligned}
\|x\|_2 &= \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2} \text{ ehk eukleidiline norm,} \\
\|x\|_1 &= |x_1| + \ldots + |x_n|, \\
\|x\|_\infty &= \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \\
\|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.
\end{aligned}
$$

Iga $x \in \mathbb{R}^n$ korral $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

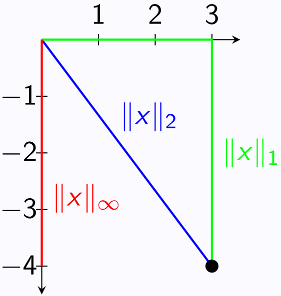
Norme saab vaadelda erinevaid, kuid kõigi nende korral peavad olema täidetud normi aksioomid: 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$; 3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Sissejuhatus

Näide

Olgu $x = (3, -4) \in \mathbb{R}^2$. Siis

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$
$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| = |3| + |-4| = 7$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} = \max\{|3|, |-4|\} = 4$$

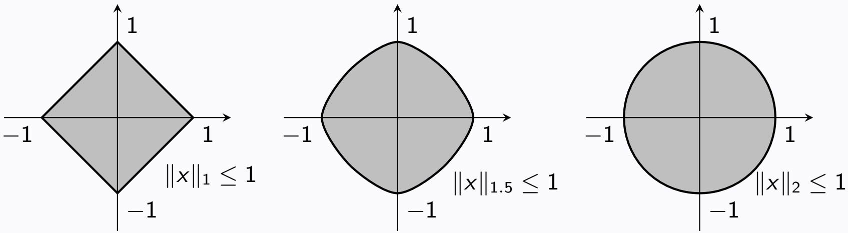


Sissejuhatus

Näide

Vaatleme nüüd elemente $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, mille korral $\|x\| \leq 1$.

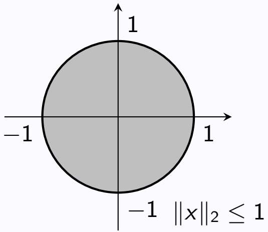
$$\|x\|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| \leq 1$$
$$\|x\|_2 \leq 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 1^2$$
$$\|x\|_p \leq 1 \Leftrightarrow |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1^p$$
$$\|x\|_\infty \leq 1 \Leftrightarrow |x_1| \leq 1 \text{ ja } |x_2| \leq 1$$

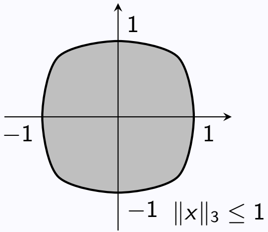


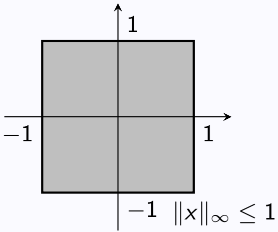
Näide

Vaatleme nüüd elemente $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, mille korral $\|x\| \leq 1$.

$$\|x\|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| \leq 1$$
$$\|x\|_2 \leq 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 1^2$$
$$\|x\|_p \leq 1 \Leftrightarrow |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1^p$$
$$\|x\|_\infty \leq 1 \Leftrightarrow |x_1| \leq 1 \text{ ja } |x_2| \leq 1$$







Sissejuhatus

Vaatleme vektorite jada x^m, $m = 0, 1, \ldots$, kus $x^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m) \in \mathbb{R}^n$.

Öeldakse, et jada x^m **koondub** elemendiks x^* ehk $x^m \to x^*$, kui $\|x^m - x^*\| \to 0$ protsessis $m \to \infty$, st elementide x^m ja x^* vaheline kaugus koondub nulliks.

Tegelikult lõplikumõõtmelises ruumis (mida $\mathbb{R}^n$ ju on) $\|x^m - x^*\| \to 0$ on samaväärne sellega, et $x_i^m \to x_i^*$, $i = 1, \ldots, n$, kui $m \to \infty$, **olenemata normi valikust**. Seega ruumis R^n koondumine $x^m \to x^*$ on samaväärne **koordinaatide koondumisega**.

Sissejuhatus

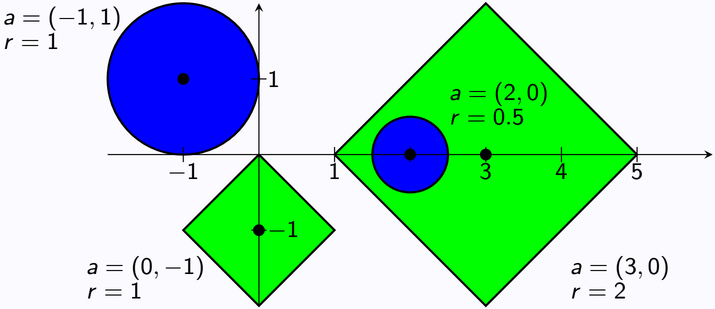
Olgu ruumis $\mathbb{R}^n$ antud norm $\|\cdot\|$. **Kinnine kera** on hulk

$$B = \overline{B}(a, r) = \{x : \|x - a\| \leq r\},$$

kus arv r on kera **raadius**, $a \in \mathbb{R}^n$ kera **keskpunkt**.

Näide

Vaatleme näiteid keradest $\overline{B}(a, r)$ ruumis $\mathbb{R}^2$ normide $\|\cdot\|_2$ ja $\|\cdot\|_1$ korral.



Harilik iteratsioonimeetod

Vaatleme süsteemi $x = G(X)$. Harilikus iteratsioonimeetodis antakse ette alglähend $x^0 \in \mathbb{R}^n$, järgmised lähendid avalduvad $x^{m+1} = G(x^m)$, $m = 0, 1, \ldots$, mis koordinaatide kaupa on

$$\begin{cases} x_1^{m+1} = g_1(x_1^m, \ldots, x_n^m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{m+1} = g_n(x_1^m, \ldots, x_n^m). \end{cases}$$

Harilik iteratsioonimeetod

Teoreem (hariliku iteratsioonimeetodi koonduvusteoreem)

Olgu $B \subset \mathbb{R}^n$ kinnine kera. Kui

1) $G : B \to B$,
2) $\exists q < 1$ nii, et $\|G(x) - G(y)\| \leq q\,\|x - y\|$ igasuguste $x, y \in B$, $x \neq y$, korral (st G on ahendav),

siis süsteemil $x = G(x)$ on keras B parajasti üks lahend x^*, iga alglähendi $x^0 \in B$ korral harilik iteratsioonimeetod koondub selleks lahendiks ($x^m \to x^*$), kehtib hinnang

$$\|x^m - x^*\| \leq \frac{q^m}{1-q}\left\|x^0 - x^1\right\|.$$

- Teoreemis võib kinnise kera B asendada kogu ruumiga $\mathbb{R}^n$.
- Muutmata eeldust 2) võib teoreemis esimese eelduse $G : B \to B$ asendada tingimusega $\|G(a) - a\| \leq (1-q)r$ (piirang kera B keskpunkti a nihkele) [põhjendame tahvlil].

Harilik iteratsioonimeetod

Järgnevas leiame piisavad tingimused G ahendavuseks. Eeldame, et G on diferentseeruv, st g_i, $i = 1, \ldots, n$, on diferentseeruvad. (Mitmemuutuja funktsiooni g_i diferentseeruvuse mõiste esineb kursuses MA IV, see ei ole samaväärne osatuletiste eksisteerimisega). Kasutame Lagrange'i keskväärtushinnangut

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \sup_{0<\lambda<1} \|G'(\lambda x + (1-\lambda)y)\| \|x - y\|,$$

kus

$$G'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Seega, kui $\|G'(x)\| \leq q < 1$ iga $x \in B$ korral, siis G on ahendav keras B [põhjendame tahvlil].

Maatriksi norm

Et kontrollida tingimust $\|G'(x)\| \le q < 1$, on vaja teada, mis on maatriksi norm ja kuidas seda leitakse. Olgu A maatriks, siis definitsiooni kohaselt

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|.$$

Vektori normi on kasutatud siin kahes kohas, seega saab vaadelda norme $\|A\|_{p \to q} = \sup_{\|x\|_p \le 1} \|Ax\|_q$, kus $1 \le p, q \le \infty$. Olgu $A = (a_{ij})$, siis

$$\|A\|_{\infty \to \infty} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \text{(max üle reasummade)}$$

$$\|A\|_{1 \to 1} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \text{(max üle veerusummade)}$$

$$\|A\|_{2 \to 2} = \sqrt{\rho(A^T A)} \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Maatriksi norm

Tuletame lõpmatusnormi valemi $\|A\|_{\infty\to\infty} = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Definitsiooni kohaselt

$$\begin{aligned}\|A\|_{\infty\to\infty} &= \sup_{\max\limits_i |x_i|\le 1} \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \\ &\le \sup_{\max\limits_i |x_i|\le 1} \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.\end{aligned}$$

Viimane maksimum realiseerub mingi $i = i_0$ korral, st $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$. Olgu $\overline{x}_j = \operatorname{sgn}(a_{i_0 j})$, siis

$$\|A\|_{\infty\to\infty} \ge \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\overline{x}_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Maatriksi norm

Tuletame 1-normi valemi $\|A\|_{1\to 1} = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. Definitsiooni kohaselt

$$\|A\|_{1\to 1} = \sup_{\sum_{i=1}^{n}|x_i|\le 1} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \le \sup_{\sum_{i=1}^{n}|x_i|\le 1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

$$= \sup_{\sum_{i=1}^{n}|x_i|\le 1} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_j| \le \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Viimane maksimum realiseerub mingi $j = j_0$ korral, st
$\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j_0}|$. Olgu $\overline{x}_j = 0$, kui $j \ne j_0$, ning $x_{j_0} = 1$, siis

$$\|A\|_{1\to 1} \ge \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j_0}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Maatriksi norm

Näide

Leiame maatriksi $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ normi.

$$\|A\|_{\infty\to\infty} = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\left\{\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4},$$

$$\|A\|_{1\to 1} = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4},$$

$$\|A\|_{2\to 2} \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1+4+9}{16}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{14}}{4} \approx 0.94.$$

Võrrand $\det(A^T A - \lambda I) = 0$ ehk $(5/16-\lambda)(9/16-\lambda) - 9/64 = 0$ annab omaväärtusteks $\lambda = \frac{7}{16} \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$ ning $\|A\|_{2\to 2} = \sqrt{\max|\lambda|} \approx 0.91$.

Harilik iteratsioonimeetod

Piisavad tingimused funktsiooni G ahendavuseks

1. Kui
$$\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|\le q<1\quad \forall x\in B=\{x:\|x-a\|_\infty\le r\},$$
siis G on ahendav keras B ∞-normi suhtes;
2. Kui $$\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|\le q<1\quad \forall x\in B=\{x:\|x-a\|_1\le r\},$$
siis G on ahendav keras B 1-normi suhtes;
3. Kui $$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right)^2\le q<1\quad \forall x\in B=\{x:\|x-a\|_2\le r\},$$
siis G on ahendav keras B 2-normi suhtes.

Näide

Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0, \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0, \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0. \end{cases}$$

Viime selle kujule $x = G(x)$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}\cos(x_2 x_3) + \frac{1}{6}, \\ x_2 = \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1, \\ x_3 = -\frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}. \end{cases}$$

Kontrollime koonduvusteoreemi eelduste täidetust kera $B = \overline{B}((0,0,0),1) = \{x : \|x\|_\infty \leq 1\} = [-1,1]^3$ korral.

Näide jätkub

Kasutades tähistusi

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\cos(x_2 x_3) + \frac{1}{6},$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1,$$
$$g_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{20}e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60},$$

näitame, et $G : B \to B$. Olgu $x \in B$, siis

$$|g_1(x_1, x_2, x_3)| \le \frac{1}{3}|\cos(x_2 x_3)| + \frac{1}{6} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0.5,$$
$$|g_2(x_1, x_2, x_3)| \le \frac{1}{9}\sqrt{1 + \sin 1 + 1.06} + 0.1 < 0.29,$$
$$|g_3(x_1, x_2, x_3)| \le \frac{1}{20}e + \frac{10\pi - 3}{60} < 0.61.$$

Näide jätkub

Näitame, et G on ahendav keras B ∞-normi suhtes. Kuna

$$g_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6},$$
$$g_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1,$$
$$g_3(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60},$$

siis $\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = \frac{\partial g_3}{\partial x_3} = 0$ ning

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right| = \frac{1}{3}|x_3||\sin(x_2x_3)| \le \frac{1}{3}\sin 1 < 0.281, \qquad \left|\frac{\partial g_1}{\partial x_3}\right| < 0.281,$$
$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right| = \frac{1}{9}\frac{2|x_1|}{2\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}} \le \frac{1}{9\sqrt{\sin(-1) + 1.06}} < 0.238,$$
$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right| = \frac{1}{9}\frac{|\cos x_3|}{2\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}} \le \frac{1}{18\sqrt{\sin(-1) + 1.06}} < 0.119,$$
$$\left|\frac{\partial g_3}{\partial x_1}\right| = \frac{1}{20}|x_2|e^{-x_1x_2} \le \frac{1}{20}e < 0.136, \qquad \left|\frac{\partial g_3}{\partial x_2}\right| < 0.136.$$

Näide jätkub

Hinnangute $\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = \frac{\partial g_3}{\partial x_3} = 0$,

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right| = \frac{1}{3}|x_3||\sin(x_2x_3)| \le \frac{1}{3}\sin 1 < 0.281, \qquad \left|\frac{\partial g_1}{\partial x_3}\right| < 0.281,$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right| = \frac{1}{9}\frac{2|x_1|}{2\sqrt{x_1^2+\sin x_3+1.06}} \le \frac{1}{9\sqrt{\sin(-1)+1.06}} < 0.238,$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right| = \frac{1}{9}\frac{|\cos x_3|}{2\sqrt{x_1^2+\sin x_3+1.06}} \le \frac{1}{18\sqrt{\sin(-1)+1.06}} < 0.119,$$

$$\left|\frac{\partial g_3}{\partial x_1}\right| = \frac{1}{20}|x_2|e^{-x_1x_2} \le \frac{1}{20}e < 0.136, \qquad \left|\frac{\partial g_3}{\partial x_2}\right| < 0.136,$$

põhjal saame

$$\|G'(x)\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right| < \max\{0.562, 0.357, 0.272\} = 0.562 = q$$

iga $x \in B$ korral. Koonduvusteoreemi eeldused on täidetud.

Näide jätkub

Lahendame võrrandisüsteemi hariliku iteratsioonimeetodiga, saame

m	x_1^m	x_2^m	x_3^m	$\|x^m - x^{m-1}\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	-0.10000000	
1	0.49998333	0.00944115	-0.52310127	0.423
2	0.49999593	0.00002557	-0.52336331	$9.4 \cdot 10^{-3}$
3	0.50000000	0.00001234	-0.52359814	$2.3 \cdot 10^{-4}$
4	0.50000000	0.00000003	-0.52359847	$1.2 \cdot 10^{-5}$
5	0.50000000	0.00000002	-0.52359877	$3.1 \cdot 10^{-7}$

Teoreemist saame hinnangu

$$\left\|x^5 - x^*\right\|_\infty \leq \frac{0.562^5}{1 - 0.562} \left\|x^0 - x^1\right\| < 0.055.$$

Kuna teada on ka täpne lahend $x^* = (0.5, 0, -\frac{\pi}{6})$, siis tegelikult $\left\|x^5 - x^*\right\|_\infty \leq 2 \cdot 10^{-8}$.

Seideli meetod

Vaatleme süsteemi $x = G(X)$ ehk

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = g_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Seideli meetodis antakse ette alglähend x^0.Üleminek $x^m \to x^{m+1}$ toimub järgmise skeemi kohaselt:

$$\begin{aligned} x_1^{m+1} &= g_1(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m), \\ x_2^{m+1} &= g_2(x_1^{m+1}, x_2^m, \dots, x_n^m), \\ &\dots \\ x_n^{m+1} &= g_n(x_1^{m+1}, \dots, x_{n-1}^{m+1}, x_n^m). \end{aligned}$$

Seideli meetod

Teoreem (Seideli meetodi koonduvusteoreem)

Olgu $B = \{x : \|x - a\|_\infty \leq r\} \subset \mathbb{R}^n$. Kui

1) $\|G(a) - a\|_\infty \leq (1 - q)r$,
2) $\exists q < 1$ nii, et $\|G(x) - G(y)\|_\infty \leq q \|x - y\|_\infty$ igasuguste $x, y \in B$, $x \neq y$, korral (st G on ahendav),

siis süsteemil $x = G(x)$ on keras B parajasti üks lahend x^*, iga alglähendi $x^0 \in B$ korral Seideli meetod koondub selleks lahendiks, kehtib hinnang

$$\|x^m - x^*\|_\infty \leq \frac{q^m}{1 - q} \left\|x^0 - x^1\right\|_\infty .$$

Lahendi olemasolu ja ühesus tuleneb hariliku iteratsioonimeetodi koonduvusteoreemist. Tõestame vaid veahinnangu, siis on näidatud ka meetodi koonduvus.

Seideli meetod

Tähistame $x^{m,i} = \left(x_1^{m+1}, \ldots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^m, \ldots, x_n^m\right)$, seejuures $x^{m,1} = x^m, x^{m,n+1} = x^{m+1} = x^{m+1,1}$. Siis Seideli meetodi arvutuseeskiri on

$$x_i^{m+1} = g_i(x^{m,i}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Veendume, et $x^{m,i} \in B$ iga m, i korral.

Ülesanded

19. Olgu $G : B \to B$, $B = \{x\colon \|x - a\|_\infty \leq r\}$, $x^{m,i}$ Seideli meetodi rakendamisel süsteemile $x = G(x)$ esinevad vektorid. Tõestada, et kui $x^0 \in B$, siis $x^{m,i} \in B$ iga m, i korral.
20. Tõestada, et teoreemi eeldustel kehtib võrratus $\left\|x^{m+1} - x^*\right\|_\infty \leq q\left\|x^m - x^*\right\|_\infty$.

Seideli meetod

Viimase ülesande abil saame

$$\|x^m - x^*\|_\infty \leq q \left\|x^{m-1} - x^*\right\|_\infty \leq \cdots \leq q^m \left\|x^0 - x^*\right\|_\infty,$$

millest juba järeldub koondumine. Teoreemis väidetud veahinnangu saamiseks hindame

$$\begin{aligned}\left\|x^0 - x^*\right\|_\infty &\leq \left\|x^0 - x^1\right\|_\infty + \left\|x^1 - x^*\right\|_\infty \\ &\leq \|x^0 - x^1\|_\infty + q\|x^0 - x^*\|_\infty,\end{aligned}$$

millest $(1-q)\|x^0 - x^*\|_\infty \leq \|x^0 - x^1\|_\infty$ ning seega $\|x^0 - x^*\|_\infty \leq \frac{1}{1-q}\|x^0 - x^1\|_\infty$. Kokkuvõttes

$$\|x^m - x^*\|_\infty \leq q^m \left\|x^0 - x^*\right\|_\infty \leq \frac{q^m}{1-q}\|x^0 - x^1\|_\infty.$$

□

Seideli meetod

Märkus. Teoreemis võib eeldada, et

$$\|G(x) - G(y)\|_\infty \leq q\|x - y\|_\infty \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \neq y,$$

siis väited jäävad kehtima kujul, kus kera B on asendatud ruumiga $\mathbb{R}^n$.

Harilik iteratsioonimeetod

Näide jätkub

Lahendades eespool toodud võrrandisüsteemi hariliku iteratsioonimeetodiga, saime

m	x_1^m	x_2^m	x_3^m	$\|x^m - x^{m-1}\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	-0.10000000	
1	0.49998333	0.00944115	-0.52310127	0.423
2	0.49999593	0.00002557	-0.52336331	$9.4 \cdot 10^{-3}$
3	0.50000000	0.00001234	-0.52359814	$2.3 \cdot 10^{-4}$
4	0.50000000	0.00000003	-0.52359847	$1.2 \cdot 10^{-5}$
5	0.50000000	0.00000002	-0.52359877	$3.1 \cdot 10^{-7}$

Lahendades Seideli meetodiga, saame

m	x_1^m	x_2^m	x_3^m	$\|x^m - x^{m-1}\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	-0.10000000	
1	0.49998333	0.02222979	-0.52304613	0.423
2	0.49997747	0.00002815	-0.52359807	$2.2 \cdot 10^{-2}$
3	0.50000000	0.00000004	-0.52359877	$2.8 \cdot 10^{-5}$
4	0.50000000	0.00000000	-0.52359878	$3.8 \cdot 10^{-8}$